RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO CAFIERO

Su di un teorema di Montel relativo alla continuità, rispetto al punto iniziale, dell'integrale superiore ed inferiore di una equazione differenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 186-200

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__186_0>

SU DI UN TEOREMA DI MONTEL RELATIVO ALLA CONTINUITÀ, RISPETTO AL PUNTO INIZIALE, DELL'INTEGRALE SUPERIORE ED INFERIORE DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

Nota (*) *di* FEDERICO CAFIERO (*a Napoli*)

È noto (1) che se $f(x, y)$ soddisfa in $R: a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$ alle ipotesi di CARATHÉODORY, per ogni punto di R passa almeno un integrale dell'equazione:

$$\text{(I)} \qquad y' = f(x, y)$$

e gli estremi di esso e di ogni altro eventuale appartengono alla frontiera di R. È noto (2) anche che, sempre nelle ipotesi di CARATHÉODORY, gli integrali della (I) dipendono con continuità dai valori iniziali se da questi sono determinati in modo unico.

In una precedente Nota (3) ho osservato come quest'ultima circostanza derivi esclusivamente dalle proprietà di un insieme di curve appartenenti ad uno stesso rettangolo R quando ad esse s'imponga di riempire R, di avere gli estremi sulla frontiera di

(*) Pervenuta in Redazione il 27 Marzo 1948.

(1) C. CARATHÉODORY: « *Vorlesungen über Reelle Funktionen* ». Zweite Auflage. Berlin, 1927, pp. 665–674. Le ipotesi di CARATHÉODORY sono le seguenti: *$f(x, y)$ misurabile rispetto ad x, continua rispetto ad y nel rettangolo R ed ivi soddisfacente alla limitazione $|f(x, y)| \leq q(x)$ con $q(x)$ sommabile (nel senso di Lebesgue) in $I: a \leq x \leq b$.*

(2) C. CARATHÉODORY: Op. cit., pp. 678-680.

(3) F. CAFIERO: « *Un'osservazione sulla continuità, rispetto ai valori iniziali, degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$* ». Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, s. 8, v. 3, (1947), pp. 479–482.

R e di essere a due a due prive di punti comuni. Ne ho quindi dedotto il sèguente:

TEOREMA I. - *Gli integrali dell'equazione* $y' = f(x, y)$ *dipendono con continuità dal punto iniziale se da questo sono univocamente determinati.*

Accanto a tale teorema sussiste anche il seguente dovuto a MONTEL (4):

TEOREMA II. - *L'integrale superiore* (5) *(inferiore) dell'equazione* $y' = f(x, y)$, *con* $f(x, y)$ *continua, è continuo*

(4) P. MONTEL: « *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle* ». Bullettin des Sciences Mathématiques; tome L, première partie, (1926), pp. 205-217. Cfr. anche G. SANSONE: « *Equazioni differenziali nel campo reale* ». Zanichelli - Bologna, parte II, pp. 81-85.

Più precisamente Montel dimostra che, detto $y = G(x; x_0, y_0)$ [$y = g(x; x_0, y_0)$] l'integrale superiore [inferiore] dell'equazione (I) di punto iniziale $P_0(x_0, y_0)$, data la successione:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \ldots$$

di punti di R appartenenti alla regione superiore [inferiore] di $y = G(x; x_0, y_0)$ [$y = g(x; x_0, y_0)$] tali che:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = y_0,$$

si ha uniformemente rispetto ad x:

$$\lim_{n \to \infty} G(x; x_n, y_n) = G(x; x_0, y_0) \quad \left[\lim_{n \to \infty} g(x; x_n, y_n) = g(x; x_0, y_0)\right].$$

Da tale proprietà dell'integrale superiore [inferiore], facendo uso del postulato di Zermelo, si può passare al teorema II. Il postulato di Zermelo, come faremo vedere nel N. 2, si può evitare.

(5) Per una vasta bibliografia sulla nozione di integrale superiore ed inferiore rimandiamo alla citata nota di MONTEL (pag. 206 nota (1) e (2) a piè di pagina. Qui ci limitiamo a citare i seguenti lavori perchè recenti:

E. BAJADA: « *Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie* ». Rend. Acc. Lincei, s. 8, vol. II, (1947), pp. 261-268.

