RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sulle frequenze e sullo smorzamento delle oscillazioni di una sfera vibrante radialmente in un fluido

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 107-114

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__107_0>

SULLE FREQUENZE E SULLO SMORZAMENTO DELLE OSCILLAZIONI DI UNA SFERA VIBRANTE RADIALMENTE IN UN FLUIDO

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*).

1. - Nella presente Nota mi propongo di studiare *l'equazione* detta *alle frequenze e smorzamenti* relativa al problema del moto di una sfera vibrante radialmente in un fluido. Le soluzioni di questa equazione sono gli autovalori di una certa equazione integrale, a nucleo funzione razionale del parametro, che ho studiata in un lavoro precedente. Ho fatto ivi vedere come tali autovalori abbiano parte reale negativa. In questa Nota, oltre a dimostrare direttamente tale proprietà dei valori eccezionali, ne deduco altre inerenti alle soluzioni di questa equazione, in rapporto ai parametri che figurano in esse, proprietà che sono notevoli per il significato meccanico che hanno. Ritrovo, tra l'altro, un risultato interessante che il prof. E. LAURA ha dimostrato per altra via (1). Sfrutterò nel corso della Nota un procedimento, che ho già seguito in un lavoro in corso di stampa nei Rend. dell'Acc. dei Lincei, per ricercare limitazioni per le radici di certe equazioni algebriche, e che qui applico, estendendolo, alla equazione trascendente.

2. - L'equazione di cui sopra è la seguente

$$\text{1)} \qquad \frac{Tg\,x\,(1+px^2)-x}{x-Tg\,x} = -\frac{m\,x^2}{1+n\,x}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 3 dicembre 1947.

(1) E. LAURA, *Sulla durata delle oscillazioni di una sfera vibrante radialmente in un fluido.* [«Rend. Accad. Lincei», Vol. XXXI, Serie V I° sem., fasc. 8°, (310–312)].

dove abbiamo posto come nella Nota precedente

$$p = \frac{a^2}{4\,b^2} \qquad m = \alpha\, p \qquad n = \frac{a}{c} \qquad x = \frac{\lambda\, R}{a}$$

con a e b velocità di propagazione delle onde longitudinali e traversali del vibratore, α rapporto della densità del fluido a quella della sfera, c velocità di propagazione delle onde nel fluido.

Osserviamo inoltre che lo spostamento radiale nella sfera è dato da

$$u\,(r,t) = e^{\lambda t} \frac{d}{d\,r} \frac{sen\,\frac{\lambda}{a}\,r}{r}$$

onde compare il significato meccanico delle soluzioni della 1).

Ricordo infine che si ha

$$p = \frac{1 - \varkappa}{2\,(1 - 2\,\varkappa)}$$

per cui, poichè $\varkappa$ (modulo di Poisson del vibratore) è maggiore di -1, risulta $p > \frac{1}{3}$.

Premessi questi richiami, trasformiamo opportunamente il primo membro dell'equazione 1). Anzitutto, con la sostituzione

2) $$x = i\,z$$

la 1) diventa

3) $$\frac{sen\,z\,(1 - p z^2) - cos\,z}{z\,cos\,z - sen\,z} = \frac{m\,z^2}{1 + n\,z}.$$

Osserviamo quindi che il numeratore del primo membro di quest' ultima si fattorizza agevolmente e si ottiene

4) $$sen\,z\,(1 - p z^2) - z\,cos\,z = -\,z^3 \left(p - \frac{1}{3}\right) \prod_1^{\infty}{}_i \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_i^2}\right)$$

dove con α_i ho indicate le ascisse delle intersezioni della tangentoide con la cubica di equazione

$$y = \frac{1 - p z^2}{z}.$$

Queste α_i sono i valori eccezionali relativi al caso della sfera vibrante nel vuoto, valori che, ricordando la posizione 2), sono immaginari puri onde le vibrazioni della sfera risultano libere. La distribuzione di detti numeri α_i è espressa dalle seguenti diseguaglianze

$$5)\qquad 0<\alpha_1<\pi,\quad 3\frac{\pi}{2}<\alpha_2<2\pi,\quad 5\frac{\pi}{2}<\alpha_3<3\pi,\ldots.$$

Analogamente al numeratore si fattorizza il denominatore e si ottiene

$$6)\qquad z\cos z-\operatorname{sen} z=-\frac{1}{3}z\prod_1^\infty{}_i\left(1-\frac{z_2}{\beta_i^2}\right)$$

dove β_i sono le ascisse delle intersezioni della tangentoide con la bisettrice del primo quadrante. Esse danno gli autovalori relativi al caso in cui la sfera vibri in modo che lo spostamento in superficie sia nullo, nel qual caso le vibrazioni sono ancora libere. I numeri β_i soddisfano alle diseguaglianze seguenti

$$7)\qquad \pi<\beta_1<\frac{3\pi}{2},\quad 2\pi<\beta_2<\frac{3\pi}{2},\ldots.$$

