

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

**Teoria dei nomogrammi a punti allineati ed a scale
rettilinee, dal punto di vista delle corrispondenze
plurilineari tra forme di prima specie**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 16 (1947), p. 3-72

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1947__16__3_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEORIA DEI NOMOGRAMMI A PUNTI ALLINEATI ED A SCALE RETTILINEE, DAL PUNTO DI VISTA DELLE CORRISPONDENZE PLURILINEARI TRA FORME DI PRIMA SPECIE(*)

*Memoria (**) di EDMONDO MORGANTINI (a Padova).*

È a tutti nota l'importanza che la nomografia ha assunto negli ultimi decenni in tutti i rami della tecnica. Abachi e nomogrammi sono da tempo entrati nella pratica e ben pochi sono coloro che non abbiano avuto occasione di servirsi di essi. Particolarmente familiari li ha resi ad es. il largo uso che se ne fa per risolvere sistematicamente alcuni problemi topografici e di tiro delle artiglierie.

Amplissima ne è la letteratura ⁽¹⁾, a carattere essenzial-

(*) Questo lavoro fu iniziato dall'A. durante il suo richiamo alle armi (1939-43), quando ebbe l'incarico dal Comandante del 20° Regg.to Art. « *Piave* », col. TIBERIO TIBERI di costruire un nomogramma a punti allineati per il rapido calcolo delle distanze. Fu poi redatto, in una forma che differiva da questa solo per qualche ritocco formale, al ritorno dell'A. a Padova dopo l'8 settembre 1943.

(**) Pervenuta in Redazione il 29 Ottobre 1945.

⁽¹⁾ Un'ampia bibliografia corredata ad es. tanto l'articolo di R. MEHMKE « *Numerisches Rechnen* », quanto il suo rifacimento a cura di M. D'OCAGNE « *Calculus numériques* », rispettivamente nelle edizioni tedesca (1902) e francese (1909) della *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften*, 1^{er} Bd., 2^{er} Teil, F, pagg. 941-1076 (Tome I, 4^{me} Vol., 2^{me} et 3^{me} fasc., nella edizione francese, che in seguito indicheremo brevemente con A). In essi un ampio capitolo (A, nn. 49-57) è dedicato alla nomografia ed in particolare al metodo dei punti allineati (A, n. 53).

Un'esposizione più recente, concisa ed interessante per le sue vedute generali è quella di M. D'OCAGNE, contenuta nel Fasc. IV dei *Mémorial des Sc. Math.* « *Esquiss d'ensemble de la Nomographie* » (Paris, Gauthier-Villars,

mente applicativo in Italia, ove si eccettuino poche opere scolastiche ⁽²⁾.

Classico in argomento il trattato del D'OCAGNE già citato ¹⁾.

Tra i nomogrammi offrono particolare interesse per la loro praticità quelli a punti allineati, specialmente se a scale rettilinee. Della loro teoria questo lavoro vuol dare una rielaborazione originale, ponendosi dal punto di vista geometrico della considerazione delle corrispondenze che nascono tra i sostegni delle scale, qualora sia fissato il tipo del nomogramma.

Che io sappia tale punto di vista è nella questione essenzialmente nuovo, ed apporta alla teoria una unità ed una concisione notevoli.

Durante la trattazione sono esaminati anche altri concetti già noti, sotto punti di vista che credo originali e convenienti.

Così (nell'introduzione) si suppone in generale proiettivo il riferimento dei sostegni delle scale.

Tale ipotesi, insieme alla considerazione della corrispondenza trilineare ⁽³⁾, rende particolarmente semplice ed elegante la tratta-

1925), alla fine del quale viene aggiornata anche l'ampia bibliografia contenuta nel classico «*Traité de Nomographie*» (Paris, Gauthier-Villars, 1^{re} ed. 1899, 2^e ed. 1921). Nell'«*Esquisse...*» (che indicheremo in seguito con E) il cap. III è dedicato ai nomogrammi a punti allineati; nel «*Traité...*» i cap. III e VI.

⁽²⁾ Notissimo ad es. il libro di G. PESCI «*Cenni di nomografia*» (2^a ed. Livorno 1901).

Nel grosso volume di G. CASSINIS «*Calcoli numerici grafici e meccanici*» (Pisa, Tip. Ed. Mariotti-Pacini, 1928) il cap. IV è dedicato ai metodi grafici di calcolo (pagg. 63-134). Di questo la sez. D) parla dei nomogrammi a punti allineati, limitandosi — come dice l'Autore (pag. 98) — «a trattare alcuni casi particolari semplici, che hanno importanza nelle applicazioni».

Una breve esposizione degli elementi della «*Nomografia*», si trova anche in una conferenza di O. CHISINI, pubblicata nel vol. VI (1932) dei Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano.

Recentemente nei tipi della R. Accademia Navale di Livorno è apparso il volume «*Nomografia*» di A. AGOSTINI (Livorno, 1942) che contiene anche un breve elenco dei migliori trattati recenti sull'argomento.

⁽³⁾ Un ampio cenno bibliografico ed una esposizione elementare della teoria delle corrispondenze trilineari per le forme di prima specie sono contenuti nella monografia di E. MORGANTINI «*Teoria delle corrispondenze trilineari*

zione della teoria dei nomogrammi a punti allineati con tre scale rettilinee (cap. I), permettendo di ritrovare naturalmente e per altra via i risultati già conseguiti dal D'OCAGNE. Ad es. la nozione di punti critici ⁽⁴⁾ si identifica con quella di punti singolari della trilinearità; si ritrova il tipo più generale di equazione suscettibile di tale interpretazione nomografica, ecc.

Nel capitolo II si confronta la nozione di abaco a curve concorrenti con quella di nomogramma a punti allineati, stabilendone i legami e precisando la generalità che pertinge al secondo concetto. Si definisce la nozione più generale di nomogramma a punti dipendenti e si precisa la nozione di equivalenza di fronte a certi gruppi di trasformazioni (dei sostegni e del piano del nomogramma) che generalizzano in particolare l'anamorforesi rettilinea di L. LALANNE e quella di J. MASSAU ⁽⁵⁾.

Si passa quindi a trattare nel capitolo III dei nomogrammi a scale rettilinee ed a punti allineati per quattro o più variabili, introducendo la nozione di prodotto di prima specie di due trilinearità con due sostegni in comune.

Nel capitolo IV la considerazione del prodotto di seconda specie di due trilinearità serve di guida per la costruzione dei vari tipi di nomogrammi a quattro scale rettilinee, doppio allineamento a cerniera rettilinea.

tra forme di prima specie » in Rendiconti del Sem. Matematico della R. Università di Padova (Padova, Cedam, 1938), che indicheremo in seguito con T.

Dopo la pubblicazione di T sono venute a conoscenza — per avermene l'Autore gentilmente inviata una copia — di una nota di A. DUSCHER: « *Eine Abbildung der binären Trilinearform* » (Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung, XXXII (1922), p. 234). In essa Egli fa vedere, ispirandosi ai lavori di C. SEGRE citati nella successiva nota ⁽⁶⁾, come lo studio della corrispondenza equivalga a quello della configurazione quadrica rigata-fascio di piani dello spazio ordinario.

Colgo l'occasione per ricordare che della teoria della corrispondenza trilineare recentemente si è anche occupato E. A. WEISS, morto il 9-2-42 durante la 2^a guerra mondiale. L'elenco completo dei suoi lavori si trova alla fine dell'articolo commemorativo di K. STRUBECKER in *Deutsche Mathematik*, Anno 7^o (1943), p. 254-298.

⁽⁴⁾ Confronta E, pag. 29.

⁽⁵⁾ Confr. A, pagg. 367-372; E, pag. 16.

Per assegnare il tipo più generale di equazione in quattro variabili d'ordine nomografico quattro suscettibile di tale interpretazione nomografica, si premette nel capitolo V un cenno sulla classificazione proiettiva delle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie, tratta in parte da un noto lavoro di C. SEGRE ⁽⁶⁾.

(⁶) C. SEGRE: « *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali* » in *Annali di Matematica*, (3) XXIX (1920), pagg. 105-140. Cfr. anche C. SEGRE: « *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche* » in *Rend. Accad. Lincei*, (5) XXVIII² (1919), pagg. 308-312. In questo lavoro l'autore enuncia le idee generali che poi nell'altro applica al caso particolare delle quadrilinearità tra forme di prima specie.

INTRODUZIONE

Scale funzionali - Nomogrammi e corrispondenze.

1. - Premessa.

La nozione generale di scala funzionale ⁽¹⁾ si basa sulla rappresentazione geometrica di una variabile reale dipendente o no sui punti di una curva piana. Infatti essa dipende dalla possibilità di istituire una corrispondenza biunivoca e continua tra i numeri y di un intervallo A del campo reale ed un arco di curva C . Com'è noto tale possibilità esiste sempre, appena C sia una linea semplice ed aperta di JORDAN.

2. - Scale funzionali rettilinee: scelta del riferimento.

Sia A l'intero campo reale, C una retta, chiusa, nel senso della geometria proiettiva ⁽²⁾. Basta introdurre sulla retta un sistema di ascisse o più in generale un sistema di coordinate proiettive x .

Ogni altro riferimento y biunivoco senza eccezioni e continuo dei punti di C ai numeri di A genera, qualora si associno punti aventi la stessa coordinata, una corrispondenza π biunivoca senza eccezioni e continua della retta in se (un legame funzionale $y = l(x)$ qualora si associno le coordinate x ed y di un medesimo punto, dove l è univoca e continua ed il suo dominio A coincide col suo codominio). Quindi appena l sia suscettibile di rappresentazione analitica, π è una proiettività (l è una funzione lineare fratta).

(1) Cfr. A, n. 42, pag. 325; E, pag. 2.

(2) Specialmente nel caso dei nomogrammi a punti allineati, dovendosi costruire i punti incogniti mediante una catena di proiezioni e sezioni, è opportuno considerare i sostegni delle scale dal punto di vista della geometria proiettiva.

Dunque il nuovo riferimento è ancora un sistema di coordinate proiettive.

Scelti i punti fondamentali ed il punto unità si può costruire linearmente ogni punto razionale⁽³⁾, quindi in pratica (cioè con l'approssimazione che consente il disegno) ogni punto reale.

3. - Nella pratica, data una retta, si presuppone sempre dato su di essa un sistema di ascisse x , a meno del verso positivo e della scelta dell'origine, in quanto si conviene ad es. di misurare le lunghezze in millimetri. A partire da tale sistema, per costruire un qualunque sistema di coordinate proiettive y si può procedere:

a) per via grafica, mediante proiezione da un centro opportuno del sistema di ascisse di una retta ausiliaria;

b) per via numerica, avendo preventivamente costruito una tabella della funzione lineare fratta $y = l(x)$.

In un caso e nell'altro si può sempre fare in modo che un certo segmento corrisponda ad un dato intervallo del campo reale (più precisamente che tre punti dati abbiano coordinate assegnate).

D'ora in poi supporremo sempre che sui sostegni delle scale rettilinee che si considerano sia prefissato un sistema di coordinate proiettive. Se del caso preciseremo i punti fondamentali del riferimento ed i punti unità, oppure assegneremo le coordinate di tre punti.

4. - Definizione.

Dopo di ciò possiamo precisare che cosa intendiamo per scala funzionale rettilinea:

Sia data una funzione reale $y = f(x)$, definita in un certo intervallo del campo reale $I = (a \text{ H } b)$ (più in generale in un aggregato semplicemente infinito). Supponiamo che in tale intervallo essa sia univoca assieme alla sua inversa, sebbene in molti casi sia sufficiente supporle tali da poterle considerare separatamente i vari rami univoci nell'intervallo dato.

⁽³⁾ Cfr. ad es. A. COMESSATTI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, (Padova. Cedam 1931) p. II, pagg. 103-104.

Su di una retta (*sostegno della scala*) sia fissato un sistema di coordinate proiettive y . Associamo ad ogni punto y il valore x di I tale che sia $f(x) = y$ nel ramo che si è preso in esame della funzione f . Mettiamo ciò in evidenza graficamente scrivendo a fianco dei punti corrispondenti ad opportuni ⁽⁴⁾ valori di x la loro « quota » x . Così procedendo ⁽⁵⁾ per l'intero intervallo I considerato si viene a costruire la *scala funzionale rettilinea* della funzione $y = f(x)$, relativa al sistema di coordinate proiettive considerato.

5. - Esempi.

Casi particolari notissimi sono i seguenti, in cui il sistema di riferimento y è un sistema di ascisse:

a) La $f(x)$ è lineare ed intera $y = ax + b$; si ottiene la *scala uniforme o metrica*.

b) La $f(x)$ è lineare fratta $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; si ottiene la *scala proiettiva*.

c) La funzione è $y = \log x$; si ottiene la *scala logaritmica*.

6. - Scale funzionali curvilinee a sostegno razionale.

Sia A l'intero campo reale e C una curva razionale ⁽⁶⁾, data mediante le sue equazioni parametriche in un sistema cartesiano ortogonale X, Y :

$$X = X(t) \quad , \quad Y = Y(t).$$

La funzione da considerare sia $y = f(x)$, definita in un certo intervallo $I = (a \dashv b)$.

(⁴) In relazione al significato di x . Di solito x è la *misura* di una quantità fisica. Converrà allora segnare le quote corrispondenti a multipli e sottomultipli convenienti della unità di misura, tenendo conto della precisione grafica e della possibilità di interpolare a vista con una certa esattezza.

(⁵) Ad es. avendo preventivamente costruito una tabella della funzione $f(x)$, oppure sfruttando una costruzione geometrica sistematica che permetta di costruire graficamente il punto di coordinata y data la sua quota x .

(⁶) Come nel caso delle scale rettilinee conviene considerare anche i punti impropri della curva C (Cfr. nota (²)).

Anzitutto scegliamo su C un sistema di riferimento, prendendo su di essa come coordinata del punto corrente il parametro t o più in generale una qualsiasi sua trasformata proiettiva τ . Si possono così far corrispondere ai valori di un intervallo contenuto in I i punti di un arco prescelto della curva data. Più precisamente a tre valori assegnati di x si possono far corrispondere tre punti dati. Dopo di che si procede come per la costruzione della scala rettilinea, assumendo come quota del punto τ il valore di x tale che sia $f(x) = \tau$.

7. — Nomogrammi a punti dipendenti e corrispondenza tra i sostegni delle scale.

Dalle considerazioni precedenti risulta eliminata l'artificiosa nozione di « modulo » ¹⁾, in quanto che la scelta del modulo non è che un particolare della scelta del sistema di riferimento sul sostegno della scala.

L'opportunità di presupporre sulla retta un riferimento proiettivo, ancorchè i sistemi di misura grafica che si usano in pratica siano metrici, risulta dalla convenienza che si renderà sempre più manifesta col procedere dell'esposizione di basare lo studio dei nomogrammi a punti allineati su quello delle corrispondenze generate tra i sostegni dall'allineamento.

In altre parole la costruzione di un nomogramma a punti allineati e più in generale a *punti dipendenti* (nel senso che i punti corrispondenti delle varie scale appartengano ad una curva variabile in un sistema ∞^r ; cfr. n. 20) non è altro che la interpretazione di un sistema di equazioni in n variabili come equazioni di una corrispondenza tra i sostegni di un certo numero di scale funzionali. D'altra parte si cerca non già di costruire un tipo diverso di nomogramma per ogni legame funzionale, ma piuttosto di ricondurre il maggior numero possibile di legami funzionali diversi allo stesso tipo di rappresentazione nomografica.

Fissato quindi il tipo del nomogramma a punti dipendenti rimane fissato il tipo della corrispondenza tra i sostegni delle scale. Ora lo studio di tali tipi di corrispondenze ad es. tra rette o tra curve razionali è stato già fatto o sarà opportuno farlo dal punto di vista della geometria proiettiva, classificandole sia di fronte alle

trasformazioni proiettive reali dei sostegni, sia di fronte alle trasformazioni proiettive reali del piano.