F. CAFIERO: « *Sull'approssimazione mediante poligonali degli integrali del sistema differenziale* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ». Giornale di matematiche Battaglini, s. 4, vol. 77, (1947), pp. 28-35.

rispetto al punto iniziale variabile nella sua regione superiore (inferiore) (6).

In questo lavoro, mettendomi dallo stesso punto di vista della mia Nota (7) precedente, do una proposizione generale dalla quale si deduce fra l'altro il seguente:

TEOREMA III. - *Ogni gruppo di condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza dell'integrale superiore ed inferiore* (8) *dell'equazione differenziale* (I) *è anche sufficiente a stabilire la dipendenza continua dell'integrale superiore (inferiore) dal punto iniziale variabile nella sua regione superiore (inferiore).*

Tale teorema contiene evidentemente entrambi i teoremi I e II.

N. 1 - Sia Γ una famiglia di curve continue, suscettibili di rappresentazione cartesiana, appartenenti ad uno stesso rettangolo $R: a \leq x \leq b, \alpha \leqq y \leq \beta$ ed aventi gli estremi sulla frontiera di R. Supponiamo che ad ogni punto P_0 (punto iniziale) di R, non appartenente ai suoi lati orizzontali, si possa far corrispondere una ed una sola curva di Γ passante per esso. Indicato con Γ_1 l'insieme delle curve di Γ corrispondenti ai punti di R, supponiamo che le curve di Γ_1 soddisfino alle seguenti condizioni:

i) *Ogni curva rispetto ad ogni altra appartenga ad una sola delle due regioni in cui il rettangolo R viene suddiviso dall'altra.*

(6) Per regione superiore [inferiore] di una curva $y = \gamma(x)$ di R, con $\gamma(x)$ definita in $\bar{I}: a_1 \leq x \leq b_1$, intendiamo il dominio:

$$a_1 \leq x \leq b_1 \ , \ \gamma(x) \leq y \leq \beta \qquad [a_1 \leq x \leq b_1 \ , \ \alpha \leq y \leq \gamma(x)] .$$

(7) Cfr. nota (3).

(8) Quando non si fa alcuna ipotesi sulla $f(x,y)$, per curva integrale della (I) intendiamo una curva con gli estremi sulla frontiera di R e diagramma di una funzione continua dotata di derivata quasi dappertutto e quasi dappertutto soddisfacente alla (I). Per integrale superiore (inferiore) della (I) di punto iniziale P_0 intendiamo una curva integrale, ovviamente unica se esiste, appartenente alla regione superiore (inferiore) di ogni altra eventuale relativa allo stesso punto iniziale.

ii) *Ogni curva non possa avere con ogni altra, appartenente alla sua regione inferiore, punti in comune che siano a sinistra del proprio punto iniziale ed a destra del punto iniziale dell'altra* [9].

Si può allora dimostrare che:

A) *Detta* $y = \gamma(x; x_0, y_0)$ *l'equazione della curva* γ_0 *corrispondente a* $P_0(x_0, y_0)$ $(\alpha < y_0 < \beta)$ *e fissato un* $\varepsilon > 0$, *si può determinare un intorno* J *di* P_0, *appartenente alla regione superiore destra rispetto a* P_0 *di* γ_0 [10], *ed un intorno* $\bar{J}$ *di* P_0, *appartenente alla regione inferiore sinistra rispetto a* P_0 *di* γ_0, *in modo tale che, se* $P_1(x_1, y_1)$ *e* $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ *appartengono rispettivamente ad* J *e* $\bar{J}$, *si abbia*:

$$0 \leq \gamma(x; x_1, y_1) - \gamma(x; x_0, y_0) \leq \varepsilon \tag{1}$$

nell'intervallo comune di definizione a destra di x_0, *e:*

$$0 \leq \gamma(x; x_0, y_0) - \gamma(x; \bar{x}_1, \bar{y}_1) \leq \varepsilon \tag{2}$$

