

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA SELABASSO

## **I complessi lineari involutori**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 16 (1947), p. 159-211

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1947\\_\\_16\\_\\_159\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1947__16__159_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## I COMPLESSI LINEARI INVOLUTORI

*Memoria (\*) di MARIA SELABASSO (a Sequals - Udine)*

La nozione di *prodotto* di due complessi lineari di spazi  $S_h$  ed  $S_k$  contenuti in un  $S_n$  e subordinatamente, se  $h + k + 1 = n$ , la nozione di *complessi lineari involutori* è stata introdotta nella forma più generale attraverso l'algoritmo di rappresentazione dei complessi lineari mediante forme differenziali simboliche a coefficienti costanti da A. COMESSATTI nel suo commento alla Nota di U. MORIN: *Sugli indici di singolarità a più dimensioni delle varietà abeliane*, pubblicato nel 1934 nei Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova.

In questo lavoro, che sostanzialmente riproduce la mia dissertazione di laurea <sup>(1)</sup>, io mi propongo di entrare maggiormente in dettagli su tale argomento, prendendo in considerazione tutti i tipi di prodotti ed i casi d'involutorietà di complessi lineari, che si presentano negli spazi delle cinque prime dimensioni.

Ho creduto opportuno premettere alla parte centrale della trattazione alcuni richiami sulle coordinate grassmanniane degli spazi subordinati in un  $S_n$  e sui relativi algoritmi di trasformazione, sulla notazione differenziale e sulle nozioni di prodotto e di involutorietà dei complessi lineari.

Quest'ultima nozione è stata da me estesa, dietro consiglio del COMESSATTI, anche al caso di complessi lineari di spazi di

(\*) Pervenuta in Redazione il 25 Agosto 1945.

(1) Discussa il 9 - 6 - 1940, relatore il prof. A. COMESSATTI ed eseguita nel Seminario Matematico dell'Università di Padova.

dimensioni non duali, e questo basandosi sul concetto di *complesso lineare identico*. I casi ch'io ho trattato particolareggiatamente nel mio lavoro, si riferiscono, però, solo all'involutorietà di spazî a *dimensioni duali*. Per distinguerli da quello generale, li ho chiamati casi *normali* d'involutorietà.

Nella ricerca delle condizioni d'involutorietà ho spesso adottato il principio, basato sulla proprietà associativa del prodotto di complessi lineari, secondo il quale un complesso lineare si può pensare scomposto nel prodotto di più altri. Tale principio, in assenza di altri criteri immediatamente applicabili, mi è riuscito di grande utilità.

## CAP. I - NOZIONI INTRODUTTIVE

**§ 1. - Richiami sulla nozione di coordinate  
grassmanniane<sup>(2)</sup> di un  $S_k$  in un  $S_n$  e relativi algoritmi  
di trasformazione.**

1. - Riferiamo lo spazio  $S_n$  ad un sistema di coordinate proiettive omogenee, di cui  $A_0, A_1, \dots, A_n$  siano gli  $n + 1$  punti fondamentali, e indichiamo con  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) le coordinate proiettive omogenee di punto relative a questo sistema. Sia  $S_k$  uno spazio subordinato in  $S_n$ : si definiscono come *coordinate grassmanniane dell'  $S_k$  in  $S_n$  gli  $\binom{n+1}{k+1}$  minori d'ordine  $k + 1$  tra loro distinti e non tutti nulli, che si possono estrarre dalla matrice:*

$$\begin{vmatrix} x_0^{(0)} & x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(0)} & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(k)} \end{vmatrix}$$

formata con le coordinate di  $k + 1$  punti linearmente indipendenti di  $S_k$ . Tali coordinate s'indicano brevemente col simbolo  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$  ove  $i_0 i_1 \dots i_k$  è una qualunque disposizione di classe  $k + 1$  dei numeri  $0, 1, \dots, n$ , notando che ogni altra coordinata  $X_{i_{s_0} i_{s_1} \dots i_{s_k}}$  di  $S_k$ , per la quale  $i_{s_0} i_{s_1} \dots i_{s_k}$  è una permutazione degl'indici  $i_0 i_1 \dots i_k$ , differisce dalla coordinata  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$  al più per il segno; anzi essa ha lo stesso segno di  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$  oppure il contrario secondochè la sostituzione  $\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \dots & i_k \\ i_{s_0} & i_{s_1} & \dots & i_{s_k} \end{pmatrix}$  è di

<sup>(2)</sup> Per notizie più dettagliate e dimostrazioni a questo proposito veggasi:  
BERTINI - *Geometria proiettiva degl'iperspazi* - cap. 2º, nn. 15-16-17-18.

classe pari o dispari; vale a dire le coordinate grassmanniane soddisfano alla *legge di emisimmetria* (hanno, cioè, comportamento alternato) di fronte alle permutazioni degli indici.