Di qui in particolare l'opportunità di un riferimento proiettivo anzichè metrico e più in generale l'opportunità di basare la nomografia a punti dipendenti oltre che sullo studio dei legami funzionali in questione, anzitutto sullo studio delle corrispondenze relative, in quanto la loro classificazione fornirà utili indicazioni sul tipo più generale di legame funzionale suscettibile di una data interpretazione nomografica e (dato un legame funzionale siffatto) suggerirà gli accorgimenti necessari per la costruzione delle relative scale.

CAPITOLO PRIMO

Nomogrammi a tre scale rettilinee, a punti allineati

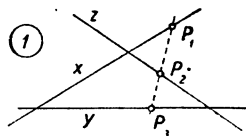
8. - Generalità.

Rimandando al capitolo II (n. 19) un'analisi più dettagliata del concetto generale di nomogramma a punti allineati, converrà qui precisare che cosa s'intende per "*nomogramma a punti allineati, a tre scale rettilinee*", di una equazione

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

È una rappresentazione grafica delle sue soluzioni ottenuta distendendo le tre variabili α, β, γ rispettivamente su tre rette (in generale distinte: i «*supporti*» x, y, z delle «*scales*»), per modo che i punti P_1, P_2, P_3 immagini di tre valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ costituenti una soluzione della $F=0$ risultino allineati, e viceversa tre punti allineati (uno per ciascuna scala) corrispondano a valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ soluzioni di $F=0$.

La corrispondenza che si ottiene fra i tre sostegni (dove supponiamo siano fissati tre sistemi di coordinate proiettive x, y, z) associando tre punti P_1, P_2, P_3 appartenenti alla stessa retta (fig. 1) è com'è noto una corrispondenza trilineare (allineata), parabolica od iperbolica a seconda che le tre rette date passino o no per un medesimo punto, in particolare semplicemente degenerare se due delle scale hanno lo stesso sostegno ⁽¹⁾.



D'altra parte di fronte alle trasformazioni proiettive reali dei sostegni, tutte le trilinearità iperboliche o rispettivamente paraboliche od ugualmente degeneri sono fra loro equivalenti ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. T, nn. 64-67, pag. 70 e segg.

⁽²⁾ Cfr. T, n. 19, pag. 19; n. 46, pag. 50.

Ciò significa che data una corrispondenza trilineare di equazione (in coordinate omogenee):

$$(1) \quad \sum a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \quad (i, k, l = 1, 2),$$

dove le a_{ikl} sono costanti reali, se essa è tale che il suo discriminante ⁽³⁾ $\Delta(a)$ sia maggiore od uguale a zero, si può sempre scegliere la posizione ed il riferimento proiettivo dei sostegni in modo che la corrispondenza risulti allineata. Fa eccezione il caso che essa sia doppiamente degenera, che d'altronde non ha interesse nomografico.

Se $\Delta(a) > 0$ la posizione dei sostegni è arbitraria, colla condizione che non passino per un medesimo punto.

Se $\Delta(a) = 0$ i tre sostegni debbono passare per uno stesso punto (in particolare possono essere paralleli), e due di essi debbono coincidere se la trilinearità è semplicemente degenera.

La scelta del riferimento proiettivo dei sostegni è legata alla considerazione dei punti singolari della corrispondenza ⁽⁴⁾, che nel caso della trilinearità allineata debbono necessariamente cadere nei punti d'intersezione dei sostegni, ed è vincolata dalla condizione ulteriore (necessaria e sufficiente perchè tutte le terne di punti corrispondenti risultino allineate ⁽⁵⁾) che:

se $\Delta(a) > 0$ risultino allineati i punti di unaterna generica (non contenente gli elementi singolari);

se $\Delta(a) = 0$ risultino allineati gli elementi di tre terne generiche, in particolare quelle di una sestupla associata ⁽⁶⁾;

infine, se la (1) è semplicemente degenera, che la proiettività fondamentale si riduca all'identità ed il punto fondamentale della terza scala cada nell'intersezione col sostegno comune delle altre due.

9. - Scelta del riferimento nel caso iperbolico.

Sia $\Delta(a) > 0$. Determiniamo ⁽⁷⁾ le coordinate $r' \ r'' \ s' \ s''$

(3) Cfr. T, n. 12, pag. 11.

(4) Cfr. T, n. 11, pag. 10.

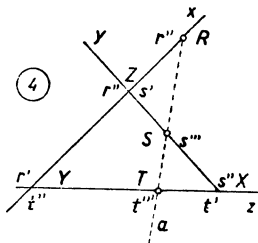
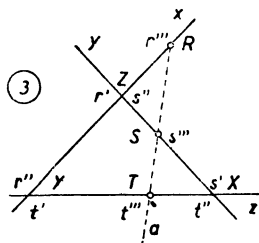
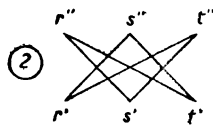
(5) Cfr. T, n. 66, pag. 73.

(6) Cfr. T, n. 47, pag. 50.

(7) Cfr. T, nn. 10-12, pag. 9. 11.

t' t'' dei punti singolari e supponiamo di aver scelto le notazioni in modo che essi si accoppino secondo lo schema della fig. 2.

Siano inoltre r''' s''' t''' le coordinate di una terna di punti corrispondenti. Allora il riferimento sui tre sostegni deve essere preso in una delle due maniere indicate negli schemi delle fig. 3-4:



Rimangono arbitrarie le posizioni della retta $a = (R, S, T)$ e delle tre scale.

Di tale arbitrarietà conviene di solito approfittare per:

- a) scegliere due delle scale parallele ed a distanza opportuna;
- b) giustapporre gli intervalli utili ⁽⁸⁾ delle relative graduazioni;
- c) disporre le scale in modo da diminuire gli errori grafici di intersezione con la retta «indice» a ;
- d) dilatare gli intervalli utili delle tre scale allo scopo di rendere più facile e precisa la lettura.

Questi accorgimenti evidentemente vanno studiati caso per caso.

10. - Osservazione.

Se nel riferimento persistente sui tre sostegni le coordinate omogenee dei punti $X Y Z R S T$ (fig. 3-4) erano rispettivamente:

⁽⁸⁾ Cioè quelli in cui si prevede oscilleranno le variabili α, β, γ in relazione all'impiego previsto del nomogramma. Non hanno perciò di solito relazione con gli intervalli di definizione delle (2) n. 11 se non in quanto vi sono sempre contenuti.

$$\rho'_1 \rho'_2 \quad \rho''_1 \rho''_2 \quad \rho'''_1 \rho'''_2 \quad , \quad \sigma'_1 \sigma'_2 \quad \sigma''_1 \sigma''_2 \quad \sigma'''_1 \sigma'''_2 \quad , \quad \tau'_1 \tau'_2 \quad \tau''_1 \tau''_2 \quad \tau'''_1 \tau'''_2$$

le relazioni bilineari che fanno passare dai vecchi riferimenti $\xi \eta \zeta$ ai nuovi $x y z$ sono ovviamente del tipo:

$$\begin{vmatrix} x_1 \xi_1 & x_1 \xi_2 & x_2 \xi_1 & x_2 \xi_2 \\ r'_1 \rho'_1 & r'_1 \rho'_2 & r'_2 \rho'_1 & r'_2 \rho'_2 \\ r''_1 \rho''_1 & r''_1 \rho''_2 & r''_2 \rho''_1 & r''_2 \rho''_2 \\ r'''_1 \rho'''_1 & r'''_1 \rho'''_2 & r'''_2 \rho'''_1 & r'''_2 \rho'''_2 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

dove $\frac{r'_1}{r'_2} = r'$, ecc..

11. - Tipo generale dell'equazione a nomogramma iperbolico.

Da quanto precede consegue che possono essere rappresentate mediante un nomogramma a punti allineati, a tre scale rettilinee non concorrenti, tutte e sole le equazioni $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ in tre variabili $\alpha \beta \gamma$ riducibili al tipo (1), quando il discriminante della (1) è positivo ⁽⁹⁾ e dove:

$$(2) \quad x = \frac{x_1}{x_2} = f(\alpha) \quad , \quad y = \frac{y_1}{y_2} = \varphi(\beta) \quad , \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \psi(\gamma) \quad ,$$

sono rami univalenti (nella stessa accezione del numero 4) di funzioni reali delle variabili α, β, γ , definite in opportuni ⁽¹⁰⁾ intervalli del campo reale.

Scelti i sostegni e su di essi il riferimento nella maniera più opportuna, seguendo il procedimento già descritto, le (2) forniscono le graduazioni delle scale.

⁽⁹⁾ Cfr. E, n. 15, pag. 30. D'OCAGNE chiama di «*genere*» zero i nomogrammi a punti allineati e con le tre scale rettilinee comunque disposte nel piano (cfr. E, n. 14, pag. 29). Una equazione $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ che mediante le (2) possa scriversi sotto la forma (1) è da lui chiamata con SOREAU «*nomograficamente razionale*» e di «*ordine nomografico*» tre (E, n. 7, pag. 13).

⁽¹⁰⁾ Uno di essi è determinato dagli altri due e dalla $F = 0$.

12. - Esempi.

Se:

$$(3) \quad f(\alpha) \equiv \alpha \quad , \quad \varphi(\beta) \equiv \beta \quad , \quad \psi(\gamma) \equiv \gamma \quad ,$$

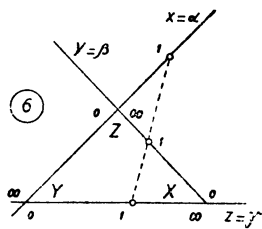
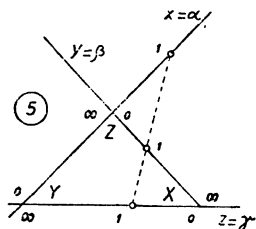
ed:

$$(4) \quad F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha\beta\gamma - 1 \quad ,$$

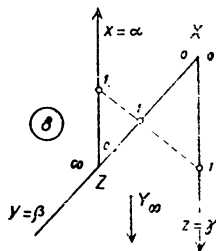
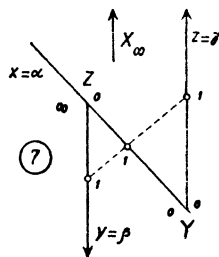
oppure:

$$(5) \quad F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha\beta - \gamma \quad ,$$

la equazione della corrispondenza associata assume la forma canonica $x y z = 1$, oppure $x y = z$, e lo schema del nomogramma relativo per la (4) è uno dei due delle fig. 5-6:



Per la (5) è uno dei due che si ottengono da questi scambiando nel riferimento della scala delle z lo zero con l'infinito. In tal caso conviene scegliere due scale parallele (fig. 7-8) per modo che su di esse le coordinate proiettive divengano ascisse.



Il riferimento proiettivo sulla terza scala può ottenersi rispettivamente:

a) proiettando dal punto unità dell'asse y il riferimento metrico dell'asse z ;

b) proiettando dal punto unità dell'asse x il riferimento metrico dell'asse z .

13. - Caso parabolico. Accenno al caso che la trilinearità sia semplicemente degenera. Scelta del riferimento.

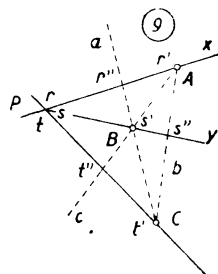
Determinati gli elementi singolari ⁽¹¹⁾ $r s t$ e quelli principali e secondari di una sestupla associata (6) $r' s' t', r'' s'' t''$, il riferimento sui tre sostegni deve essere scelto come è indicato nella fig. 9, rimanendo arbitraria la posizione delle scale (purchè concorrenti in un punto P) e quella delle rette $a b c$ (purchè i loro punti di intersezione $A B C$ cadano rispettivamente sugli assi $x y z$).

Di tale arbitrarietà si approfitterà anche ora per:

- a) scegliere eventualmente le tre scale parallele ed alla distanza più conveniente una dall'altra;
- b) giustaporre gli intervalli utili delle rispettive graduazioni;
- c) dilatare gli intervalli utili delle scale, in modo da rendere più facile e precisa la lettura e da diminuire gli errori grafici.

Come prima (n. 10) si procede per passare dal riferimento preesistente a quello occorrente per la graduazione delle scale.

Infine se la (1) è semplicemente degenera e la proiettività fondamentale intercede fra y e z , il riferimento su una di esse y è arbitrario, nell'altra (il cui sostegno z deve coincidere con y) è determinato, dovendo ad es. nei punti fondamentali di y cadere i tre loro omologhi $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ nella proiettività fondamentale. La terza scala x ha posizione e riferimento generici, purchè al



(11) Come nel caso iperbolico. Cfr. T, I. c. in (7).

punto di intersezione col sostegno delle altre due competa la coordinata x_0 dell'elemento singolare.

È evidente che in questo caso basta per la rappresentazione nomografica costruire la scala funzionale della proiettività che lega y e z , non occorrendo affatto segnare la scala delle x .

14. - Tipo generale delle equazioni relative.

Sono pertanto suscettibili di rappresentazione mediante un nomogramma a punti allineati ed a scale rettilinee e concorrenti tutte e sole le equazioni (*) $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ in tre variabili α, β, γ , riducibili al tipo (1), quando il discriminante $\Delta(\alpha)$ della (1) è nullo, purchè la trilinearità (1) non sia doppiamente degenerare, e dove come al n. 11 x, y, z son legati ad α, β, γ dalle (3), che conservano il loro significato.

Anche ora scelti i sostegni e su di essi il riferimento seguendo il procedimento testè descritto, le (3) forniscono la graduazione delle scale.

15. - Esempio.

Sia:

$$(6) \quad F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv a\alpha + b\beta + c\gamma;$$

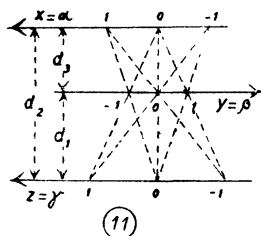
posto $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$, la equazione della corrispondenza assume la forma:

$$(6') \quad ax + by + cz = 0.$$

Punti singolari sono i punti ∞ del riferimento, per modo che prese le scale parallele su di esse x, y, z hanno significato di ascisse. Inoltre alla corrispondenza appartiene la sestupla associata con gli elementi principali in $0, -\frac{1}{b}, 0$ e quelli secon-

dari in $\frac{1}{a}$, 0 , $\frac{1}{c}$ (12). Pertanto lo schema del nomogramma è quello della fig. 10.

Apparentemente esso non rispecchia la simmetria della (6), ma diviene simmetrico appena si segnino sulle scale anche i punti $x = -\frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = -\frac{1}{c}$



e si mettano in evidenza le terne formate da essi e dai punti già considerati. Così per $a = b = c = 1$ si ha lo schema della fig. 11.

In questo caso supponiamo un preesistente comune riferimento metrico delle tre scale ad es. in millimetri (come accade se esse son tracciate su di un

foglio di carta millimetrata parallelamente ad uno dei lati della quadrettatura, di cui l'altro lato sia parallelo ad AC) con i versi concordi a quelli segnati sulla figura. Allora le misure assolute λ , μ , ν in mm. dei segmenti unitari (i moduli delle graduazioni) sono legate alle mutue distanze d_1 d_2 d_3 delle scale ($d_1 + d_3 = d_2$) dalla relazione di proporzionalità:

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3},$$

che fornisce una comoda indicazione per la scelta delle mutue distanze delle scale in base all'ampiezza degli intervalli utili delle graduazioni.

16. - Osservazione.