nell'intervallo comune di definizione a sinistra di x_0. *Inoltre se* $\gamma(x; x_0, y_0)$ *è definita in* I_1 *a destra di* x_0 *ed in* I_2 *a sinistra di* x_0 *ed ivi soddisfa rispettivamente alle limitazioni:*

$$\alpha \leq \gamma(x; x_0, y_0) < \beta \qquad\qquad \alpha < \gamma(x; x_0, y_0) \leq \beta,$$

anche $\gamma(x; x_1, y_1)$ *e* $\gamma(x; \bar{x}_1, \bar{y}_1)$ *sono rispettivamente definite in* I_1 *e* I_2.

(9) Fra i punti di una curva di Γ_1 che siano a destra (sinistra) del proprio punto iniziale includiamo il punto iniziale stesso.

(10) Per regione superiore destra [sinistra] rispetto al punto iniziale $P_0(x_0, y_0)$ di una curva $y = \gamma(x)$ intendiamo il dominio:

$$x_0 \leq x \leq b_1\ ,\ \ \gamma(x) \leq y \leq \beta \qquad [a_1 \leq x \leq x_0\ ,\ \ \gamma(x) \leq y \leq \beta],$$

avendo indicato con $I: a_1 \leq x \leq b_1$ l'intervallo di definizione di $\gamma(x)$.

Analogamente si definisce la regione inferiore destra e sinistra rispetto al punto iniziale di una curva di Γ_1.

Dimostriamo la (1). Supponiamo in un primo momento che la curva γ_0 non abbia a destra di P_0 punti in comune con il lato orizzontale di R appartenente alla retta $y = \beta$.

Indicato con $I_1: x_0 \leq x \leq b_1$ $(x_0 < b_1 \leq b)$ l'intervallo di definizione di $\gamma(x; x_0, y_0)$ a destra di x_0 e fissato un $\varepsilon > 0$ in modo tale che:

$$\gamma(x; x_0, y_0) + \varepsilon < \beta \qquad\qquad x_0 \leq x \leq b_1,$$

chiamiamo γ^* la curva di equazione:

$$y = \gamma(x; x_0, y_0) + \varepsilon \qquad\qquad x_0 \leq x \leq b_1.$$

Detto s il segmento di estremi $P_0(x_0, y_0)$ e $\overline{P}_0(x_0, y_0 + \varepsilon)$, dimostriamo che esiste almeno una curva $\overline{\gamma}$ di Γ_1, corrispondente ad un punto $\overline{P}(x_0, \overline{y})$ interno ad s, diagramma della funzione continua $\gamma(x; x_0, \overline{y})$ definita in tutto I_1 ed ivi soddisfacente alla limitazione:

$$\gamma(x; x_0, y_0) \leq \gamma(x; x_0, \overline{y}) \leq \gamma(x; x_0, y_0) + \varepsilon \qquad x_0 \leq x \leq b_1.$$

Supponiamo per assurdo che ciò non sia. Detto $P_2(x_0, y_2)$ un punto interno ad s, sia γ_2, di equazione $y = \gamma(x; x_0, y_2)$, la curva di Γ_1 ad esso corrispondente ed indichiamo con $\overline{I}_1$ l'intervallo di definizione a destra di x_0 di $\gamma(x; x_0, y_2)$. La curva γ_2, non potendo per i) intersecare γ_0 avrà in qualche punto ξ di $I_1 \cdot \overline{I}_1$ ordinata maggiore di quella di γ^*. Ma poichè γ_2 ha in x_0 ordinata minore di quella di γ^* esisterà un primo punto $\overline{x}$, a destra di x_0, in cui γ_2 e γ^* assumono la stessa ordinata. Al variare di P_2 in s, considerato aperto, tale punto $\overline{x}$ varia in I_1 descrivendo un insieme di estremo superiore X appartenente ad I_1. Detta Y l'ordinata di γ_0 in X, sia $Q(X, \eta)$ un punto interno al segmento di estremi $Q_1(X, Y)$ e $Q_2(X, Y + \varepsilon)$ ed indichiamo con γ_3, di equazione $y = \gamma(x; X, \eta)$, la curva ad esso corrispondente. Tale curva non può avere per ii), a sinistra di Q, punti in comune con γ_0 che siano a destra di P_0, quindi poichè il suo estremo sinistro deve appartenere alla frontiera di R, a sinistra di Q