Infine l'equazione 3) per le 4) e 5) assume la forma

$$8)\qquad \frac{(3p-1)\prod_1^\infty{}_i\left(1-\frac{z^2}{\alpha_i^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_i\left(1-\frac{z^2}{\beta_i^2}\right)}=\frac{m z^2}{1+nz}$$

3. - In questo numero proverò che:

L'equazione 8) *ha tutte le sue radici che hanno coefficente della parte immaginaria positivo.*

Scritta l'equazione nella forma

$$9)\qquad \frac{\prod_1^\infty{}_i\left(1-\frac{z^2}{\alpha_i^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_i\left(1-\frac{z^2}{\beta_i^2}\right)}=-iz\frac{3p-1}{p}\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{z}{z-\frac{i}{n}}$$

dedurremo dal confronto degli argomenti dei due membri quanto ci siamo proposto.

Denoteremo nel seguito un punto del piano di Argand-Gauss con il numero di cui esso è l'affissa, e nel computo degli angoli assumeremo sempre il valore dell'angolo convesso con segno.

Poichè si ha

$$\textit{argomento}\,\frac{z-a}{z-b}=\textit{angolo}\ b\widehat{z}a$$

per tre punti qualunque a, b, z del piano complesso, denotando con ∂ l'argomento di z, con ∂_i l'angolo $\beta_i\widehat{z}\alpha_i$, con ∂'_i l'angolo $(-\beta^i)\widehat{z}(-\alpha_i)$, con φ l'angolo $\frac{i}{n}\,,\widehat{z}\,0$, acciocchè z sia soluzione dell'equazione 9) bisogna che sussista la congruenza

$$10)\qquad \sum_1^\infty{}_i\,\partial_i+\sum_1^\infty{}_i\,\partial'_i\equiv\partial+\varphi-\frac{\pi}{2}\,(mod\ 2\,\pi)\,.$$

Se proviamo che tale congruenza non può sussistere per un punto z appartenente al quarto quadrante, possiamo concludere come propostoci poichè l'equazione 9) non ha soluzioni reali e le sue radici complesse sono simmetriche rispetto all'asse immaginario. Se z è dunque un punto del quarto quadrante, tenendo conto della distribuzione dei punti α_i, β_i, $-\alpha_i$, $-\beta_i$, sull'asse reale espressa dalle 5) e 7) si ottiene:

a) gli angoli ∂_i positivi non hanno punti a comune oltre il vertice, lo stesso succede per gli angoli ∂'_i negativi;

b) per ogni i si ha $\partial_i>|\,\partial'_i\,|$.

Si può quindi asserire che per un tale z saranno soddisfatte le seguenti relazioni

$$11)\quad 0<\sum_1^\infty{}_i\,\partial_i<\pi+\partial<\pi,\quad \partial<\sum_1^\infty{}_i\,\partial'_i<0,\quad \Sigma_i\partial_i>|\,\Sigma_i\partial'_i\,|\,.$$

Osservando infine che si ha, per ogni z del quarto quadrante

$$12)\qquad -\frac{\pi}{2}<\partial\leq0\,,\quad 0\leq\varphi<\frac{\pi}{2}$$

deduciamo che la congruenza 10) non può sussistere per un tale z poichè mentre l'argomento del primo membro è tale che risulta

$$0 \leq \sum_1^\infty {}_i \partial_i + \sum_1^\infty {}_i \partial'_i < \pi$$

l'argomento del secondo risulta minore di zero.

4. – In questo numero ci occuperemo di studiare la distribuzione delle soluzioni della equazione per valori sufficentemente piccoli e sufficentemente grandi del rapporto $\frac{a}{n}$ che denoterò con μ.

Per ragioni di continuità si ha che circondato α_i con un cerchietto comunque piccolo per valori sufficentemente piccoli di μ esisterà uno zero della equazione 9) interno a detto cerchio, denotiamolo con $\alpha_i(\mu)$ e sarà

$$\lim_{\mu \to 0} \alpha_i(\mu) = \alpha_i(0) = \alpha_i .$$

Denoterò quindi con $\psi'_i(\mu)$ l'angolo $r \widehat{\alpha_i} \alpha_i(\mu)$ e sia φ'_i l'angolo $\frac{i}{n} \widehat{\alpha_i} 0$. *Dimostro che deve essere:*

$$\psi'_i = \lim_{\mu \to 0} \psi'_i(\mu) = \frac{\pi}{2} + \varphi'_i \tag{13}$$

cioè che per valori sufficentemente piccoli di μ la parte reale di $\alpha_i(\mu)$ è minore di α_i.

Infatti nella eguaglianza 10) sempre verificata per ogni soluzione della 9) cioè per ogni valore di μ e per il corrispondente $\alpha_i(\mu)$ passo al limite per $\mu \to 0$.