L'esempio precedente acquista un particolare significato qualora si pensi che il nomogramma relativo è suscettibile di

(12) In T a pag. 49, 5-ultima riga, si deve leggere:

«... ad es. del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = a_{122} x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_1 = a_{212} y_1 \\ y'_2 = y_2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} z'_1 = a_{221} z_1 \\ z'_2 = z_2 \end{array} \right\}, \dots$$

rappresentare, entro certi limiti dipendenti dal grado di approssimazione che si desidera (ossia considerando come intervalli utili opportuni intorno del punto 0 delle tre scale), qualsiasi legame funzionale fra tre variabili α , β , γ , purchè esso soddisfi ai seguenti requisiti:

a) sia definito implicitamente da una equazione:

$$(7) \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

b) sia $F(0, 0, 0) = 0$. A questo caso si riconduce l'altro più generale in cui $F(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 0$, con le posizioni:

$$\alpha' = \alpha - \alpha_0, \quad \beta' = \beta - \beta_0, \quad \gamma' = \gamma - \gamma_0;$$

c) la $F(\alpha, \beta, \gamma)$ sia sviluppabile in serie di MAC-LAURIN in un intorno del punto $(0, 0, 0)$.

Allora infatti a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad α , β , γ ⁽¹³⁾ si può ritenere sia soddisfatta la (6) in un intorno del punto $(0, 0, 0)$, essendo:

$$a = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{000}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial \beta} \Big|_{000}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial \gamma} \Big|_{000}.$$

17. - Altro esempio.

Sia:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha + \beta + \gamma - 1.$$

Posto $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, la equazione della corrispondenza associata diviene:

$$x + y + z = 1$$

Anche ora ⁽¹⁴⁾ gli elementi singolari sono impropri, per modo che conviene scegliere le scale parallele, e su di esse le

⁽¹³⁾ Supposti α , β , γ dello stesso ordine, com'è lecito in prima approssimazione.

⁽¹⁴⁾ Cfr. T. n. 47, pag. 50.

coordinate hanno il significato di ascisse. Inoltre alla trilinearità appartiene la sestupla associata con gli elementi principali nel punto O dei riferimenti e gli elementi secondari nei punti unità. Lo schema del nomogramma relativo è pertanto quello della fig. 12. Tra le mutue distanze delle scale ed i moduli delle graduazioni intercedono le stesse relazioni già considerate per lo schema della fig. 11.

CAPITOLO SECONDO

Abachi a curve concorrenti e nomogrammi a punti dipendenti.

13. — Definizione di abaco a curve concorrenti.

Rimandando ai capitoli successivi l'esame di altri tipi di nomogrammi a punti allineati con quattro o più scale rettilinee andiamo ora a rivedere, confrontare ed eventualmente ampliare alcuni concetti già noti.

Un abaco del tipo più generale ⁽¹⁾ a curve concorrenti, immagine di una equazione in tre variabili α, β, γ :

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 ,$$

si ottiene così procedendo (fig. 13):

I) Si considerino tre sistemi ∞^1 di curve piane $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$, di parametri $x y z$, tali che in una certa regione R del piano per un punto P passi un numero finito di curve di ciascun sistema, tra quelle circoscritte dalle limitazioni relative ai parametri ⁽²⁾:

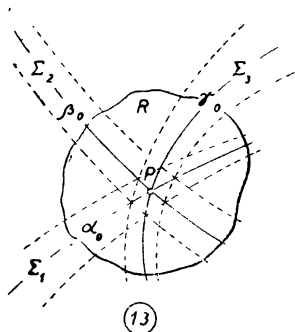
$$(2) \quad x_1 \leq x \leq x_2 , \quad y_1 \leq y \leq y_2 , \quad z_1 \leq z \leq z_2 ;$$

II) In questi intervalli $x y z$ siano funzioni reali univalenti nel senso del n. 4 delle variabili reali α, β, γ :

$$(3) \quad x = f(\alpha) , \quad y = \varphi(\beta) \quad z = \phi(\gamma) ;$$

() Cfr. E, n. 9, pag. 14.

⁽²⁾ Dalla condizione II) risulta che di tali limitazioni la terza è conseguenza delle prime due per tramite della (1) e delle inverse delle (3).



III) Le (3) siano tali che la dipendenza tra α, β, γ espressa dalla (1) si traduca geometricamente nel passaggio per uno stesso punto P di R di tre curve le cui quote $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ soddisfino alla (1).

I tre sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ possono anche coincidere in un unico sistema Σ , nel quale x, y, z sono tre riferimenti in generale diversi, ma che in particolare possono essere anche loro parzialmente o totalmente coincidenti. In quest'ultimo caso la corrispondenza tra i parametri x, y, z di tre curve concorrenti è simmetrica (3).

Ad un abaco dello stesso tipo si perviene:

a) Cambiando il riferimento su $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ covariantemente rispetto alle (1), (3) ed alla condizione di passaggio per un punto.

b) Trasformando il piano punteggiato dell'abaco in un altro piano punteggiato, per modo che ad R corrisponda una certa regione R' .

La modalità b) comprende la a), giacchè se ad es. $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono distinti e per un punto P di R passa una sola curva di ciascun sistema, pensate x, y, z come coordinate curvilinee (sovrabbondanti e perciò legate dalla relazione $\bar{F}(x, y, z) = 0$ che si ottiene sostituendo nella (1) le funzioni inverse delle (3)), ogni cambiamento del riferimento può anche pensarsi come una corrispondenza tra R ed un'altra regione R' . Linee coordinate rimangono in questo caso sempre quelle dei sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, mentre in generale la trasformazione b) cambia addirittura la natura dei sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, potendo in particolare trasformatli in un unico sistema Σ .

L'anamorforesi rettilinea di LALANNE (cfr. nn. 1, 25) è appunto un caso particolare della trasformazione b), in cui Σ_1 e Σ_2 rimangono immutati, mentre cambia sostanzialmente il sistema Σ_3 .

(3) Se Σ è algebrico e di ordine n tale corrispondenza simmetrica e di indici $[n-2, n-2, n-2]$ è associata alla g_n^2 dei gruppi di curve Σ per un punto generico del piano (assieme all'identità e ad ∞^1 corrispondenze degeneri che si ottengono ad es. associando al parametro $x = y$ di una curva γ di Σ i gruppi di quelli $z_2, \dots, z_n$ delle curve di Σ per un punto generico di γ).

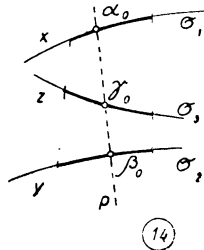
19. - Definizione di nomogramma a punti allineati.

Analogamente si perviene alla nozione generale di nomogramma ⁽⁴⁾ a punti allineati:

I, II) Siano $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ tre curve piane (ad es. razionali), sulle quali $x y z$ sono rispettivamente i parametri del punto corrente, legati ad α, β, γ dalle (3) (fig. 14).

III) Nell'intorno di un punto $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ [$F(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0) = 0$] in cui la (1) definisce il legame funzionale tra α, β, γ , tale legame si traduca per tramite delle (3) nella condizione di allineamento dei tre punti di $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ corrispondenti a tre valori di α, β, γ soddisfacenti alla (1).

La eventuale condizione che per un punto P di R passi una sola curva di $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ tra quelle i cui i parametri soddisfano alle limitazioni (2) corrisponde al fatto che su ogni retta di allineamento ρ (fig. 14) si trovi un solo punto di $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ tra quelli corrispondenti a valori di $x y z$ soddisfacenti alle limitazioni (2).



Le tre curve $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ possono anche coincidere in un'unica curva σ_{123} (ad es. razionale) sulla quale $x y z$ sono tre riferimenti in generale diversi, ma che in particolare possono essere anche loro parzialmente o totalmente coincidenti. In quest'ultimo caso la corrispondenza tra i parametri $x y z$ di tre punti allineati è simmetrica ⁽⁵⁾.

Introdotta un sistema di coordinate proiettive sul piano del nomogramma, siano $x_1 : x_2 : x_3, y_1 : y_2 : y_3, z_1 : z_2 : z_3$ le coordinate omogenee del punto corrente su $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, funzioni rispettivamente di $x y z$. Allora la corrispondenza allineata fra le tre curve ha per equazione:

⁽⁴⁾ Cfr E, n. 18, pag. 37.

⁽⁵⁾ Se σ_{123} è algebrica e di ordine n tale corrispondenza simmetrica di indici $[n-2, n-2, n-2]$ è associata alla g^2 dei gruppi di punti tagliati su σ_{123} dalle rette del piano (assieme all'identità ed alle ∞^1 corrispondenze degeneri che si ottengono associando ad es. ad un punto $x = y$ di σ_{123} tutti i gruppi di punti $z_1, \dots, z_n$ tagliati su σ_{123} dalle rette del piano per $x = y$.

$$(1') \quad f(xyz) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi com'è noto ⁽⁴⁾ condizione necessaria e sufficiente perchè se ne possa costruire un nomogramma a punti allineati è che la F abbia la forma (1'), dove le x_i, y_k, z_l sono funzioni rispettivamente di α, β, γ per tramite delle (3). La scala relativa ad una variabile sarà rettilinea se una combinazione lineare degli elementi della riga corrispondente del determinante (1') è identicamente nulla rispetto a quella variabile. Sarà invece ad es. σ_1 una curva razionale di equazioni parametriche:

$$(A) \quad \rho x_1 = x_1(x), \quad \rho x_2 = x_2(x), \quad \rho x_3 = x_3(x),$$

se x_1, x_2, x_3 sono polinomi in x .

Inoltre σ_1 coincide ad es. con σ_2 se le equazioni:

$$(B) \quad \rho y_1 = y_1(y), \quad \rho y_2 = y_2(y), \quad \rho y_3 = y_3(y).$$

rappresentano la stessa curva σ_{12} rappresentata dalle (A).

Anche ora si perviene ad un nomogramma dello stesso tipo:

a) Cambiando il riferimento su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in modo però che per tramite della (3) la (1) equivalga sempre alla condizione di allineamento di tre punti.

b) Trasformando il piano rigato in un altro piano rigato, in modo che all'insieme ∞^2 delle rette p corrisponda un insieme ∞^2 di rette ed a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tre curve $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ distinte o coincidenti. Tra gli archi utili la corrispondenza deve potersi rendere biunivoca, restringendosi eventualmente a considerarne solo tratti opportuni.

In particolare in a) rientra la trasformazione proiettiva del riferimento su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, quando queste son curve razionali; in b) rientra la trasformazione proiettiva del piano.

20. - Nomogrammi di tipo più generale, a punti dipendenti.

Dalle considerazioni precedenti risulta chiaramente come da un nomogramma a punti allineati si possa passare ad un nomogramma « *a punti dipendenti* », con uno dei due procedimenti seguenti, che generalizzano quelli descritti in *a)*, *b)* e quindi in particolare generalizzano l'anamorfosi di LALANNE:

A) Cambiando il riferimento su $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ in modo che per tramite delle (3) la (1) equivalga alla condizione perchè tre punti appartengono ad una stessa curva « *indice* », variabile in un sistema ∞^2 .

B) Trasformando il piano del nomogramma in un altro piano, in modo che all'insieme descritto dalla retta p nella rete delle rette corrisponda un sistema ∞^2 di curve, ed a $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ tre curve (distinte o coincidenti) $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$.

Siamo così implicitamente venuti a definire che cosa intendiamo per « *nomogramma a punti dipendenti* » per le equazioni del tipo (1).

Ma è chiaro che con un nomogramma a punti dipendenti possono interpretarsi anche equazioni con un numero qualunque di variabili, del tipo:

$$(4) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta) = 0.$$

E ciò a prescindere dalla loro utilità pratica, dipendente dalla facilità con cui si possa costruire la curva indice.

Le rispettive scale abbiano per sostegni n curve $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ ad es. razionali (in particolare rette) del piano, sulle quali le graduazioni si ottengono ponendo in corrispondenza biunivoca entro opportuni intervalli i valori dei parametri $x, y, z, \dots, t$ con $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ mediante le relazioni funzionali:

$$(5) \quad x = f(\alpha), \quad y = \varphi(\beta), \quad z = \psi(\gamma), \quad \dots, \quad t = \chi(\delta).$$

Perchè sia possibile costruire il nomogramma occorre e basta che mediante le (5) la (4) si muti in una equazione:

$$(6) \quad f(x, y, z, \dots, t) = 0.$$

che rappresenti la corrispondenza che si ottiene tra $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ segandole con le curve di un sistema $\infty^{n-1} \Lambda$ di curve piane, tali che entro gli intervalli utili ogni scala sia tagliata in un numero finito di punti dalle curve di Λ .

Come caso particolare rientrano in questa categoria gli abachi ad allineamento multiplo ed a cerniere e scale rettilinee (v. n. 35). Per essi le curve di Λ si spezzano in un certo numero di rette che si intersecano su rette fisse.

21. - Osservazioni ed esempio.

Nel caso dei nomogrammi a punti allineati la eventualità che ad es. σ_1 e σ_2 (e addirittura anche σ_3) coincidano è interessante solo quando σ_{12} non è una retta, mentre può esserlo anche in questa circostanza in un nomogramma a punti dipendenti la cui linea indice non sia retta.

Sia nel caso di tre come in quello di più variabili, fissato il tipo del nomogramma (cioè la natura e gli eventuali legami grafici delle scale, il tipo del loro riferimento e quello del sistema Λ delle curve indici), risulterà corrispondentemente fissato il tipo della equazione (6) della corrispondenza e quindi per tramite delle (5) il tipo più generale di equazione (4) suscettibile di tale rappresentazione nomografica.

Così, fissando solo il sistema Λ delle curve indici (cerchi del piano), con le stesse notazioni del n. 19 e convenzioni analoghe si ha ad es. che la forma generale delle equazioni in quattro variabili $F(\alpha \beta \gamma \delta) = 0$ rappresentabili con un nomogramma a punti in circolo è:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 \\ y_1^2 + y_2^2 & y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 \\ z_1^2 + z_2^2 & z_1 z_3 & z_2 z_3 & z_3^2 \\ t_1^2 + t_2^2 & t_1 t_3 & t_2 t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare la scala delle α sarà rettilinea se:

$$a x_1(\alpha) + b x_2(\alpha) + c x_3(\alpha) \equiv 0;$$

più in generale sarà razionale se la composizione delle funzioni

x_i per tramite della $x = x(\alpha)$ è tale che le x , siano dei polinomi in α .

Naturalmente in pratica non è facile riconoscere se il primo membro di una equazione nota possa mettersi sotto forma di un dato determinante.

Già per i nomogrammi ad allineamento in tre variabili (il problema è stato risolto da GRONWALL ⁽⁶⁾) si incontrano notevoli difficoltà.

Convieni fissare anche la natura delle scale e su di esse il tipo del riferimento, perchè il problema si particolarizzi ancora. Ad es. nel Cap. I le scale si suppongono rettilinee, e su di esse il riferimento proiettivo.

In generale accadrà che una medesima equazione sia suscettibile di più interpretazioni nomografiche.

Così ad es. prendendo come sostegni delle scale tre rette distinte; una retta ed una conica; od una medesima cubica piana razionale ed assumendo sulle scale il riferimento come specificato al n. 6, la corrispondenza generata dall'allineamento tra i sostegni $x y z$ è sempre una trilinearità reale, che può essere parabola od iperbolica nel primo caso, *anche ellittica* nel secondo e nel terzo ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ Cfr. E, pag. 39.

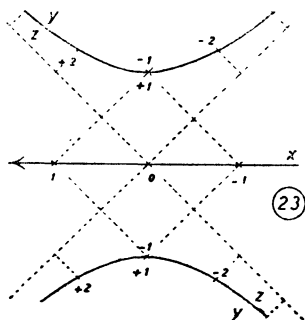
⁽⁷⁾ Cfr. A, pag. 390. Ad es. per la trilinearità ellittica di equazione:

$$x y + y z + z x = 1$$

in cui gli elementi singolari calano su ciascuna forma nei punti di coordinate $\pm i$ ed in cui si corrispondono i tre elementi α del riferimento (Cfr. T, pag. 32), la fig. 23 fornisce uno schema di nomogramma conico-lineare. Come sostegno della scala delle x si è preso l'asse non trasverso di un'iperbole equilatera, sostegno comune delle altre due scale. La figura dimostra come sono stati scelti i riferimenti per far sì che la trilinearità risulti allineata e le coordinate x ascisse.