dovrà avere punti in comune o col segmento s considerato aperto, o con la curva γ^*. In ambedue le eventualità sarebbe intersecata da infinite curve di Γ_1 corrispondenti a punti interni al segmento s. E ciò è assurdo per i). Esiste quindi almeno una curva $\bar{\gamma}$ di Γ_1, corrispondente ad un punto $\bar{P}$ interno al segmento s, che a destra di $\bar{P}$ si mantiene sempre compresa tra γ_0 e γ^*. È ovvio poi che $\gamma(x; x_0, \bar{y})$ è definita almeno in I_1 (11).

Quanto abbiamo fin qui detto dimostra, almeno nel caso in cui ci siamo messi, la (1). Infatti ogni altra curva corrispondente ad un punto appartenente alla regione superiore destra rispetto a P_0 di γ_0 ed alla regione inferiore destra rispetto a $\bar{P}$ di $\bar{\gamma}$, sarà per i) sempre compresa tra γ_0 e $\bar{\gamma}$.

Passando al caso generale, supponiamo che la curva γ_0 abbia a destra di P_0 punti in comune col lato orizzontale del rettangolo R appartenente alla retta $y = \beta$.

La curva γ_0 in x_0 assume ordinata $y_0 < \beta$. Sia allora $\bar{I}_2 : x_0 \leq x \leq \bar{b}_1$ il massimo intervallo, di estremo sinistro x_0, nel quale risulti:

$$\gamma(\bar{b}_1; x_0, y_0) = \beta \ , \quad \gamma(x; x_0, y_0) < \beta \qquad\qquad x_0 \leq x < \bar{b}_1$$

e determiniamo un $h > 0$ in modo tale che:

$$\text{(3)} \qquad \beta - \gamma(x; x_0, y_0) \leq \varepsilon \qquad\qquad \bar{b}_1 - h \leq x \leq \bar{b}_1 .$$

Nell'intervallo $I_3 : x_0 \leq x \leq \bar{b}_1 - h$ la curva γ_0 assume sempre ordinata minore di β e quindi, per quanto abbiamo già dimostrato, si può determinare un intorno J di P_0, appartenente alla regione superiore destra rispetto a P_0 di γ_0, in modo che valga la (1) in I_3. Ora se $\gamma(x; x_1, y_1)$ è definita a destra di x_0, in un intervallo $\bar{I}_3$ maggiore di I_3 e contenuto in $\bar{I}_2$, per la

(11) Avvertiamo che l'ipotesi ii) non impedisce che due curve γ_1 e γ_2 di Γ_1 possano avere punti in comune che siano a destra (sinistra) dei punti iniziali di ambedue. Ma se P è uno di questi punti, è facile verificare che a destra (sinistra) di tale punto le curve debbono coincidere.

(3), la (1) è ancora verificata in $\overline{I}_3$. Se poi $\gamma(x; x_1, y_1)$ è definita a destra di x_0 in un intervallo maggiore di $\overline{I}_2$ e lo stesso accade per $\gamma^*(x; x_0, y_0)$, le curve γ_1 e γ_0 debbono necessariamente avere in comune un punto di ascissa appartenente ad $\overline{I}_2$ e quindi a destra di P coincidono [12].

Analogamente si dimostra la (2).