Osservando che si ha

$$\lim_{\mu \to 0} \Sigma_i \partial_i = \psi'_i - \pi \qquad \lim \Sigma_i \partial'_i = 0$$

ed inoltre

$$\lim_{\mu \to 0} \partial = 0 \qquad \lim_{\mu \quad 0} \varphi = \varphi'$$

ottengo

$$\psi_i' - \pi = \varphi_i' - \frac{\pi}{2}$$

da cui l'asserto.

Ragiono analogamente per valori infinitamente grandi di μ, osservando però che per detti valori l'equazione oltre ad avere radici interne ai cerchi di centri i punti β_i, radici che denoterò con $\beta_i(\mu)$ ha anche, nel primo quadrante, una radice in un cerchietto comunque piccolo di centro l'origine, per valori sufficentemente grandi di μ, radice che denoteremo con $\beta_0(\mu)$. A questo zero corrisponde nel caso di μ molto piccolo uno zero reale che non ha interesse dal punto di vista meccanico.

Proverò ora che:

14) $$\psi_i'' = \lim_{\mu \to +\infty} \psi_i''(\pi) = \frac{\pi}{2} - \varphi_i''$$

dove ho indicato con il doppio segno gli elementi analoghi a quelli del caso $\mu \to 0$.

Nella stessa eguaglianza 10) passo al limite per $\mu \to +\infty$ ed osservo che si ha diversamente del caso precedente soltanto

$$\lim_{\mu \to +\infty} \Sigma_i \, \partial_i = -\psi_i''$$

ottengo allora

$$-\psi_i'' = \varphi_i'' - \frac{\pi}{2}$$

cioè l'asserto.

Se infine passiamo al limite nelle 10) relativamente al valore $\beta_0(\mu)$ per $\mu \to \infty$ otteniamo

15) $$\psi_i'' = \lim_{\mu \to \infty} \psi_i''(\mu) = 0 .$$

Si è provato allora che:

Per valori sufficentemente grandi di μ la parte reale delle soluzioni della 9) diminuisce all'aumentare di μ.

5. - Alla determinazione effettiva di soluzioni approssimate si giunge determinando il modulo di $z - \alpha_k$ e $z - \beta_k$ col procedimento seguente che è particolarmente semplice e che ci accontentiamo di accennare.

Scritta l'equazione 9) nella forma

$$16) \quad 1 - \frac{z}{\alpha_k} = \frac{1}{3p-1} \frac{m z^2}{1+nz} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{z^2}{\beta_i^2}\right)}{\prod_i^{i=\text{'}} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_i^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{\alpha_k}\right)}$$

assumiamo come valore approssimato di $|\alpha_k z|$ il valore

$$\frac{m \alpha_k^2}{1 + n \alpha_k} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k - \operatorname{sen} \alpha_k}{h}$$

dove

$$h = \lim_{z \to \alpha_k} \frac{\operatorname{sen} z (1 - p z^2) - z \cos z}{\alpha_k - z} = p \alpha_k^2 \cos \alpha_k + \alpha_k (2p - 1) \operatorname{sen} \alpha_k$$

onde si ha

$$|\alpha_k - z| = \frac{m \alpha_k}{1 + n \alpha_k} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k - \operatorname{sen} \alpha_k}{p \alpha_k \cos \alpha_k + (2p - 1) \operatorname{sen} \alpha_k}.$$

Una formula analoga vale per la determinazione di $|\beta_k - z|$. Noti che siano questi moduli che denoteremo con ρ_k' e ρ_k'' si trovano agevolmente i due autovalori $\alpha_k(\mu)$, $\beta_k(\mu)$ valendoci degli angoli ψ_k' ψ_k'' e partendo a seconda dei casi da α_k o da β_k.

6. - Interpretiamo meccanicamente i risultati ottenuti nei nn. 3, 4, 5.

Il risultato n. 3 esprime, come si ottiene ricordando la posizione 2), che *le vibrazioni della sfera sono di carattere armonico smorzato.*

Il risultato del n. 4 dice che *per valori sufficentemente piccoli di* μ *cioè di* $\frac{\alpha c}{a}$ *le frequenze del moto sono minori delle* *analoghe relative al caso della sfera vibrante nel vuoto ed il rapporto tra smorzamento e variazione di frequenza aumenta con l'aumentare di detta frequenza.*

Ancora il risultato del n. 4 dice che *per valori molto grandi del rapporto* $\frac{\alpha c}{a}$ *si ha ancora un abbassamento di frequenza coll'aumentare di* μ *e la comparsa di una bassa frequenza che svanisce per* $\mu \to \infty$. *Si ha infine che per valori sufficentemente grandi di* μ *lo smorzamento diminuisce coll'aumentare di* μ *stesso.*

Resta inoltre determinato un metodo per il calcolo approssimato dei valori eccezionali relativi ai casi in cui μ assume valori prossimi a zero o prossimi a infinito.