In generale data una trilinearità per costruirne un nomogramma conico-lineare basta:

1. - Esaminarne il discriminante per



Anche per un nomogramma a punti dipendenti avrà luogo la considerazione di due procedimenti analoghi a quelli descritti in A) B) al n. 20, che permettono di ottenere altri tipi di nomogrammi per lo stesso tipo di equazione.

22. - Rappresentazioni nomografiche «equivalenti».

Ritorniamo alla considerazione di una equazione del tipo (1) che sia interpretabile mediante le (3) con un nomogramma a punti allineati ed a scale rettilinee. Conosciamo il tipo generale (cfr. nn. 8, 11) delle equazioni suscettibili di tale interpretazione nomografica per un riferimento proiettivo delle scale. Mediante

riconoscere se sia parabolica, iperbolica od ellittica e determinare le coordinate degli elementi singolari.

2. - Scegliere ad arbitrio la retta e la conica, purchè siano rispettivamente tangenti, secanti o non secanti a seconda che la trilinearità è parabolica, iperbolica od ellittica.

3. - Scegliere sulla retta e sulla conica un riferimento proiettivo reale, e determinare nei riferimenti suddetti le coordinate dei punti di intersezione.

Quindi su ciascuna scala occorre scegliere un nuovo riferimento ponendo nei punti di intersezione le coordinate degli elementi singolari, con le opportune cautele perchè nel caso ellittico od iperbolico si accoppino convenientemente (cfr. cap. I, per le scale rettilinee). Dopodichè:

A) Nel caso ellittico ed iperbolico basta determinare le coordinate dei tre elementi di una terna e fissare definitivamente il nuovo riferimento sulle tre scale in modo che gli elementi aventi quelle coordinate risultino allineati.

B) Nel caso parabolico basta determinare i sei elementi di una sestupla associata e fissare definitivamente il nuovo riferimento sulle tre scale in modo che le tre terne relative risultino allineate (cfr. cap. I, n. 13).

Delle arbitrarietà consentite nella scelta dei supporti delle scale e su di esse del riferimento si appropiterà come al solito per rendere quanto più possibile pratici e precisi la costruzione e l'uso del nomogramma.

Nel caso ellittico si deve ricorrere ad una trasformazione di coordinate determinata (su ciascuna scala) da tre coppie di punti corrispondenti di cui le prime due immaginarie e coniugate. Ma poichè a calcoli fatti i coefficienti della trasformazione lineare risultano reali, ciò non porta alcun inconveniente.

Analogamente si procede per la costruzione di un nomogramma cubico (cioè con le scale sovrapposte ad una stessa cubica piana razionale, nodata, cuspidata o con un punto doppio isolato a seconda che la trilinearità è iperbolica, parabolica od ellittica).

uno dei procedimenti A), B) (o combinandoli opportunamente) si passi ad una rappresentazione nomografica di un tipo più generale, a punti dipendenti.

Sia G il gruppo di trasformazioni che dalla corrispondenza trilineare allineata fra le tre rette $\sigma_1(x) \sigma_2(y) \sigma_3(z)$ fa passare alla corrispondenza Γ relativa al nuovo tipo di nomogramma e tagliata su tre curve (ad es. razionali $\sigma'_1(x') \sigma'_2(y') \sigma'_3(z')$ da un sistema ∞^2 di curve Λ .

Tale nuova rappresentazione nomografica (tale tipo di nomogramma) si dirà « *equivalente* » a quella a punti allineati ed a scale rettilinee rispetto alle operazioni di G .

Le operazioni di G inducono su $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$ un tipo di riferimento $x y z$ tale che per esso equazione di Γ è la stessa (1) del n. 8.

Siano $x' y' z'$ i riferimenti più naturali di $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$, come il riferimento proiettivo delle scale lo è per i nomogrammi a punti allineati ed a scale rettilinee:

Sia G_1 il gruppo delle omografie del piano del primo nomogramma (che mutano le rette in rette subordinando una corrispondenza proiettiva fra i sostegni delle tre scale) di fronte al quale tutti i nomogrammi a punti allineati ed a scale rettilinee della nostra equazione sono equivalenti. Se G'_1 è il gruppo trasformato di G_1 rispetto a G , il riferimento più naturale $x' y' z'$ sarà quello che conserva il suo significato per le operazioni di G'_1 .

Per le operazioni di G sarà caratterizzato il tipo delle relazioni che legano $x y z$ ad $x' y' z'$:

$$(7) \quad g_1(xx') = 0, \quad g_2(yy') = 0, \quad g_3(zx') = 0.$$

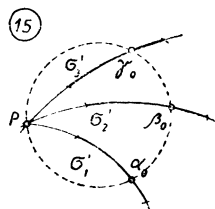
Eliminando $x y z$ tra le (7) e la $f(xy) = 0$ si avrà l'equazione della corrispondenza fra le scale del nuovo nomogramma: $\bar{f}(x' y' z') = 0$, e questa, quando $x' y' z'$ si pensino come funzioni di α, β, γ per tramite delle (7) e delle (3), fornirà il tipo più generale di equazione suscettibile della nuova rappresentazione nomografica per il riferimento $x' y' z'$.

23. - Esempi.

I) Sia G il gruppo delle omografie del piano. Un nomogramma a punti allineati si muta ancora in un nomogramma a punti allineati, le cui scale sono proiettivamente equivalenti alle scale date.

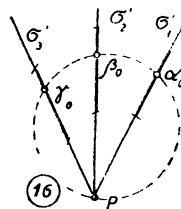
II) Si parta da un nomogramma a punti allineati ed a scale rettilinee non concorrenti. Sia G il gruppo delle trasformazioni quadratiche con due punti fondamentali fissi I, J . Allora si ottiene un nomogramma le cui scale hanno per supporto tre coniche per i due punti fissi I, J e per un terzo punto P . Il sistema degli indici è la rete delle coniche per I, J, P .

In particolare se I, J sono i punti ciclici G è il gruppo delle trasformazioni per raggi vettori reciproci, di fronte al quale risultano equivalenti i nomogrammi a punti allineati ed a scale rettilinee, ed i nomogrammi a scale circolari e punti in circolo, quando tanto il circolo indice quanto le scale passano per un medesimo punto P (fig. 15).



Se le scale rettilinee sono concorrenti, i cerchi sostegni delle tre nuove scale appartengono ad un fascio.

In particolare di fronte al gruppo delle trasformazioni per raggi vettori reciproci col polo nel punto di concorso delle scale, un nomogramma a punti allineati con le scale rettilinee e concorrenti è equivalente ad un nomogramma a scale rettilinee e concorrenti e punti in circolo, nel quale il circolo indice passi costantemente per il punto di concorso delle scale (fig. 16).



24. - Dualizzazione dell'abaco cartesiano.

Senza dubbio i nomogrammi a scale rettilinee ed a punti allineati sono i più pratici e i più precisi. Perciò, avendo trovato che una data equazione di tipo (1) è suscettibile di essere rappresentata mediante un nomogramma a punti dipendenti, sarà

opportuno cercare con gli accorgimenti di cui in A), B) al n. 20 di passare ad un nomogramma equivalente, ma a punti allineati e possibilmente a scale rettilinee.

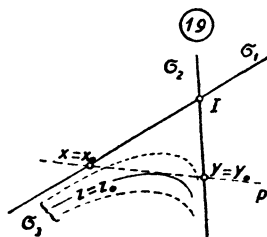
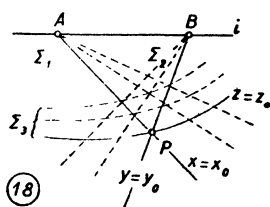
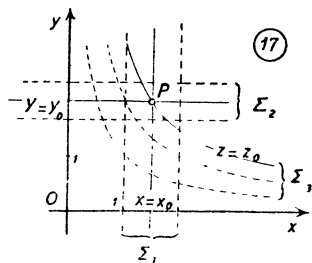
A tale scopo si può invertire il procedimento seguito nella seconda parte del n. 22, ma si possono fare anche le seguenti considerazioni partendo dallo schema dell'abaco cartesiano.

Con un abaco cartesiano si può interpretare nomograficamente qualunque equazione di tipo (1). Basta porre:

$$\alpha = x \quad \beta = y \quad \gamma = z,$$

pensare x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali, e proiettare nel piano xy le linee di livello della superficie $f(x, y, z) = 0$ (fig. 17) (*).

Mediante una reciprocità trasformiamo il piano π dell'abaco cartesiano nel piano π' , e siano σ_1 e σ_2 le punteggiate omologhe dei fasci Σ_1 e Σ_2 delle rette parallele agli assi. Su di esse x ed y conservano il significato di coordinate proiettive, mentre assumono quello di coordinate di retta nel piano π' . Alla retta impropria, che in ciascuno dei due fasci ha ∞ come coordinata corrisponde il punto di intersezione I di σ_1 e σ_2 . Perciò, preso I improprio



(*) Senza ledere la generalità possiamo supporre che $f = 0$ sia una equazione algebrica. Perchè ciò accada di solito basta scegliere opportunamente il legame funzionale tra x, y, z ed α, β, γ . Altrimenti, supposto che la $F(\alpha, \beta, \gamma)$ sia sviluppabile in serie di Taylor, basta porre al posto di F il polinomio in α, β, γ che si ottiene trascurando i termini di ordine abbastanza elevato del suo sviluppo (ed in pratica ciò si può sempre fare).

(σ_1 e σ_2 parallele), x ed y hanno su di esse significato di ascisse e nel piano quello di coordinate parallele di retta⁽⁸⁾. Al punto $P = (x, y)$ corrisponde la retta p che interseca σ_1 e σ_2 nei punti di ascisse x, y . Alla curva di equazione $f(x, y, z) = 0$ corrisponde l'involuppo che ha la stessa equazione (figg. 18, 19).

Quindi in generale trasformando per dualità un abaco del tipo cartesiano si ottiene un nomogramma di tipo misto, i cui sistemi quotati sono due punteggiate σ_1 e σ_2 ed un sistema ∞^1 di involuppi di rette, σ_3 . Sono corrispondenti il punto x di σ_1 , quello y di σ_2 e l'involuppo z cui appartiene la retta xy , nel senso che $f(x, y, z) = 0$.

Si ottiene in particolare un nomogramma a punti allineati quando ciascun involuppo z di σ_3 si riduce ad un certo numero di punti, di cui la curva luogo costituisce la terza scala.

25. - Problema di trasformazione. - Esempi.

Pertanto il problema della costruzione di un nomogramma a punti allineati per una equazione di cui si sappia costruire un abaco cartesiano può porsi in questi termini:

Determinare le trasformazioni:

a) del riferimento nei due fasci di rette Σ_1 e Σ_2 ,

b) del piano dell'abaco,

tali che nel complesso mutino Σ_1 e Σ_2 in due sistemi ∞^1 di rette e ciascuna curva di Σ_3 in un gruppo di rette.

Se è sufficiente solo la trasformazione del piano generata dalle trasformazioni a), si ricade nell'anamorfosi rettilinea e si ottiene un nomogramma a punti allineati con due scale rettilinee.

Così si perviene facilmente ad un nomogramma a punti allineati con due scale rettilinee quando Σ_3 è un sistema algebrico ∞^1 di coniche con due punti base nei centri A, B di Σ_1 e Σ_2 , che si possa pensare contenuto in una rete di coniche con due punti base in A, B . Basta riferire proiettivamente le coniche della rete alle rette del piano {trasformazione [2,1], razionale⁽⁹⁾}.

(⁸) purchè i relativi segmenti unità siano equipollenti (V. COMESSATI, *Lezioni*, II. p. 149). Cfr. E, nn. 3, 14.

(⁹) Cfr. ad es. F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Vol. I, (Bologna, Zanichelli, 1926), pag. 298.

Se la rete è omaloidica (cioè se c'è un terzo punto base), allora la trasformazione è birazionale (quadratica) e per ottenerla basta cambiare il riferimento proiettivo in Σ_1 e Σ_2 (10).

Ad es. nell'abaco per la moltiplicazione (11), rappresentativo della equazione:

$$xy = z,$$

Σ_1 è il fascio delle parallele all'asse y , di equazione $x = h$; Σ_2 è il fascio delle parallele all'asse x , di equazione $y = k$; Σ_3 è il fascio delle iperboli aventi per asintoti gli assi: $xy = l$ (fig. 20).

Σ_3 è contenuto con Σ_1 e Σ_2 nella rete:

$$axy + bx + c = 0$$

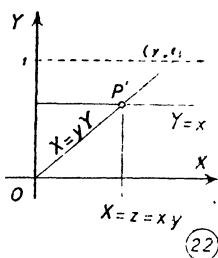
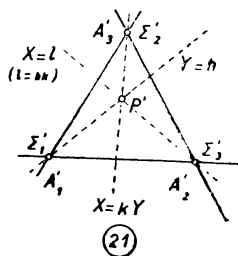
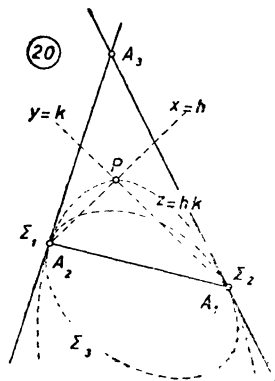
che riferiamo proiettivamente (per uguaglianza dei parametri) alla rete delle rette:

$$aX + bY + c = 0.$$

Tra i due piani nasce la trasformazione quadratica:

$$\begin{cases} X = xy \\ Y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = Y \\ y = \frac{X}{Y} \end{cases}$$

Quindi Σ'_1 è il fascio $Y = h$; Σ'_2 è il fascio $\frac{Y}{X} = k$; Σ'_3 è il fascio $X = l$ (figg. 21, 22).



(10) Cfr. ad es. SEVERI, l. c., pagg. 303, 308 (generazione di SKYDREWITZ), oppure E. BERTINI, *Complementi di Geometria Proiettiva*, (Bologna. Zanichelli, 1927), pagg. 179 e segg.

(11) Cfr. A, n. 51, pag. 365.

Per costruire un nomogramma a punti allineati ed a scale rettilinee basta passare con una reciprocità dal piano π' ad un altro piano π'' (cfr. n. 12). Naturalmente in questo caso conviene addirittura applicare i procedimenti del cap. I.

Più in generale supponiamo che della equazione considerata si sia costruito un abaco a curve concorrenti algebriche, che possiamo supporre del medesimo ordine n (basta perciò aggiungere alle curve dei sistemi dati una parte fissa). Perchè la stessa equazione si possa rappresentare mediante un nomogramma a punti allineati è *sufficiente* che i tre sistemi quotati $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ appartengano ad una medesima rete.

Per ottenere il nomogramma basta allora considerare il piano immagine della rete in uno $S_N \left(N = \frac{n(n+3)}{2} \right)$ dove le curve algebriche di ordine n siano rappresentate proiettivamente dai punti. Su quel piano $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ hanno per immagini tre curve $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, e tre curve concorrenti dell'abaco hanno per immagine tre punti allineati, dovendò essi appartenere alla traccia dell'iperpiano rappresentativo della condizione di passaggio per quel punto.

CAPITOLO TERZO

Nomogrammi a punti allineati a quattro o più scale rettilinee

26. - Generalità. - Prodotto di prima specie di due trilinearità.

Si dice che il legame funzionale esistente fra quattro variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ed espresso da (almeno) due equazioni

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

è interpretabile con un «*nomogramma a punti allineati, a quattro scale rettilinee*» quando, distese opportunamente quelle variabili su quattro rette (in generale distinte: i «*sostegni*» x, y, z, t delle «*scale*»), la condizione di allineamento di quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 , scelti ciascuno su di una scala, equivale all'essere i valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ loro corrispondenti legati dalla relazione funzionale suddetta.