Supponiamo ora che ad ogni punto di R, non appartenente ai suoi due lati orizzontali, si possa far corrispondere una ed una sola curva della famiglia Γ in modo tale che le curve del sottoinsieme Γ_2 di Γ determinato da tale corrispondenza, soddisfino alla condizione i) ed alla seguente:

ii′) *Ogni curva non possa avere con ogni altra, appartenente alla sua regione inferiore, punti in comune che siano a destra del proprio punto iniziale ed a sinistra del punto iniziale dell'altra.*

Si può allora dimostrare che:

A′) *Detta* $y = \overline{\gamma}(x; x_0, y_0)$ *l'equazione della curva* $\overline{\gamma}_0$ *corrispondente a* $P_0(x_0, y_0)$ *e fissato un* $\varepsilon > 0$, *si può determinare un intorno* J *di* P_0, *appartenente alla regione superiore sinistra rispetto a* P_0 *di* γ_0, *ed un intorno* $\overline{J}$, *appartenente alla regione inferiore destra rispetto a* P_0 *di* γ_0, *in modo tale che, se* $P_1(x_1, y_1)$ *e* $\overline{P}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ *appartengono rispettivamente a* J *e* $\overline{J}$, *si abbia:*

$$0 \leq \overline{\gamma}(x; x_1, y_1) - \overline{\gamma}(x; x_0, y_0) \leq \varepsilon$$

nell'intervallo comune di definizione a sinistra di x_0, *e:*

$$0 \leq \overline{\gamma}(x; x_0, y_0) - \overline{\gamma}(x; \overline{x}_1, \overline{y}_1) \leq \varepsilon$$

nell'intervallo comune di definizione a destra di x_0. *Inoltre se* $\overline{\gamma}(x; x_0, y_0)$ *è definita in* I_1 *a sinistra di* x_0 *ed*

[12] Vedi nota precedente.

in I_2 a destra di x_0 ed ivi soddisfa rispettivamente alle limitazioni:

$$\alpha \leq \overline{\gamma}(x; x_0, y_0) < \beta \qquad\qquad \alpha < \overline{\gamma}(x; x_0, y_0) \leq \beta$$

anche $\overline{\gamma}(x; x_1, y_1)$ *e* $\overline{\gamma}(x; \overline{x}_1, \overline{y}_1)$ *sono rispettivamente definite in I_1 e I_2.*

La dimostrazione è analoga alla precedente.

In particolare *supponiamo che le curve di* Γ *siano a due a due prive di punti comuni e che per ogni punto di R ne passi una. Tali curve dipendono allora con continuità dal punto iniziale* (13).

La dimostrazione è ovvia. Infatti un tale insieme di curve soddisfa alle ipotesi i), ii) ed ii') e quindi dai teoremi A) ed A') si deduce l'asserto.

N. **2.** – Dimostriamo ora che dai teoremi A) ed A') segue il teorema III.

A tale scopo supponiamo che l'equazione (I), con $f(x, y)$ definita in R, ammetta in ogni punto sia l'integrale superiore che quello inferiore e che tali integrali abbiano gli estremi sulla frontiera di R. Ora, le ipotesi i) ed ii) [ii')] sono ovviamente verificate dalle curve integrali della (I) che a destra [sinistra] del punto iniziale coincidono con l'integrale superiore ed a sinistra [destra] con l'integrale inferiore. Quindi, indicato con $G(x; x_0, y_0)$ l'integrale superiore dell'equazione (I) di punto iniziale $P_0(x_0, y_0)$, per i teoremi A) ed A'), fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\delta > 0$ in modo tale che, se $0 \leq \overline{y} - y_0 \leq \delta$, si abbia:

$$0 \leq G(x; x_0, \overline{y}) - G(x; x_0, y_0) \leq \varepsilon$$

nell'intervallo comune di definizione. Indicato poi con $g(x; x_0, y_0 + \delta)$

(13) È questo il risultato da me ottenuto nel lavoro citato in nota (3).

l'integrale inferiore relativo al punto $P(x_0, y_0 + \delta)$, sia $I_3 : a_3 \leq \leq x \leq b_3$ il massimo intervallo, contenente x_0, nell'interno del quale risulta:

$$G_0(x\,;\, x_0, y_0) < g(x\,;\, x_0, y_0 + \delta)$$

e $\bar{\delta} \leq \delta$ la distanza di P_0 dall'insieme dei punti della curva $y = g(x\,;\, x\ \ , y_0 + \delta)$ contenuti nel dominio rettangolare:

$$a_3 \leq x \leq b_3\ , \quad \alpha \leq y \leq \beta\,.$$

Detto J_1 l'intorno di P_0 di raggio $\bar{\delta}$ appartenente alla regione superiore di $y = G(x\,;\, x_0, y_0)$, è immediato verificare che l'integrale superiore relativo ad un punto interno a tale intorno di P_0 si mantiene sempre compreso tra l'integrale superiore relativo al punto P_0 e l'integrale superiore relativo al punto $P(x_0, y_0 + \delta)$. E ciò dimostra il teorema III poichè analogamente si procede per l'integrale inferiore.

N. **3.** - Le ipotesi i) ed ii) [ii')] del N. 1 si possono mettere in una forma equivalente che riteniamo utile dare poichè da essa appare con maggior chiarezza quali siano le proprietà dell'integrale superiore a destra [sinistra] e dell'integrale inferiore a sinistra [destra] che si sono sfruttate per la dimostrazione dell'enunciato A) [A')]. A tale scopo, supponiamo che ad ogni punto P_0 di R, non appartenente ai suoi due lati orizzontali, si possa far corrispondere una ed una sola curva γ_0 di Γ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

J) *Ad ogni punto P della curva γ_0 a destra del punto iniziale P_0 corrisponda una curva che a destra di P coincida con γ_0 ed a sinistra di P appartenga alla regione inferiore [superiore] di γ_0.*

JJ) *Ad ogni punto P della curva γ_0 a sinistra del punto iniziale P_0 corrisponda una curva che a sinistra di P coincida con γ_0 ed a destra di P appartenga alla regione superiore [inferiore] di γ_0.*

È facile allora far vedere che tali condizioni sono equivalenti alla i) ed ii) [ii')]. Cominciamo col dimostrare che da queste condizioni discende la i). Supponiamo infatti per assurdo che la curva γ_0, di punto iniziale P_0, sia intersecata dalla curva γ_1 di punto iniziale P_1 non appartenente a γ_0 e situato nella sua regione superiore. Sia P un punto di intersezione e supponiamo, per fissare le idee, che sia a destra di P_0 e di P_1. Detta γ la corrispondente di P, tale curva dovrebbe per J) coincidere a destra di P sia con γ che con γ_0. Ma ciò è assurdo se, come si era supposto, tali curve a destra di P non coincidono. Analogamente si esaminano gli altri casi.

Passiamo ora a dimostrare che dalle stesse condizioni J) ed JJ) discende anche la ii). Infatti supponiamo che le due curve γ_0 e γ_1 abbiano in comune un punto P che sia a sinistra del punto iniziale di γ_1 ed a destra del punto iniziale di γ_0 e sia γ la curva corrispondente a P. Tale curva γ, per J), dovrebbe coincidere con γ_0 a destra di P e, per JJ), dovrebbe a destra di P appartenere alla regione superiore di γ_1. Ma ciò è assurdo se, come avevamo supposto, la curva γ_1 a destra di P non coincide con γ_0. Analogamente si esaminano gli altri casi.

Resta da dimostrare che dalle ipotesi i) ed ii) [ii')] discendono le J) ed JJ). Ma su ciò non insistiamo poichè la dimostrazione si consegue agevolmente per assurdo.

N. **4.** – Il ragionamento mediante il quale MONTEL perviene alla dimostrazione del teorema II sfrutta proprietà del solo integrale superiore (inferiore). Potrebbe allora sembrare strano che per la dimostrazione dei teoremi A) ed A'), conducenti al teorema III, si siano sfruttate contemporaneamente sia proprietà dell'integrale superiore, sia proprietà dell'integrale inferiore. Sorge quindi la questione di vedere se il teorema di MONTEL si possa estendere ad un insieme di curve continue godenti delle sole proprietà dell'integrale superiore (inferiore). Qui daremo una banale estensione del teorema di MONTEL al solo scopo di mostrare quali nuove ipotesi bisogna imporre ad un tale insieme di curve continue, nonchè per mostrare come queste restringano di molto il campo di applicabilità del teorema stesso.

Sia Γ un insieme di curve appartenenti alla striscia:

$$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$$

e diagrammi di funzioni continue definite in $I: a \leq x \leq b$.