La corrispondenza che si ottiene fra tre dei quattro sostegni (dove supponiamo siano fissati quattro sistemi di coordinate proiettive x, y, z, t) associando tre punti appartenenti alla stessa retta è sempre una corrispondenza trilineare allineata, reale (Cap. I, n. 8). Pertanto le coordinate

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{y_1}{y_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \quad t = \frac{t_1}{t_2},$$

di quattro punti appartenenti alla stessa retta r dovranno soddisfare alle relazioni trilineari a coefficienti reali:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \Sigma d_{ikl} x_i y_k z_l = 0, \\
 (2) \quad & \Sigma c_{ikl} y_i z_k t_l = 0, \\
 (3) \quad & \Sigma b_{ikl} z_i t_k x_l = 0, \\
 (4) \quad & \Sigma a_{ikl} t_i x_k y_l = 0,
 \end{aligned}
 \qquad (i, k, l = 1, 2),$$

due qualunque delle quali son conseguenza delle due rimanenti, e tali che il loro discriminante $\Delta(a)$, $\Delta(b)$, $\Delta(c)$, $\Delta(d)$, sia maggiore od uguale a zero.

Ognuna di queste trilinearità può pensarsi come il « *prodotto* » di due delle rimanenti. Le quattro forme diconsi brevemente *trilineari*. Diremo « *di prima specie* » un tale prodotto di due trilinearità aventi due sostegni in comune.

Due trilinearità con due sostegni in comune danno luogo a due prodotti di prima specie, che *nel nostro caso* sono ancora due trilinearità.

27. - Condizioni necessarie e sufficienti perchè quattro rette siano trilineari.

Supponiamo il nomogramma già costruito, in modo che nessuna delle scale sia sovrapposta ad una delle rimanenti, ed esaminiamo due delle trilinearità indipendenti relative, ad es. la (1) e la (4). A seconda della diversa posizione delle scale possono darsi i seguenti casi essenzialmente distinti:

- a) sono entrambe iperboliche (fig. 24);
- b) una è parabolica, l'altra è iperbolica (fig. 26);
- c) sono entrambe paraboliche (fig. 27).

In ogni caso esse hanno, sui due sostegni comuni, *una coppia singolare in comune*, costituita da elementi reali.

Viceversa tale condizione è anche sufficiente perchè le trilinearità (1) e (4) – necessariamente non ellittiche – rappresentino la corrispondenza allineata tra i sostegni delle scale. Infatti basta scegliere sui sostegni delle scale il riferimento proiettivo come ora diremo (e ciò è sempre possibile) perchè la corrispondenza che ha per equazioni la (1) e la (4) risulti allineata. In particolare l'avere una coppia singolare in comune è perciò anche

condizione sufficiente perchè i due prodotti di prima specie delle due trilinearità considerate siano ancora trilinearità (allineate).

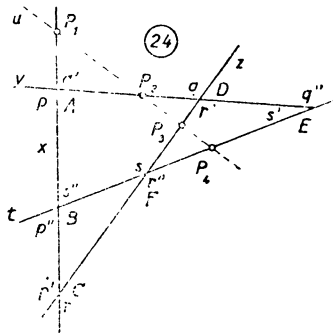
Distinguiamo i casi seguenti, supponendo dapprima che nè la (1) nè la (4) siano degeneri :

28. - Scelta del riferimento nel caso iperbolico-iperbolico.

a) *La (1) e la (4) sono iperboliche.*

Siano $p p' q q' r r'$ le coordinate degli elementi singolari della (1) rispettivamente su $x y z$; e siano $p p'' q' q'' s' s''$ quelle della (4) rispettivamente su $x y t$, così che sia $p q'$ la coppia singolare comune. Allora :

I) Se $p' \neq p''$, $q \neq q''$, la posizione delle scale è arbitraria e su di esse il riferimento è determinato, dovendo (perchè la (1) e la (4) risultino allineate) ai loro punti d'intersezione $A B C D E F$, che devono essere distinti (fig. 24), corrispondere rispettivamente su x, y, z, t le coordinate $p p'' p'$, $q' q q''$, $r r' r''$, $s'' s' s$, essendo s l'omologo di $p'' q''$ nella (1) ed r'' l'omologo di $p' e q'$ nella (4).



Quindi anche i due prodotti di prima specie della (1) e della (4) sono corrispondenze allineate, trilineari ed iperboliche. I loro elementi singolari cadono rispettivamente in $D E F$, $B C F$.

II) Se $p' = p''$ (oppure $q = q''$), allora le scale della t e della z devono concorrere in un punto della scala x ($B = C = F$).

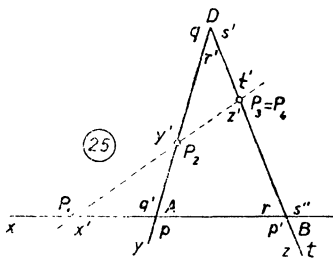
Il riferimento va scelto come prima attribuendo ai punti $A B D E$ rispettivamente le coordinate $p p'$, $q q' q''$, $r r'$, $s' s'$ e si determina ulteriormente sulle scale di $x z t$ attribuendo ai punti $P_1 P_3 P_4$ in cui una retta generica u incontra gli assi $x z t$, rispettivamente le coordinate $p'' r'' s$, essendo p'' arbitraria ed r'' , s determinate dalle (1), (4) per $x = p''$ $y = q''$, dove q'' è la coordinata della intersezione P_2 di u con l'asse y .

Dopo di che la corrispondenza posta tra le scale dalle (1), (4) risulta allineata. Quindi risultano trilineari ed allineati anche

i due prodotti di prima specie. Inoltre uno di essi (la (3), oppure se $q = q''$ la (2)) è una trilinearità parabolica. A prescindere da uno scambio di variabili questo caso non è perciò essenzialmente distinto da quello trattato al numero seguente in b) (fig. 26).

III) Se $p' = p''$, $q = q''$, allora le due scale z e t debbono essere sovrapposte, e la (2) e la (3) degenerano (semplicemente).

Nel riferimento ai punti d'intersezione $A B D$ dei tre sostegni delle quattro scale $x y z t$ (la cui posizione è arbitraria; fig. 25) debbono competere rispettivamente le coordinate $p p'$, $q' q$, $r r'$ ed $s'' s'$. Inoltre, scelte arbitrariamente le coordinate $x' y'$ di due punti generici P_1 e P_2 delle scale $x y$, al punto $P_3 = P_4$ intersezione della loro congiungente $u = (P_1 P_2)$ con $z = t$ devono corrispondere rispettivamente le coordinate:



$$z = \frac{z_1}{z_2} = z', \quad t = \frac{t_1}{t_2} = t'.$$

che si ricavano dalle (1), (4) per $x = \frac{x_1}{x_2} = x'$, $y = \frac{y_1}{y_2} = y'$.

29. - Scelta del riferimento nel caso parabolico-iperbolico.

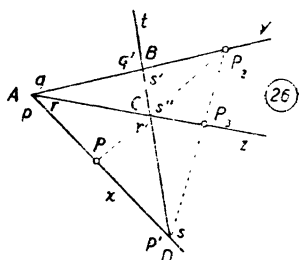
b) La (1) è parabolica, la (4) è iperbolica.

Siano $p q r$ le coordinate degli elementi singolari della (1) rispettivamente su $x y z$. Quelli della (4) avranno su $x y t$ rispettivamente per coordinate $p p' q q' s s'$ (coppia singolare comune la $p q$).

La posizione delle scale è arbitraria, purchè quelle delle $x y z$ concorrano in A , distinto da B, C, D (fig. 26).

Ad $A B D$ debbono competere rispettivamente le coordinate $p p'$, $q q'$, $r, s s'$ (su x, y, z, t). Al punto d'intersezione C di z e t deve competere su x la coordinata r' che si ricava dalla (1) per $x = p'$, $y = q'$.

Il riferimento si determina completamente sugli assi $x y z$ scegliendo su y arbitrariamente la coordinata y' di un punto generico P_2 ed attribuendo alle intersezioni P_1 e P_3 delle $P_2 C$, $P_2 D$ con gli assi x e z le coordinate x' e z' che si ottengono dalla (1) per $y = y'$ e rispettivamente $z = r'$, $x = p'$.



Infine sull'asse t al punto C deve competere la coordinata s'' che si ottiene dalla (4) per $x = x'$, $y = y'$.

Dopo di che la corrispondenza posta tra le scale dalla (1) e dalla (4) è allineata, ecc..

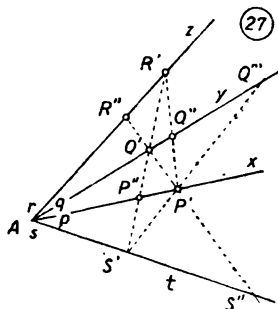
La (2) e la (3) risultano iperboliche.

30. - Scelta del riferimento nel caso parabolico-parabolico.

c) La (1) e la (4) sono paraboliche.

Siano $p q r$, $p q s$ le coordinate degli elementi singolari rispettivamente su $x y z$, $x y t$ ($p q$ è la coppia singolare comune). La posizione di tre delle scale, ad es. $x y z$, è arbitraria, purchè concorrenti in A (fig. 27).

Su di esse si possono scegliere arbitrariamente le coordinate $p' q' r'$ di tre punti $P' Q' R'$, dopo di che il riferimento è completamente individuato, dovendosi attribuire ai punti $P'' Q'' R''$ come coordinate $x y z$ i valori che per esse si ricavano dalla (1) rispettivamente per $y = q'$, $z = r'$; $x = r'$, $x = p'$; $x = p'$, $y = q'$.



Ponendo nella (4) $x = p'$, $y = q'$ si otterrà $t = s'$, e per $t = s'$, $x = p'$ si otterrà $y = q''$. Sia Q''' il punto della scala y avente tale coordinata. La scala delle t è determinata dovendo passare per A e per il punto di intersezione S' di $Q' P''$, $Q''' P'$. Su di essa il riferimento è pure determinato, dovendo ad A competere la coordinata s , ad S' quella s' ed al punto S''

di intersezione con la $Q'P'$ la coordinata s'' che si ricava dalla (4) per $x = p'$, $y = q'$.

Stante l'ipotesi della non degenerazione delle (1) e (4), Q''' non può coincidere con A o con Q' , ma può coincidere con Q'' . In tal caso le scale della s e della t risultano sovrapposte e la (2) e la (3) degenerano (semplicemente). Altrimenti anche la (2) e la (3) sono paraboliche e non degeneri.

31. - Se una delle trilinearità di partenza è degenera.

Non abbiamo finora considerato il caso in cui una od entrambe le trilinearità di partenza siano degeneri (semplicemente, chè fra le trilinearità allineate non ne figurano di doppiamente degeneri). Sia ad es. degenera la (1). Allora le due scale tra le quali intercede la proiezione fondamentale debbono risultare sovrapposte e su di esse i riferimenti debbono essere scelti in modo che coincidano i punti corrispondenti in quella proiezione. Sulla terza scala il punto singolare deve cadere nell'intersezione col sostegno comune alle altre due.

Escludiamo che la proiezione fondamentale interceda tra le due forme x/y comuni alla (1) ed alla (4), nel qual caso perchè sia possibile il nomogramma anche la (4) deve essere degenera con la stessa proiezione fondamentale, e pertanto svaniscono la (2) e la (3) ed il nomogramma stesso non ha significato. Interceda quindi la proiezione fondamentale della (1) ad es. tra y e s ; allora occorre che l'elemento singolare p della (1) su x sia *singolare* anche per la (4). Tale condizione è anche sufficiente per la costruzione del nomogramma, e rientra nell'enunciato generale (n. 27).

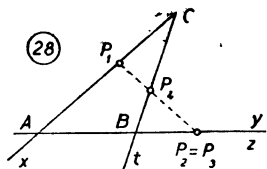
Si osservi che *singolare* vuol dire qui come in T (n. 10) che forma coppia (neutra o) singolare con un altro elemento. Ad es. in una trilinearità semplicemente degenera debbono considerarsi come singolari tutti gli elementi delle due forme tra cui intercede la proiezione fondamentale, le cui coppie sono tutte neutre per la corrispondenza.

32. - Scelta del riferimento nel caso precedente.

Convien distinguere i seguenti casi:

d) La (4) è *iperbolica*.

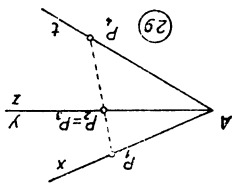
Se ne costruisce come al Capitolo I il nomogramma, ponendo in A la coppia singolare contenente il punto $x = p$. Dopo di che basta scegliere il riferimento z sullo stesso sostegno y in modo che la proiettività fondamentale della (1) divenga l'identità, perchè la corrispondenza posta tra le scale dalle (1), (4) coincida con la corrispondenza allineata (fig. 28).



Delle altre due trilinearità la (2) è degenera (con la stessa proiettività fondamentale) e la (3) è iperbolica. La (3) e la (4) si trovano nella condizione già considerata in a, III) per la (1) e la (4) (n. 28).

e) La (4) è *parabolica*.

Se ne costruisce come al n. 13 il nomogramma e come in d) si sceglie il riferimento z (fig. 29).



Delle altre due trilinearità la (2) è degenera come in d) e la (3) è parabolica.

La (3) e la (4) si trovano nella condizione già considerata in c) per la (1) e la (4) (n. 30).

f) La (4) è *degenera* (semplicemente), e la relativa proiettività fondamentale intercede:

1) tra y e t .

L'elemento singolare su x deve essere lo stesso tanto per la (1) quanto per la (4). Le scale di y , t e z debbono essere sovrapposte; il riferimento y è arbitrario, quelli z e t sono determinati dovendo le rispettive proiettività fondamentali ridursi all'identità. Su x ad A deve competere la coordinata p dell'elemento singolare comune.

La (2) svanisce, la (3) è ancora degenera (semplicemente).

La sua proiettività fondamentale è il prodotto delle altre due, l'elemento singolare su x è ancora p . Questo caso non è nomograficamente interessante.

II) tra x e t .

La scelta del riferimento su x ed y è limitata dalla condizione che in A cadano gli elementi singolari p e q della (1) e della (4). Essi costituiscono la coppia singolare che ora la (1) e la (4) hanno *sempre* in comune.

Dopo di che son determinati il riferimento z e quello t (le scale omonime debbono essere sovrapposte rispettivamente a quelle x e y) dalla condizione che le proiettività fondamentali della (1) e della (4) si riducano all'identità.

La (2) e la (3) sono anch'esse degeneri e si trovano nelle stesse condizioni della (1) e della (4). Anche questo caso è privo di interesse nomografico.

III) tra x ed y .

Questo caso come si è già osservato si deve escludere.

33. - Accorgimenti da usarsi nella scelta del riferimento.

In ogni caso si approfitterà dell'arbitrarietà consentita nella scelta delle scale e del riferimento su di esse, per rendere la costruzione e l'uso del nomogramma più comodi e più esatti che sia possibile, analogamente a quanto è stato già esposto nel Cap. I. In particolare nel caso:

a. I) Si possono scegliere impropri A ed F , oppure D e B , oppure C ed E , con che le quattro scale risultano parallele a due direzioni arbitrarie.

Più in generale si può mandare all' ∞ una retta qualunque del piano del nomogramma diversa dalle scale. Ciò converrà particolarmente quando la coordinata che deve competere ad alcuni dei punti in cui essa incontra le scale sia ∞ , dopo di che le coordinate proiettive relative a quelle scale assumeranno il significato di ascisse. Lo stesso dicasi per gli altri casi.

a. III) Si può scegliere come retta impropria una retta arbitraria per A , o B , o C , con che due scale divengano parallele.

b) Si può scegliere la retta impropria per A , con che tre scale divengano parallele, e per il punto ∞ della quarta scala, dove le coordinate divengono così ascisse (ciò è possibile solo se tale punto non coincide con B , C , oppure D).

c) Si possono scegliere le quattro scale parallele.

Se sulle scale si presuppone già dato un sistema di coordinate proiettive, come al n. 10 si determineranno le relazioni che fanno passare dal vecchio al nuovo sistema di coordinate.

34. - Tipo generale delle relazioni suscettibili della rappresentazione nomografica considerata. - Estensione al caso di più variabili.