Considerato l'insieme Γ come uno spazio Σ di curve ed introdotta una metrica definendo la distanza (γ_1, γ_2) tra due suoi elementi γ_1 e γ_2, rispettivamente di equazione $y = \gamma_1(x)$ e $y = \gamma_2(x)$, col porre:

$$(5) \qquad (\gamma_1, \gamma_2) = \underset{a \leq x \leq b}{Max} \mid \gamma_1(x) - \gamma_2(x) \mid ,$$

supponiamo che tale spazio sia *completo.* Siano inoltre soddisfatte le seguenti ipotesi:

a) *Per ogni punto (punto iniziale) di S passi una ed una sola curva di Γ, che diremo curva superiore, appartenente alla regione superiore di ogni altra eventuale passante per lo stesso punto.*

b) *La curva superiore, relativa ad un punto iniziale appartenente alla regione superiore di un'altra curva superiore, appartenga a tale regione.*

c) *Ogni insieme limitato di curve superiori sia compatto.*

Sussiste allora il seguente teorema:

B) *Detta $y = \gamma(x; x_0, y_0)$ la curva superiore di punto iniziale $P_0(x_0, y_0)$ e fissato un $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta > 0$ in modo tale che:*

$$0 \leq \gamma(x; x_0, \bar{y}) - \gamma(x; x_0, y_0) \leq \varepsilon \qquad a \leq x \leq b$$

se $0 \leq \bar{y} - y_0 \leq \delta$.

Infatti se ciò non fosse si potrebbe determinare un $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{ \delta_n \}$, di numeri positivi, tendente a zero in modo tale che per:

$$(6) \qquad y_n - y_0 = \delta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

si abbia:

$$\gamma(x; x_0, y_n) - \gamma(x; x_0, y_0) > \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

in qualche punto di I. Ma ciò è assurdo. Infatti per l'ipotesi c), dalla successione $\{\gamma(x; x_0, y_n)\}$ se ne può estrarre un'altra $\{\gamma(x; x_0, y_{\lambda_n})\}$ convergente e la convergenza, avendo definita in Σ la distanza mediante la (5), è uniforme rispetto ad x.

Posto:

$$\lim_{n \to \infty} \gamma(x; x_0, y_{\lambda_n}) = \gamma_0(x) \qquad a \leq x \leq b, \tag{8}$$

poichè per la (6) e l'ipotesi b) si ha rispettivamente:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0, \quad \gamma(x; x_0, y_n) \geq \gamma(x; x_0, y_0) \qquad a \leq x \leq b,$$

risulta:

$$\gamma_0(x_0) = y_0, \quad \gamma_0(x) \geq \gamma(x; x_0, y_0) \qquad a \leq x < b. \tag{9}$$

Inoltre per la supposta completezza dello spazio Σ la curva $y = \gamma_0(x)$ è un elemento di Σ e quindi, poichè passa per P_0, per l'ipotesi a) deve essere:

$$\gamma_0(x) \leq \gamma(x; x_0, y_0) \qquad a \leq x \leq b.$$

Dalla soprascritta limitazione e dalla seconda delle (9) segue.

$$\gamma_0(x) \equiv \gamma(x; x_0, y_0) \qquad a \leq x \leq b$$

e ciò per la (8), essendo la convergenza uniforme, contraddice la (7). Il teorema enunciato è così dimostrato [14].

[14] Ferme restando le altre ipotesi, alle ipotesi *a)*, *b)* e *c)* si sostituiscano le seguenti:

a') *Per ogni punto (punto iniziale) di S passi una ed una sola curva*

Ferme restando le condizioni a), b), c), non facciamo alcuna ipotesi sulla completezza o meno dello spazio Σ. Ci proponiamo allora di far vedere, con un esempio, che tale spazio può non essere completo e che può venire a mancare, in tal caso, anche la continuità della curva superiore rispetto al punto iniziale variabile nella sua regione superiore e lungo la verticale per il punto. A tale scopo, fissata la successione numerica divergente:

$$0 \equiv a_1 < a_2 < \ldots . < a_n < \ldots . ,$$

ad ogni punto di S di ordinata a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ facciamo corrispondere quale curva superiore il segmento orizzontale di estremi $P_n(a, a_n)$ e $\overline{P}_n(b, a_n)$ ed a ogni punto di ordinata $-a_n$ $(n = = 1, 2, \ldots)$ il segmento orizzontale di estremi $Q_n(a, -a_n)$ e $\overline{Q}_n(b, -a_n)$. Fissato poi un asse u che con l'asse delle x formi un angolo acuto, sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di S non appartenente a nessuna delle rette $y = a_n$ ed $y = -a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Supposto $y_0 > 0$ $(y_0 < 0)$ sia a_ν $(-a_\nu)$ il più piccolo numero della successione $\{a_n\}$ $(\{-a_n\})$ soddisfacente alla limitazione:

di Γ, *che diremo curva inferiore, appartenente alla regione inferiore di ogni altra eventuale passante per lo stesso punto.*

b′) *La curva inferiore relativa ad un punto iniziale appartenente alla regione inferiore di un'altra curva inferiore, appartenga a tale regione.*

c′) *Ogni insieme limitato di curve inferiori sia compatto.*

Sussiste allora il teorema:

B′) *Detta* $y = \overline{\gamma}(x; x_0, y_0)$ *la curva inferiore di punto iniziale* $P_0(x_0, y_0)$ *e fissato un* $\varepsilon > 0$, *si può determinare un* $\delta > 0$ *in modo tale che:*

$$0 \leq \overline{\gamma}(x; x_0, y_0) - \overline{\gamma}(x; x_0, \overline{y}) \leq \varepsilon$$

se $0 \leq y_0 - \overline{y} \leq \delta$.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

È ovvio infine che le ipotesi che portano ai teoremi B) e B′) sono verificate dall'insieme delle soluzioni della (I) a secondo membro continuo.

$$y_0 < a_\nu \qquad\qquad (y_0 > -a_\nu)$$

e distinguiamo i seguenti due casi:

PRIMO CASO: La retta per P_0 parallela all'asse u interseca la retta $y = a_\nu$ $(y = -a_\nu)$ in un punto P interno ad S.

SECONDO CASO: La retta per P_0 parallela all'asse u non interseca la retta $y = a_\nu$ $(y = -a_\nu)$ in un punto interno alla striscia S.

Nel primo caso al punto P_0 facciamo corrispondere, quale curva superiore, la spezzata, con gli estremi sulle rette verticali $x = a$ ed $x = b$, che a sinistra di P_0 coincide con la retta $y = y_0$ ed a destra di P_0 si ottiene congiungendo il punto P_0 col punto P ed il punto P col punto $\bar{P}_\nu(b, a_\nu)$ $[\bar{Q}_\nu(b, -a_\nu)]$. Nel secondo caso invece al punto P_0 facciamo corrispondere, quale curva superiore, la spezzata, con gli estremi sulle rette verticali $x = a$ e $x = b$, che a sinistra di P_0 coincide con la retta $y = y_0$ ed a destra di P_0 con la parallela per P_0 all'asse u.

È immediato riconoscere che un tale insieme di curve soddisfa alle condizioni a) e b) e che, definita la distanza tra due suoi elementi γ_1 e γ_2 mediante la (5), lo spazio Σ da esse costituito non è completo, mentre un qualunque insieme limitato di suoi elementi è compatto. È ovvio poi che manca la continuità delle curve superiori corrispondenti ai punti di ordinata a_n e $-a_\nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ rispetto al punto iniziale variabile nella regione superiore e lungo una qualunque direzione.

Notiamo infine che le curve del precedente esempio, oltre a godere della proprietà a) dell'integrale superiore, godono anche delle seguenti altre proprietà dell'integrale superiore stesso.

j') *Ad ogni punto P di una curva superiore γ_0 di punto iniziale P_0 a sinistra di P, corrisponde, quale curva superiore, una curva γ che a destra di P coincide con γ_0 ed a sinistra di P appartiene alla regione superiore di γ_0.*

jj') *Ad ogni punto P di una curva superiore γ_0 di punto iniziale P_0 a destra di P, corrisponde, quale curva*