Da quanto precede consegue che sono rappresentabili mediante un nomogramma a punti allineati con quattro scale rettilinee tutte e sole le relazioni fra quattro variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, che mediante opportune posizioni del tipo :

$$(5) \quad x = \frac{x_1}{x_2} = f(\alpha) \quad y = \frac{y_1}{y_2} = \varphi(\beta) \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \psi(\gamma) \\ t = \frac{t_1}{t_2} = \chi(\delta) ,$$

dove le f, φ, ψ, χ sono rami univalenti di funzioni reali delle quattro variabili $\alpha \beta \gamma \delta$ definite in opportuni intervalli (cfr. n. 4), si riducano essenzialmente a due equazioni del tipo (1), (4), col discriminante maggiore od uguale a zero, e dalle quali conseguano le (2), (3).

Se le (2), (3) non svaniscono ciò si verifica solo *quando le due corrispondenze trilineari (1) e (4) hanno una coppia singolare in comune*, costituita da elementi reali.

Scelte le scale e su di esse nel modo già visto il riferimento con le avvertenze di cui al numero precedente, le (5) forniscono la graduazione delle scale stesse.

È immediata l'estensione al caso di più variabili $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta$. Perchè $n-2$ relazioni indipendenti fra di esse si possono interpretare con un nomogramma a punti allineati ed n scale rettilinee occorre e basta che, scelta opportunamente la graduazione delle scale relative $x, y, z, \dots$, quelle relazioni si riducano ad $n-2$ trilinearità :

$$\Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Sigma b_{ikl} x_i y_k t_l = 0$$

tali che i loro $2 \binom{n-2}{2}$ prodotti di prima specie non svaniscono e tali da avere una medesima coppia singolare in comune, costituita da elementi reali.

CAPITOLO QUARTO

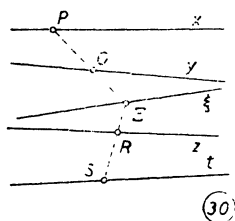
Nomogrammi a quattro scale rettilinee, a doppio allineamento e cerniera rettilinea.

35. — Generalità.

Un «*nomogramma a quattro scale rettilinee, a doppio allineamento e cerniera rettilinea*» rientra nella categoria di quelli che in generale abbiamo chiamato a punti dipendenti e può interpretare graficamente un'equazione in quattro variabili:

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

Ciò accade quando, distese le variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ su quattro rette (in generale distinte: i sostegni x, y, z, t delle scale), la relazione funzionale posta tra di esse dalla (1) equivale alla condizione grafica che le congiungenti i punti $P(\alpha)$ e $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ ed $S(\delta)$ si taglino in un punto Ξ , variabile su di una retta fissa ξ : la cosiddetta «*cerniera*» (fig. 30) ⁽¹⁾.



36. — Quadrilinearità prodotto di seconda specie di due trilinearità.

Scegliamo come al solito su ognuna delle scale un sistema di coordinate proiettive x, y, z, t , le rispettive graduazioni essendo date dalle relazioni funzionali:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x_1}{x_2} = f(\alpha), & y &= \frac{y_1}{y_2} = \varphi(\beta), \\ z &= \frac{z_1}{z_2} = \varphi(\gamma), & t &= \frac{t_1}{t_2} = \chi(\delta). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. A, n. 53, p. 391; E, n. 19, p. 40.

Tra i sostegni delle scale $x y$ e la cerniera (dove si pensi ad un riferimento proiettivo ξ) nasce una corrispondenza trilineare allineata reale iperbolica o parabolica (in particolare semplicemente degenerare se due delle tre rette $x y \xi$ coincidono), qualora si associno tre punti come $P Q \Xi$ appartenenti alla stessa retta (n. 8). La sua equazione è del tipo:

$$(3) \quad \sum a_{ikl} x_i y_k \xi_l = 0 \quad (i, k, l = 1, 2),$$

dove le a_{ikl} sono costanti reali, ed il cui discriminante $\Delta(a)$ è ≥ 0 .

Analogamente sarà:

$$(4) \quad \sum b_{ikl} x_i t_k \xi_l = 0 \quad (i, k, l = 1, 2)$$

la equazione della trilinearità allineata in cui si corrispondono Ξ, R ed S , dove le b_{ikl} sono costanti reali tali che sia $\Delta(b) \geq 0$.

Pertanto la corrispondenza che intercede fra i sostegni delle scale quando si associno le coppie PQ ed RS di punti omologhi nella (3) e nella (4) al medesimo punto Ξ della cerniera ha per equazione:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{ik1} x_i y_k & \sum a_{ik2} x_i y_k \\ \sum b_{lm1} x_l t_m & \sum b_{lm2} x_l t_m \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k, l, m = 1, 2).$$

La diremo prodotto «*di seconda specie*» delle due trilinearità (3) e (4) aventi il sostegno comune ξ : è una corrispondenza quadrilineare ⁽²⁾, di equazione:

$$(5') \quad \sum c_{iklm} x_i y_k x_l t_m \quad (i, k, l, m = 1, 2),$$

dove:

$$c_{iklm} = a_{ik1} b_{lm2} - a_{ik2} b_{lm1}$$

Viceversa un'equazione (1) che mediante le (2) si riduca al tipo quadrilineare (5') è sempre suscettibile di essere inter-

(2) Sulle corrispondenze quadrilineari e sulle notizie bibliografiche che riguardano la loro teoria c'è un cenno esauriente al n. 5, p. 1812 dell'articolo di L. BERZOLARI: «*Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*», nella Enc. der Mathem. Wissenschaften, Bp. III, 2, 2, B (1933).

proiettata mediante un nomogramma a scale rettilinee a doppio allineamento a cerniera rettilinea, purchè la quadrilinearità (5') possa pensarsi come il prodotto di seconda specie di due trilinearità reali (3) e (4) (iperboliche o paraboliche o semplicemente degeneri) aventi un sostegno in comune.

Infatti nei numeri successivi è dimostrato come in tale ipotesi si possa sempre costruire un nomogramma del tipo suddetto della equazione data.

Se in particolare almeno una delle due trilinearità è degenera, la rappresentazione nomografica della (1) si può ulteriormente semplificare e ridurre a quella di una trilinearità e di una proiettività od addirittura a quella di due proiettività, che a loro volta possono anche (una od entrambe) essere degeneri. Questo ultimo caso accade quando almeno una delle due proiettività fondamentali della (3) e della (4) non interessa la cerniera. Vedremo al capitolo successivo (n. 54) che ciò si può prevedere a priori dall'esame diretto della (5') e che si possono direttamente ricavare le equazioni delle proiettività in discorso.

37. - Premessa.

Supponiamo momentaneamente di aver già dissociato la (1) nelle (3) e (4), dove $x y z t$ son legate ad $\alpha \beta \gamma \delta$ dalle (2), riservandoci di dare poi un procedimento che permetta di riconoscere se tale dissociazione è possibile e fornisca il modo di effettuarla (n. 54).

Convieni allora distinguere i seguenti casi e sottocasi, che conducono ad altrettanti tipi di nomogrammi, distinti di fronte alle proiettività reali dei sostegni.

38. - Scelta del riferimento nel caso iperbolico-iperbolico.

a) *La (3) e la (4) sono iperboliche.*

La posizione dei sostegni di due scale, ad es. $x y$ e della cerniera è arbitraria (fig. 31).

Siano $pp' qq' kk'; rr' ss', hh'$ le coordinate degli elementi singolari della (3) e della (4) rispettivamente su $x y \xi$ e su $z t \xi$. Su $x y \xi$ il riferimento si sceglie come al cap. I in uno dei due modi possibili, per modo che la (3) risulti allineata. Con ciò rimane arbitraria l'assegnazione delle coordinate pertinenti ad un punto ad es. di ξ e di x . Convien distinguere i seguenti sottocasi (nel senso del n. 37), a seconda che h ed h' sono o no diversi da k, k' :

a. I) $h, h' \neq k, k'$.

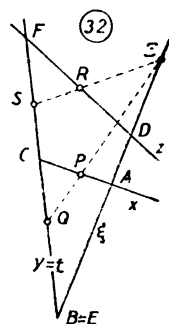
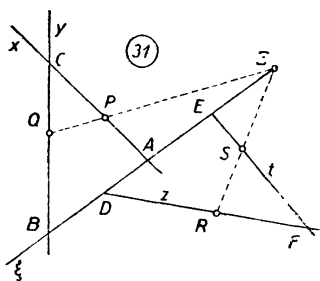
Rimane arbitraria la scelta del punto di ξ di coordinata h , dopo di che risulta determinato quello di coordinata h' . Per essi debbono passare i sostegni delle scale z e t , la cui posizione è arbitraria e sui quali il riferimento va scelto come al n. 9 perchè anche la (4) risulti allineata.

a. II) $h = k, h' \neq k'$.

Allora uno dei due punti D, E deve coincidere con quello tra A e B che ha la coordinata k . L'altro è arbitrario, purchè distinto da A, B , e la sua scelta determina il riferimento su ξ . Per il resto si procede come prima. Supposto ad es. (fig. 32) che $B = E$, si può addirittura prendere lo stesso sostegno per la scala delle y e delle t (o della x e della z). Ciò potrà convenire ad es. quando gli elementi singolari delle due scale y e t che si accoppiano con $\xi = k$ hanno la stessa coordinata, potendosi allora costruire la graduazione delle due scale sovrapposte a partire dallo stesso riferimento proiettivo. Scelto tale riferimento (cioè scelto $F = C$) e quello di ξ (con la scelta di E), risultano determinati quelli di x e t .

a. III) $h = k, h' = k'$.

Allora D ed E debbono coincidere con A, B (o rispettivamente B, A).



40. - Caso iperbolico-parabolico ed iperbolico-degenere.

b) La (3) è iperbolica la (4) parabolica (in particolare semplicemente degenere).

Come già sappiamo dal cap. I si costruisce il nomogramma della (3), scegliendo arbitrariamente la posizione delle scale x , y e della cerniera ξ . Dopo di che occorre distinguere i seguenti casi:

b, I) La coordinata dell'elemento singolare della (4) su ξ è diversa da quella dell'elemento singolare della (3).

Allora è arbitraria la posizione dei sostegni delle due scale x e t , purchè si incontrino in un punto D di ξ diverso da quelli A e B (fig. 36). Su di essi si sceglie come al Cap. I il riferimento, in modo che la (4) risulti allineata.

In particolare, se C e D sono impropri, lo schema del nomogramma assume l'aspetto della fig. 37, adatto per la quadrilinearità:

$$(11) \quad (y - x)(x + t) + x = 0,$$

che può pensarsi come il prodotto delle due trilinearità:

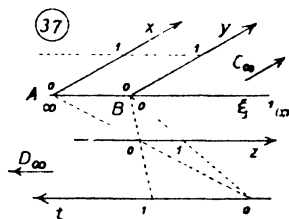
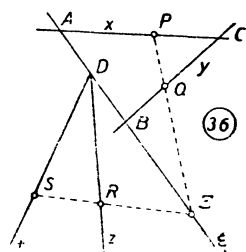
$$(12) \quad x\xi = y, \quad x + t + \frac{1}{\xi - 1} = 0,$$

di cui la seconda (cfr. n. 15) è parabolica, con gli elementi singolari nei punti $x = t = \infty$, $\xi = 1$ ed in cui la sestupla associata con gli elementi principali in $x = 0$, $t = 0$, $\xi = 0$ ha gli elementi secondari rispettivamente in $x = 1$, $t = 1$, $\xi = \infty$.

Se poi la (4) è degenere (semplicemente), conviene distinguere due casi:

b, I, 1) La proiettività fondamentale intercede fra ξ e x (o fra ξ e t).

In questo caso tutto si riduce a rappresentare con un nomogramma a punti allineati la trilinearità (3) ed a costruire sul



Sui sostegni delle scale $x = z$, t e sulla cerniera ξ le coordinate sono ascisse, su quello della scala delle y sono coordinate baricentriche con i punti fondamentali in B e C .

Dei due sottocasi che si ottengono supponendo la (4) degenerare, uno non è distinto da quello b, I, 1), l'altro b, II, 2) è un caso particolare del b, I, 2).

Anche per il caso b) valgono avvertenze analoghe a quelle dichiarate per il caso a) al n. 39. In particolare anche ora basta soltanto supporre il riferimento proiettivo della cerniera ξ .

41. - Casi parabolico-parabolico, parabolico-degenere, e doppiamente degeneri.

c) La (3) e la (4) sono paraboliche (in particolare semplicemente degeneri):

c, 1) Gli elementi singolari della (3) e della (4) su ξ sono distinti.

Allora la posizione dei sostegni delle scale è arbitraria, purchè quelli x ed y concorrano in A (fig. 39) e quelli z , t in B ($AB = \xi$).

Su di essi si sceglie il riferimento come al solito, tenendo sempre conto che su ξ il riferimento è unico per le due trilinearità.

Così ad es. per la quadrilinearità:

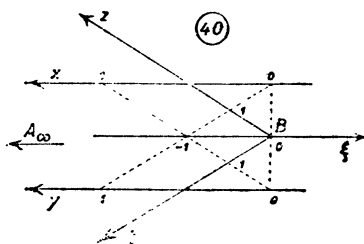
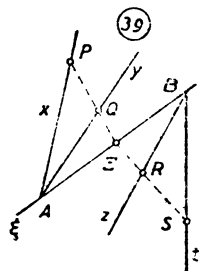
$$(x + y)(z + t) - zt = 0,$$

che può pensarsi il prodotto delle due trilinearità paraboliche:

$$x + y + \xi = 0,$$

$$\xi(x + t) + zt = 0.$$

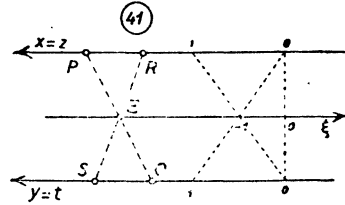
mandando A all' ∞ si possono scegliere i riferimenti (ascisse) come nello schema della fig. 40.



c, II) *Gli elementi singolari della (3) e della (4) su ξ coincidono.*

Allora $A = B$ e per le scale di x e z (x e t) ed y e t (y e z) si può assumere lo stesso sostegno. Scelto $A = B$ improprio, lo schema del nomogramma assume l'aspetto della fig. 41, relativa alla quadrilinearità di equazione:

$$x + y = z + t,$$



che può pensarsi come il prodotto delle due trilinearità:

$$x + y + \xi = 0, \quad z + t + \xi = 0.$$

Tale schema è particolarmente conveniente appunto quando la (3) e la (4) non differiscono che per lo scambio di nome delle variabili, dato che allora il riferimento proiettivo dei sostegni delle scale sovrapposte è il medesimo.

In particolare può accadere che:

c, I, 1) = c, II, 1) *La (4) è degenera e la proiettività fondamentale opera su ξ e ad es. su z .*

Anche ora, come nel caso b, I, 1) la rappresentazione nomografica della (1) si riduce alla costruzione del nomogramma a punti allineati della (3) ed a quella, sul sostegno ξ , della scala funzionale della proiettività fondamentale della (4).

Se invece la proiettività fondamentale lega z e t (casi c, I, 2) e c, II, 2), come al caso b, I, 2) la rappresentazione nomografica della (1) si riduce alla costruzione delle scale funzionali di due proiettività.

c, III) *Tanto la (3) che la (4) sono semplicemente degeneri:* la rappresentazione nomografica della (1) può allora semplificarsi anche di più. E precisamente:

c, III, 1) *Le due proiettività fondamentali legano x ed y , z e t . Allora basta costruire le scale funzionali delle proiettività fondamentali della (3) e della (4), giacchè ad ogni coppia di ele-*

menti omologhi in una di esse corrisponde una coppia qualunque di elementi omologhi nell'altra.

c, III, 2) *Una delle due proiettività fondamentali, ad es. quella della (4), interessa la cerniera. Allora basta costruire la scala funzionale della proiettività fondamentale della (3), ad una coppia della quale la (1) fa corrispondere valori arbitrari di z e t .*

c, III, 3) *Le due proiettività fondamentali interessano la cerniera. Siano ad es. quelle tra x e ξ e tra ξ e z . Allora basta rappresentare la proiettività prodotto delle due fondamentali che lega x e z , ad ogni coppia della quale la (1) fa corrispondere valori arbitrari di y e t .*

CAPITOLO QUINTO

Digressione sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie

42. - Rappresentazioni tridimensionali di una quadrilinearità.

Una quadrilinearità tra quattro forme di prima specie x, y, z, t , dove $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2$ sono coordinate proiettive omogenee, è una corrispondenza di equazione:

$$(1) \quad \sum a_{iklm} x_i y_k z_l t_m = 0 \quad (i, k, l, m = 1, 2) ,$$

dove le a_{iklm} sono costanti complesse.

Com'è noto ⁽¹⁾ essa si può rappresentare in tre modi diversi, riferendo proiettivamente le quattro forme date ai sistemi delle generatrici di due quadriche Q e Q' ed associando i punti di Q e Q' coniugati in una reciprocità dei due spazi ordinari S ed S' che le contengono. Infatti, se ad es. X_1, X_2, X_3, X_4 sono coordinate proiettive omogenee di punto in S ed analogamente Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 in S' , e se le due quadriche son quelle di equazioni parametriche:

(1) Confronta la memoria di C. SEGRE: « *Sulle corrispondenze quadrilineari, ecc.* » già citata nella prefazione, n. 16, pag. 116. In seguito indicheremo brevemente tale lavoro con la lettera S. In esso si trova esposto dettagliatamente la classificazione delle quadrilinearità qui riassunta nei numeri 42-45 e 47. Il caso che a noi maggiormente interessa delle quadrilinearità, nelle cui tre rappresentazioni almeno una delle corrispondenti reciprocità sia degenerare di seconda specie vi è solo brevemente accennato, come comportava lo scopo che si era prefisso il SEGRE e da lui dichiarato nella introduzione (S, pag. 105-106).

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = x_1 y_1 \\ X_2 = x_1 y_2 \\ X_3 = x_2 y_1 \\ X_4 = x_2 y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_1 = x_1 t_1 \\ Y_2 = x_1 t_2 \\ Y_3 = x_2 t_1 \\ Y_4 = x_2 t_2 \end{cases}$$

la (1) si scrive, tenendo conto delle (2) :

$$(3) \quad \sum b_{rs} X_r Y_s = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3, 4) ,$$

dove

$$b_{rs} = a_{iklm} \left\{ \begin{array}{l} r, s = 1, 2, 3, 4 \\ ik, lm = 11, 12, 21, 22 \end{array} \right. ,$$

e la (3) è appunto la equazione bilineare che lega le coordinate di due punti coniugati in una reciprocità tra S ed S' .

Se la quadrilinearità data è reale, cioè se le a_{iklm} sono proporzionali a numeri reali, oltre alle due quadriche, risulta reale anche la reciprocità (3)

43. - Criteri generali per una parziale classificazione proiettiva.

Consideriamo il gruppo G delle trasformazioni proiettive non degeneri che operano su $x y z t$. Esse generano per tramite delle (2) due gruppi G_1 e G_2 di trasformazioni omografiche operanti sulle quadriche Q e Q' , e quindi due gruppi di trasformazioni omografiche di S ed S' in sè, caratterizzati dal lasciare invariate le due quadriche e, su di esse, le rispettive schiere rigate.

La prima parte è evidente, in quanto una trasformazione proiettiva sulla x ed un'altra sulla y generano una proiettività in ciascuna delle schiere cui x ed y sono riferite dalle (2) e quindi un'omografia sulla quadrica, subordinata da una ben determinata omografia dello spazio ambiente.

Viceversa un'omografia dell'ambiente che muti ad es. la quadrica Q in sè senza scambiare le due schiere di rette, indi-

veduta una proiettività entro ciascuna delle due schiere e quindi una proiettività in ciascuno dei due sostegni x ed y .

In altre parole i regoli di Q e Q' sono le varietà fondamentali ⁽²⁾ dei due spazi S ed S' rispetto a G_1 , G_2 , per modo che volendo classificare rispetto alle proiettività dei sostegni una delle tre immagini ⁽³⁾ della quadrilinearità, basterà considerare:

- a) il tipo proiettivo della reciprocità ⁽³⁾ tra S ed S' ;
- b) i suoi legami proiettivi con Q e Q' .

44. - Vie da seguire nei vari casi.

Finchè la ⁽³⁾ non è degenerare, b) ha questo significato: la ⁽³⁾ muta Q in una quadrica inviluppo I' di S' . Si tratta di stabilire quale sia il legame proiettivo tra I' e Q' . In questo senso lo studio delle quadrilinearità coincide con quello di una coppia di quadriche ⁽³⁾.

Quando invece la ⁽³⁾ è degenerare di prima o di seconda specie, cioè si riduce rispettivamente ad una reciprocità non degenerare tra due stelle di centri X , Y o ad una proiettività non degenerare tra due fasci di piani di assi r ed r' , b) ha il seguente significato:

Si hanno tipi diversi di quadrilinearità a seconda:

b, 1) dei diversi legami proiettivi rispettivamente con Q , Q' degli elementi «singolari» X ed Y (r ed r');

b, 2) dei diversi legami proiettivi con Q , Q' della proiettività non degenerare tra le stelle (fasci) aventi per sostegni gli elementi singolari.

Quando infine la reciprocità ⁽³⁾ è degenerare di terza specie, cioè si riduce alla condizione che almeno uno di due punti coniugati appartenga ad un piano fisso σ o σ' di ciascuno spazio, b) riguarda la posizione relativa di σ e Q , σ' e Q' . In questo caso due punti di Q e Q' sono corrispondenti appena uno di essi appartiene ad una delle due coniche (σ, Q) , (σ', Q') .

(²) Secondo le vedute espresse da F. KLEIN nel «*Programma di Kr-lingen*» (1872), trad. itai. di G. FANO in *Annali di Matematica*, Serie II, T. XVII (1889-90), pag. 306 e seg.

(³) Cfr. S. pag. 105, 116-117, 125-134.

45. - Caso in cui la reciprocità è degenerare di prima specie.

In particolare se la (3) si riduce ad una reciprocità non degenerare fra due stelle coi centri X ed Y esterni alle quadriche, tra Q e Q' si ha una corrispondenza che alle coppie della involuzione di polo X fa corrispondere le coniche tagliate su Q' dai piani della rete Y (e viceversa).

Alle coppie coincidenti della involuzione di polo X (punti del contorno apparente q di Q da X) corrispondono le coniche tagliate su Q' dai piani di un inviluppo conico γ' col vertice in Y , e viceversa.

In questo caso b, 2) significa riguardare al tipo proiettivo della coppia di coni quadrici γ' e q' col vertice in Y (q' è il cono tangente a Q' col vertice in Y). In questo senso lo studio di una quadrilinearità si riduce allora a quello di una coppia di coniche complanari ⁽⁴⁾.

Se X cade su Q , γ' degenera in un fascio di piani (contato due volte) ed allora la classificazione dipende dai legami di appartenenza di un punto e di una conica complanari (o dualmente di una retta e di una conica).

Se X appartiene a Q ed Y a Q' , la classificazione dipende dal legame tra la retta omologa del piano tangente a Q in X ed il piano tangente a Q' in Y .

46. - Caso in cui la reciprocità è degenerare di seconda specie.

Se la (3) si riduce ad una proiettività tra due fasci di piani, la modalità b, 1) porta a distinguere i tipi seguenti:

I) Gli assi r , r' sono entrambi secanti risp. a Q , Q' . Allora b, 2) ha relazione colla configurazione dei due piani per r' omologhi dei due piani tangenti a Q per r , e dei due piani tangenti a Q' per r' , ossia in definitiva alla configurazione proiettiva di due coppie di rette di un fascio.

II) r (od r') è tangente a Q (Q'), ma non vi giace, mentre r' (r) è secante a Q' (Q). Allora b, 2) riguarda la eventuale

⁽⁴⁾ Cfr. S. pag. 120-122.

coincidenza del piano omologo al piano tangente a Q per r con uno dei due piani tangenti a Q' per r' .

III) Tanto r quanto r' sono tangenti rispettivamente a Q , Q' , ma non vi giacciono. Allora b, 2) riguarda l'eventuale coincidenza del piano tangente a Q' per r' e dell'omologo del piano tangente a Q per r .

Per quanto riguarda b, 2), dànno luogo ciascuno ad un unico tipo i casi in cui:

IV) r (r') appartiene ad uno dei due regoli di Q (Q'), mentre r' (r) è secante a Q' (Q).

V) r (r') appartiene ad uno dei regoli di Q (Q'), mentre r' (r) è tangente a Q' (Q).

VI) r ed r' appartengono ciascuno ad uno dei regoli di Q , Q' .

Nel campo reale occorre distinguere vari sottotipi di quadrilinearità reali per ciascuno di quelli I), II), IV), secondo che r ed r' sono realmente secanti od esterne alle rispettive quadriche Q , Q' .

47. - Legami tra i tipi possibili nelle tre classificazioni parziali: Caso generale.

Per effettuare una classificazione completa delle quadrilinearità tra forme di prima specie occorre esaminare quale sia il legame tra le loro tre immagini, nel senso di stabilire, una volta appurato il tipo di una di esse, quali possano essere i tipi delle altre due.

Tale legame dipende essenzialmente dal fatto che le matrici delle tre reciprocità (3) sono costituite dagli stessi elementi, come segue:

$$(4) \quad L = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1211} & a_{2111} & a_{2211} \\ a_{1112} & a_{1212} & a_{2112} & a_{2212} \\ a_{1121} & a_{1221} & a_{2121} & a_{2221} \\ a_{1122} & a_{1222} & a_{2122} & a_{2222} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{2111} & a_{1121} & a_{2121} \\ a_{1112} & a_{2112} & a_{1122} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{2211} & a_{1221} & a_{2221} \\ a_{1212} & a_{2212} & a_{1222} & a_{2222} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{2111} & a_{2112} \\ a_{1121} & a_{1122} & a_{2121} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{2211} & a_{2212} \\ a_{1221} & a_{1222} & a_{2221} & a_{2222} \end{bmatrix},$$

da cui discende intanto per i loro moduli la relazione ⁽⁵⁾ (identica):

$$(5) \quad L + M + N = 0.$$

Cioè: « Se due delle reciprocità (3) son degeneri, lo è anche la terza ».

Quindi intanto, se nessuna delle matrici L, M, N ha caratteristica 2, quelle caratteristiche possono avere i valori:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4; \\ 3 & 4 & 4 \text{ o analogamente } 4 \ 3 \ 4, \ 4 \ 4 \ 3; \\ 3 & 3 & 3. \end{array}$$

48. - Caso in cui una delle tre reciprocità è degeneri di seconda specie.

Esaminiamo particolarmente il caso in cui una delle reciprocità, ad es. la (3), sia degeneri di seconda specie ed appartenga al tipo I) del n. 46, per modo che la caratteristica della matrice L sia 2.

Senza ledere la generalità possiamo supporre ⁽⁶⁾ (nel campo complesso) che il fascio singolare r in S sia quello di equazione:

$$(6) \quad \lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2 = 0,$$

⁽⁵⁾ Cfr. S, n. 5, 7, pag. 108-110.

⁽⁶⁾ Basta cambiare il riferimento operando sulle forme x ed y una trasformazione proiettiva che porti i rispettivi elementi fondamentali X_1, X_2, Y_1, Y_2 sulle rette delle due schiere che passano per i due punti d'intersezione dell'asse del fascio colla quadrica, che per ipotesi sono distinti.

Infatti i punti fondamentali del riferimento di S appartengono a Q , e precisamente:

$$A_1 = (X_1 Y_1), \quad A_2 = (X_1 Y_2), \quad A_3 = (X_2 Y_1), \quad A_4 = (X_2 Y_2).$$

cosicchè si può supporre $r = A_2 A_3$. Allora i piani $X_2 = 0, X_1 = 0$ passano per r e sono tangenti a Q , che tagliano secondo le rette $A_2 A_1, A_3 A_1, A_3 A_2$. Analogamente per Q' .

ed in S' l'equazione di r' sia :

$$(6') \quad \mu_2 Y_1 - \mu_1 Y_4 = 0 \quad ,$$

tra i quali la corrispondenza ponga la proiettività non degenera :

$$(7) \quad a\lambda_1\mu_1 + b\lambda_1\mu_2 + c\lambda_2\mu_1 + d\lambda_2\mu_2 = 0 \quad .$$

Ossia la (3) si riduca alla :

$$(7') \quad aX_1Y_1 + bX_1Y_4 + cX_4Y_1 + dX_4Y_4 = 0 \quad ,$$

e la (1) alla :

$$(7'') \quad ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 = 0 \quad .$$

Pertanto :

$$(4') \quad L = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & d \end{vmatrix} , \quad M = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} ,$$

$$N = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} .$$

Dall'esame delle (4'), tenendo conto che $ad - bc \neq 0$, risulta che se una delle matrici L M N ha caratteristica 2, le loro caratteristiche possono avere i valori :

$$(8') \quad \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 4 & 0 \text{ analogamente } 4 & 2 & 4 & , & 4 & 4 & 2 : \\ 2 & 3 & 3 & » & » & 3 & 2 & 3 & , & 3 & 3 & 2 ; \\ 2 & 2 & 2 & . & & & & & & & \end{array}$$

Le caratteristiche di M , N si abbassano contemporaneamente di una o due unità quando i piani tangenti a Q per r hanno per omologhi piani di r' di cui uno od entrambi sono tangenti a Q' , cioè se una delle quattro costanti a , b , c , d è nulla o rispettivamente si annullano a e d , b e c .

Dei quattro parametri a , b , c , d che nel caso 244 compaiono nelle (7), (7'), (7'') uno solo è essenziale. Gli altri tre si eliminano approfittando del fattore di proporzionalità a meno del quale son determinati e fissando i punti unità del riferimento di S e di S' . Il parametro essenziale che rimane si può rendere uguale ad uno dei due valori (reciproci) del birapporto della quaterna $(\alpha \beta \alpha_1 \beta_1)$ costituita dalle due coppie di piani per r , i primi due α e β tangenti a Q , gli altri due α_1 e β_1 omologhi dei piani tangenti a Q' per r' (Confr. anche i n. 38, 39).

Il ragionamento si trasporta tal quale nel campo reale, quando la quadrilinearità data è reale e gli assi dei due fasci siano realmente secanti a Q , Q' .

49. - Uno degli assi tocca la relativa quadrica, in particolare vi giace.

Il ragionamento precedente cade in difetto quando uno od entrambi gli assi dei due fasci sono tangenti rispettivamente a Q , Q' .

Supponiamo ad es. che r tocchi Q od in particolare vi giaccia mentre r' sia secante a Q' (tipi II e IV del n. 46).

Nel punto di contatto poniamo il vertice A_4 del tetraedro delle coordinate.

Come equazione del fascio r si può allora assumere la seguente (7):

$$(6i) \quad \lambda_2 X_1 - \lambda_1 (\alpha X_2 + \beta X_3) = 0 \quad ,$$

dove λ_1 e λ_2 sono i parametri del fascio ed α , β due costanti non entrambe nulle e determinate a meno di un fattore di pro-

(7) Il piano tangente a Q in A_4 è quello $A_2 A_3 A_4$ di equazione $X_1 = 0$. Su di esso l'equazione di r sarà: $\alpha X_2 + \beta X_3 = 0$. La stessa equazione rappresenta anche il piano che proietta r da A_1 .

porzionalità. Come equazione del fascio r' si può sempre tenere la (6'). La (7') e la (7'') divengono:

$$(7'_1) \quad aX_1Y_1 + bX_1Y_4 + (\alpha X_2 + \beta X_3)(cY_1 + dY_4) = 0,$$

$$(7''_1) \quad ax_1y_1x_1t_1 + bx_1y_2x_1t_2 + \alpha cx_1y_2x_1t_1 + \alpha dx_1y_2x_2t_2 + \\ + \beta cx_2y_1x_1t_1 + \beta dx_2y_1x_2t_2 = 0.$$

Quindi:

$$L = \begin{vmatrix} a & \alpha c & \beta c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \alpha d & \beta d & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a & \beta c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \beta d \\ \alpha c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha d & 0 \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} a & 0 & \beta c & 0 \\ 0 & b & 0 & \beta d \\ \alpha c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha d & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dall'esame delle espressioni di L , M , N , tenendo conto che $ad - bc \neq 0$, si riconosce che sono ancora possibili per le caratteristiche i valori (8').

Si ha il caso 222 solo se r appartiene alla quadrica Q (tipo IV: α oppure β uguali a zero). Altrimenti (tipo II) la caratteristica di M , N che in generale è 4, si abbassa di una unità quando è nullo c oppure d , cioè quando al piano $X_1 = 0$ tangente per r a Q corrisponde uno dei due piani $Y_1 = 0$, $Y_4 = 0$ tangenti a Q' per r' .

In ciascuno dei tre casi nessuno dei parametri che compaiono nella (7'') è essenziale e si possono eliminare scegliendo il fattore di proporzionalità a meno del quale son determinati α , β ed i coefficienti a , b , c , d e fissando il punto A_1 ed il punto unità di S su Q , ed il punto unità di S' su Q' .

Anche ora il ragionamento si trasporta senza modificazioni alle quadrilinearità reali, quando r sia realmente secante a Q' .

50. - Entrambi gli assi toccano la propria quadrica, in particolare vi giacciono.

Se tanto r come r' toccano Q e Q' od in particolare vi giacciono (tipi III, V, VI del n. 46), scelto il riferimento tanto in S quanto in S' come al n.º precedente in S , saranno:

$$\lambda_2 X_1 - \lambda_1 (\alpha X_2 + \beta X_3) = 0, \quad \mu_2 Y_1 - \mu_1 (\alpha_1 Y_2 + \beta_1 Y_3) = 0,$$

le equazioni dei fasci r r' .

Scelti, com'è possibile in ∞^2 modi, i punti fondamentali omonimi A_1 e B_1 di S ed S' in due piani corrispondenti dei due fasci, nella (7) viene $a = 0$.

Quindi la (7') diviene:

$$bX_1 (\alpha_1 Y_2 + \beta_1 Y_3) + c(\alpha X_2 + \beta X_3) Y_1 + \\ + d(\alpha X_2 + \beta X_3) (\alpha_1 Y_2 + \beta_1 Y_3) = 0.$$

Dunque:

$$L = \begin{vmatrix} 0 & c\alpha & c\beta & 0 \\ b\alpha_1 & d\alpha\alpha_1 & d\beta\alpha_1 & 0 \\ b\beta_1 & d\alpha\beta_1 & d\beta\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 0 & c\beta & b\beta_1 & d\beta\beta_1 \\ b\alpha_1 & d\beta\alpha_1 & 0 & 0 \\ c\alpha & 0 & d\alpha\beta_1 & 0 \\ d\alpha\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} 0 & b\alpha_1 & c\beta & d\beta\alpha_1 \\ b\beta_1 & 0 & d\beta\beta_1 & 0 \\ c\alpha & d\alpha\alpha_1 & 0 & 0 \\ d\alpha\beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esaminando le espressioni trovate e tenendo conto che ora $bc \neq 0$, si riconosce che i casi possibili per i valori delle caratteristiche sono:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 4 & \text{o analogamente} & 4 & 2 & 4, & 4 & 4 & 2; \\ 2 & 2 & 2. & & & & & & & \end{array}$$

La caratteristica di M e quella di N si abbassano da 4 a 2 nel tipo III, quando i piani tangenti a Q, Q' per r, r' si corrispondono ($d = 0$), oppure nel tipo V ($\alpha, \beta = 0$ oppure $\alpha_1, \beta_1 = 0$) e nel tipo VI ($\alpha, \beta = 0$ e $\alpha_1, \beta_1 = 0$).

Quanto sopra si trasporta senz'altro al caso delle quadri-linearità reali.

51. - Caso in cui una delle reciprocità è degenerare di terza specie.

In quest'ultimo caso b, 2) riguarda le relazioni di appartenenza dei due piani singolari σ e σ' colle rispettive quadriche Q e Q' . Si avranno così tre casi distinti a seconda che σ e σ' siano entrambi secanti a Q, Q' , oppure uno di essi od entrambi siano tangenti a Q, Q' .

In ogni caso si può supporre che σ passi per i punti fondamentali A_2, A_3 e σ' per B_2, B_3 ed abbiano perciò come equazioni rispettive:

$$\alpha X_1 + \beta X_4 = 0, \quad \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_4 = 0,$$

con α, β (α_1, β_1) non entrambi nulli. Pertanto la (3) si scrive:

$$(\alpha X_1 + \beta X_4)(\alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_4) = 0,$$

e quindi:

$$L = \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 & 0 & 0 & \beta\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta_1 & 0 & 0 & \beta\beta_1 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta\beta_1 \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta\beta_1 \end{vmatrix}.$$

Dall'esame delle espressioni trovate si riconosce che i casi possibili per i valori delle caratteristiche sono:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 4 & 4 & \text{o analogamente} & 4 & 1 & 4, 4 & 4 & 1; \\
 (8'') & 1 & 2 & 2 & » & » & 2 & 1 & 2, 2 & 2 & 1; \\
 & 1 & 1 & 1 & . & & & & & &
 \end{array}$$

Le caratteristiche di M ed N dal valore 4 (che assumono quando σ e σ' sono entrambi secanti a Q e risp. a Q' : $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \neq 0$) si abbassano contemporaneamente a 2 quando uno dei piani singolari tocca la quadrica rispettiva ($\alpha, \beta = 0$ oppure $\alpha_1, \beta_1 = 0$) e si riducono addirittura ad 1 quando ciascuno tocca la propria quadrica ($\alpha, \beta = 0$ ed $\alpha_1, \beta_1 = 0$). In ciascuno dei tre casi non si ha alcun parametro essenziale, e la discussione precedente si trasporta inalterata nel campo reale al caso delle quadrilinearità reali.

52. - Riassunto.

Riassumendo quanto esposto nei n. 48-51, possiamo distinguere i seguenti tipi di quadrilinearità di cui almeno una delle tre immagini è una reciprocità degenerare di seconda specie. Essi sono distinti nel campo complesso di fronte alle proiettività non degeneri dei sostegni ed all'eventuale scambio di nome dei sostegni stessi:

A) Per i valori 2, 4, 4 delle tre caratteristiche si hanno ∞^1 tipi distinti, caratterizzati dal valore di un parametro: come tale si può assumere il valore del birapporto $(\alpha \beta \alpha_1 \beta_1)$ di cui al n. 48. Valori reciproci del parametro danno luogo allo stesso sottotipo. Si devono escludere i valori 0 ed ∞ , giacchè se uno dei due piani α, β coincide con uno dei due α_1, β_1 , le caratteristiche di M, N si abbassano.

Il valore 1 si può ritenere compete tanto al caso $\alpha \equiv \beta$ (oppure $\alpha_1 \equiv \beta_1$) incontrato al n. 49, quanto al caso, distinto dal precedente, $\alpha \equiv \beta$ ed $\alpha_1 \equiv \beta_1$ incontrato al n. 50).

B) Per i valori 2, 3, 3 delle tre caratteristiche si hanno due tipi distinti, uno visto al n. 48, l'altro al n. 49.

C) Per i valori 2 , 2 , 2 delle tre caratteristiche si hanno cinque tipi distinti, due incontrati rispettivamente ai n. 48 e 49, gli altri tre al n. 50.

D, E, F) Infine per ciascuna delle terne 1 , 4 , 4 ; 1 , 2 , 2 ; 1 , 1 , 1 di valori delle caratteristiche si ha un solo tipo, come s'è visto al n. 51.

53. - Quadrilinearità prodotti di seconda specie di due trilinearità.

A. DUSCHEK ha mostrato ⁽⁸⁾ che una corrispondenza trilineare fra tre forme di prima specie $x y \xi$ ha per immagine nello spazio ordinario la configurazione di una quadrica rigata Q e di un fascio di piani r , quando ad es. si riferiscano gli elementi di x ed y alle rette dei due regoli di Q e quelli di ξ ai piani per r . I vari tipi di trilinearità (nel campo reale o complesso) corrispondono alle diverse relazioni di posizione fra la quadrica Q e la retta r .

Così per una trilinearità reale iperbolica od ellittica r è rispettivamente secante od esterna a Q ; per una trilinearità reale parabolica è tangente.

Per una trilinearità semplicemente degenerare l'asse r del fascio appartiene a Q , oppure il fascio si riduce ad un piano fisso σ . Se poi σ è tangente a Q , la trilinearità è doppiamente degenerare.

Rappresentiamo due trilinearità aventi un sostegno in comune ξ in due spazi ordinari S ed S' mediante due quadriche Q, Q' e due fasci di piani r ed r' , sui cui piani si rappresentino gli elementi della forma ξ .

Dalla definizione di prodotto di seconda specie data al n. 36 del Cap. IV, risulta che tale prodotto può rappresentarsi ponendo una proiezione non degenerare tra i due fasci r ed r' : quella che nasce fra di loro quando si associno i piani omologhi dello stesso elemento Ξ di ξ .

Quindi, tenendo conto delle considerazioni svolte ai numeri precedenti, risulta anche che la quadrilinearità prodotto di se-

(⁸) Cfr. la nota (³) della prefazione.

conda specie di due trilinearità appartiene ad uno dei tipi A), B), C) elencati al n. 52 e caratterizzati dall'essere *due* la caratteristica di una delle tre matrici L , M , N . Come casi limiti, per essere la proiettività tra i due fasci degenerare, si possono ottenere anche i tipi D), E), F), in cui una delle matrici ha caratteristica 1. Se la quadrilinearità è reale, perchè nessuna delle trilinearità duplosingolari in discorso risulti ellittica occorre che l'asse del fascio di piani corrispondente sia realmente secante alla rispettiva quadrica. Si può vedere anche direttamente, tenendo conto delle espressioni dei suoi elementi c_{iklm} :

$$(9) \quad c_{iklm} = a_{ik1} b_{lm2} - a_{ik2} b_{lm1} \quad (i, k, l, m = 1, 2),$$

che la caratteristica della matrice L dell'aspetto $(xy; zt)$ della quadrilinearità (5') del Cap. IV è ≤ 2 .

Dalle (9) appare che L è il prodotto per righe delle due matrici:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{112} & -b_{111} \\ b_{122} & -b_{121} \\ b_{212} & -b_{211} \\ b_{222} & -b_{221} \end{vmatrix}$$

e tale prodotto è appunto una matrice di caratteristica ≤ 2 . Infatti ciascuno dei suoi 16 minori del 3° ordine è uguale ad uno dei 16 possibili prodotti di due matrici con tre righe e due colonne che si ottengono togliendo una riga a ciascuna delle (10), e quindi è nullo. Analogamente i suoi 36 minori del 2° ordine sono uguali ai 36 prodotti di due minori del 2° ordine estratti dalle (10). Cosicchè se nessuna delle trilinearità (3), (4) è semplicemente degenerare, con la proiettività fondamentale che leghi rispettivamente x ed y , z e t , allora la caratteristica di L , come quella (9) delle due matrici (10) è due. Altrimenti è uno.

(9) Cfr. T, n. 35, pag. 37.

54 - Tipo generale dell'equazione rappresentabile con un nomogramma a doppio allineamento a cerniera e scale rettilinea - Sua dissociazione.

Siamo ora in grado di stabilire quale sia la condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione del tipo (1) del capitolo IV sia rappresentabile mediante un nomogramma a doppio allineamento con scale e cerniera rettilinee.

Anzitutto mediante le (2) del cap. IV essa si deve ridurre al tipo quadrilineare (1) di questo capitolo⁽¹⁰⁾. Inoltre almeno una delle tre matrici L M N deve avere la caratteristica minore od uguale a due.

Sia ad es. L quella di caratteristica più bassa, uguale a due; e sia ad es.:

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1211} \\ a_{1112} & a_{1212} \end{vmatrix}$$

un suo minore diverso da zero. Posto:

$$B_{lm} \equiv \sum_{ik} a_{iklm} x_i y_k \quad (i, k, l, m = 1, 2),$$

sarà:

$$B_{21} \equiv \lambda_1 B_{11} + \lambda_2 B_{12} \quad , \quad B_{22} \equiv \mu_1 B_{11} + \mu_2 B_{12} \quad ,$$

dove λ_1 λ_2 e μ_1 μ_2 sono dati dai sistemi:

$$\begin{cases} a_{1121} = \lambda_1 a_{1111} + \lambda_2 a_{1112} \\ a_{1221} = \lambda_1 a_{1211} + \lambda_2 a_{1212} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a_{1122} = \mu_1 a_{1111} + \mu_2 a_{1112} \\ a_{1222} = \mu_1 a_{1211} + \mu_2 a_{1212} \end{cases} \quad ,$$

il cui determinante è per ipotesi diverso da zero. Quindi la (1) si scrive:

$$B_{11}(z_1 t_1 + \lambda_1 z_2 t_1 + \mu_1 z_2 t_2) + B_{12}(z_1 t_2 + \lambda_2 z_2 t_1 + \mu_2 z_2 t_2) = 0 \quad ,$$

⁽¹⁰⁾ M. D'OCAGNE chiama con R. SORREAU una tale equazione « *nomograficamente razionale, di ordine nomografico quattro, a quattro variabili* » (Cfr. E. p. 41-42).

e la quadrilinearità può pensarsi come il prodotto delle due trilinearità :

$$(11) \quad \xi_1 B_{11} - \xi_2 B_{12} = 0 ,$$

$$(12) \quad \xi_1 (x_1 t_2 + \lambda_2 x_2 t_1 + \mu_2 x_2 t_2) + \xi_2 (x_1 t_1 + \lambda_1 x_2 t_1 + \mu_1 x_2 t_2) = 0 ,$$

col sostegno comune ξ .

Dopo di che le (11), (12) debbono essere reali e, se duplo-singolari, iperboliche. Perchè siano reali occorre e basta che siano reali i coefficienti della (11) e della (12), e quindi quelli della (1). Per il resto che i loro discriminanti Δ_1 e Δ_2 siano maggiori od eguali a zero ⁽¹¹⁾.

Se la minima delle caratteristiche suddette, ad es. quella di L , vale 1, allora le quattro forme B_{im} differiscono solo per un fattore di proporzionalità. Se ad es. gli elementi della prima riga di L non sono tutti nulli, sarà :

$$B_{12} \equiv \lambda_1 B_{11} , \quad B_{21} \equiv \lambda_2 B_{11} , \quad B_{22} \equiv \lambda_3 B_{11} ,$$

e la (1) si scrive :

$$(13) \quad (a_{1111} x_1 y_1 + a_{1211} x_1 y_2 + a_{2111} x_2 y_1 + a_{2211} x_2 y_2) (x_1 t_1 + \lambda_1 x_1 t_2 + \lambda_2 x_2 t_1 + \lambda_3 x_2 t_2) = 0 ,$$

cosicchè per rappresentare nomograficamente l'equazione data sarà sufficiente costruire separatamente la rappresentazione delle due proiettività le cui equazioni si ottengono annullando ciascuno dei due fattori al primo membro della (13). Inoltre quelle proiettività, cioè i coefficienti delle loro equazioni e quindi quelli della (1), dovranno essere reali.

⁽¹¹⁾ Quest' ultima condizione è superflua, se non si prescrive che i sostegni delle scale debbano essere rettilinei. Abbiamo infatti già visto come sia possibile rappresentare con un nomogramma a punti allineati anche una trilinearità ellittica, ad es. prendendo come sostegno comune a due delle scale una medesima conica (cfr. nota ⁽⁷⁾ al n. 21) e come sostegno della terza scala una retta.