Osserviamo poi che, essendo gli  $S_k$  di  $S_n \infty^{(n-k)(k+1)}$ , le loro  $\binom{n+1}{k+1}$  coordinate sono *sovrabbondanti*; si dimostra, infatti, che di esse solo  $(n-k)(k+1)+1$  sono indipendenti e che, non appena due  $S_k$  di  $S_n$  hanno  $(n-k)(k+1)+1$  coordinate uguali (o proporzionali), essi (in generale) coincidono. Perciò gli  $S_k$  d'un  $S_n$  si possono interpretare come punti d'una varietà  $V_{(n-k)(k+1)}$  immersa in un  $S_{\binom{n+1}{k+1}-1}$ : tale varietà viene chiamata *varietà grassmanniana*.

**2.** - Dalla definizione stessa di coordinate grassmanniane di un  $S_k$  in  $S_n$  risulta che *le coordinate grassmanniane di un  $S_k$  di  $S_n$  coincidono con le sue coordinate proiettive omogenee  $x_0, x_1, \dots, x_n$* .

Quanto alle *coordinate grassmanniane  $X_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$  d'un  $S_{n-1}$*  dimostriamo ch'esse *altro non sono che le ordinarie coordinate plückeriane d'iperpiano*, cioè gli  $n+1$  coefficienti  $u_i$  della sua equazione:  $\sum_0^n u_i x_i = 0$ .

Infatti, anzitutto le coordinate grassmanniane d'un  $S_{n-1}$  sono  $\binom{n+1}{n} = n+1$ , cioè tante quante sono le sue coordinate plückeriane; inoltre, per definizione, esse sono i minori d'ordine  $n$ , tra di loro distinti, estratti dalla matrice formata con le coordinate di  $n$  punti linearmente indipendenti  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  dell' $S_{n-1}$ . Orbene tale matrice è la matrice dei coefficienti del sistema di  $n$  equazioni omogenee:

$$\sum_0^n u_i x_i^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

nelle  $n+1$  incognite  $u_i$ , ottenuto esprimendo che gli  $n$  punti  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  appartengono all' $S_{n-1}$  d'equazione:  $\sum_0^n u_i x_i = 0$ . Siccome per l'indipendenza dei punti  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  tale matrice ha caratteristica  $n$ , in base alla regola di ROUCHÉ-CAPELLI avremo:

$$(1) \quad \rho u_i = (-1)^i X_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

il che dimostra la proporzionalità tra le coordinate plückeriane d'iperpiano e le quantità  $(-1)^i X_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$ . Orbene nel formare le coordinate grassmanniane d'un  $S_k$  in  $S_n$  possiamo, a nostro piacere, scegliere, anzichè le coordinate del tipo  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$ , le coordinate  $X_{i_{i_0} i_{i_1} \dots i_{i_k}}$ , ove  $i_{i_0} i_{i_1} \dots i_{i_k}$  è una permutazione degli indici  $i_0, i_1, \dots, i_k$ ; possiamo così stabilire di prendere come coordinate grassmanniane del nostro  $S_{n-1}$  le coordinate  $X_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ , per le quali sia:  $X_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} = (-1)^i X_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$ . Allora le relazioni (1) si riducono alle:

$$\rho u_i = X_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

dalle quali resta provato quanto volevamo dimostrare.

**3.** - Ricerchiamo ora le *formule di trasformazione delle coordinate grassmanniane d'un  $S_k$  per effetto d'una trasformazione delle coordinate proiettive di punto.*

Indichiamo con  $y_i$  e  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) rispettivamente le coordinate proiettive di punto nel vecchio e nel nuovo sistema; il passaggio dall'uno all'altro sistema sia rappresentato dalla sostituzione lineare:

$x_i = \sum_0^n a_{is} y_s$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ), nella quale, come

facilmente si può verificare, è  $a_{is} = \frac{\partial x_i}{\partial y_s}$ . Consideriamo uno spa-

zio  $S_k$  di  $S_n$  e sieno  $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(k)}$ ;  $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)}$  le coordinate di  $k+1$  suoi punti linearmente indipendenti con riferimento al vecchio e al nuovo sistema di coordinate proiettive. Allora la coordinata grassmanniana generale di  $S_k$  nel nuovo sistema è data da:

$$X_{r_0 r_1 \dots r_k} = \begin{vmatrix} x_{r_0}^{(0)} & x_{r_0}^{(1)} & \dots & x_{r_0}^{(k)} \\ x_{r_1}^{(0)} & x_{r_1}^{(1)} & \dots & x_{r_1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r_k}^{(0)} & x_{r_k}^{(1)} & \dots & x_{r_k}^{(k)} \end{vmatrix}$$

e, con passaggio al vecchio sistema di coordinate proiettive di punto, da:

$$X_{r_0 r_1 \dots r_k} = \begin{vmatrix} a_{r_0,0} y_0^{(0)} + \dots + a_{r_0,n} y_n^{(0)} & a_{r_0,0} y_0^{(1)} + \dots + a_{r_0,n} y_n^{(1)} & \dots & a_{r_0,0} y_0^{(k)} + \dots + a_{r_0,n} y_n^{(k)} \\ a_{r_1,0} y_0^{(0)} + \dots + a_{r_1,n} y_n^{(0)} & a_{r_1,0} y_0^{(1)} + \dots + a_{r_1,n} y_n^{(1)} & \dots & a_{r_1,0} y_0^{(k)} + \dots + a_{r_1,n} y_n^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_k,0} y_0^{(0)} + \dots + a_{r_k,n} y_n^{(0)} & a_{r_k,0} y_0^{(1)} + \dots + a_{r_k,n} y_n^{(1)} & \dots & a_{r_k,0} y_0^{(k)} + \dots + a_{r_k,n} y_n^{(k)} \end{vmatrix};$$

ma il determinante ora scritto, in base alla definizione di moltiplicazione per righe di due matrici simili, risulta eguale al prodotto:

$$\begin{vmatrix} a_{r_0,0} & a_{r_0,1} & \dots & a_{r_0,n} \\ a_{r_1,0} & a_{r_1,1} & \dots & a_{r_1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_k,0} & a_{r_k,1} & \dots & a_{r_k,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_0^{(k)} & y_1^{(k)} & \dots & y_n^{(k)} \end{vmatrix}$$

e quindi, per il teorema di BINET:

$$X_{r_0 r_1 \dots r_k} = \sum_{s_0 s_1 \dots s_k} \begin{vmatrix} a_{r_0,s_0} & a_{r_0,s_1} & \dots & a_{r_0,s_k} \\ a_{r_1,s_0} & a_{r_1,s_1} & \dots & a_{r_1,s_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_k,s_0} & a_{r_k,s_1} & \dots & a_{r_k,s_k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{s_0}^{(0)} & y_{s_1}^{(0)} & \dots & y_{s_k}^{(0)} \\ y_{s_0}^{(1)} & y_{s_1}^{(1)} & \dots & y_{s_k}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{s_0}^{(k)} & y_{s_1}^{(k)} & \dots & y_{s_k}^{(k)} \end{vmatrix}$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le *combinazioni*  $s_0 s_1 \dots s_k$  degli indici  $0, 1, \dots, n$  a  $k + 1$  a  $k + 1$ . Se ricordiamo che

$a_{r_i,s_k} = \frac{\partial x_{r_i}}{\partial y_{s_k}}$ , il determinante che compare a primo fattore negli

addendi della sommatoria precedente altro non è che il determi-

nante funzionale  $\frac{D(x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k})}{D(y_{s_0}, y_{s_1}, \dots, y_{s_k})}$ , mentre il secondo determinante

è la coordinata grassmanniana  $y_{s_0 s_1 \dots s_k}$ : potremo perciò scrivere:

$$X_{r_0 r_1 \dots r_k} = \sum_{s_0 s_1 \dots s_k} \frac{D(x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k})}{D(y_{s_0}, y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} Y_{s_0 s_1 \dots s_k}$$

Tale relazione ci dà appunto il legame tra le vecchie e le nuove coordinate grassmanniane d'un  $S_k$ .

## § 2. - Forme differenziali simboliche e relative proprietà.

4. - Sieno  $u_0, u_1, \dots, u_n$   $n + 1$  variabili; dicesi *prodotto differenziale simbolico di grado  $k + 1$*  il prodotto:

$$du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_k}$$

dei differenziali di  $k + 1$  delle variabili considerate, con le convenzioni ch'esso soddisfi alla legge di emisimmetria di fronte alle permutazioni degl'indici e sia nullo quando in esso compaiono almeno due differenziali con gli stessi indici.

Dati allora due prodotti differenziali simbolici:  $du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_k}$  e  $du_{s_0} du_{s_1} \dots du_{s_h}$ , diremo *prodotto* di essi (nell'ordine) il prodotto differenziale seguente:

$$du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_k} du_{s_0} du_{s_1} \dots du_{s_h}.$$

Notiamo subito che tale prodotto è senz'altro nullo quando la somma dei gradi è  $h + k + 2 > n + 1$ , perchè allora in esso compaiono certamente due differenziali con indici eguali.

Consideriamo ora l'espressione:

$$\Phi_{h+1} = \sum_{r_0 r_1 \dots r_h} A_{r_0 r_1 \dots r_h} du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_h}$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le combinazioni degl'indici  $0, 1, \dots, n$  ad  $h + 1$  ad  $h + 1$ ; la  $\Phi_{h+1}$  dicesi *forma differenziale*



simbolica di grado  $h + 1$ . I coefficienti  $A_{r_0 r_1 \dots r_h}$ , che in essa compaiono, sono funzioni delle variabili, in particolare possono essere delle costanti.

5. — Dicesi *somma* di un numero qualunque di forme differenziali dello stesso grado  $p$  la forma simbolica di grado  $p$  ottenuta sommando successivamente le date forme e poi riducendo i termini, che differiscono per una permutazione degli indici, ad un unico termine in base alla legge di emisimmetria, a cui soddisfano i prodotti differenziali simbolici.

Analogamente dicesi *prodotto* di due forme differenziali simboliche (anche di grado diverso) la forma differenziale simbolica ottenuta facendo il prodotto, per ordine, dei termini della prima per quelli della seconda e poi riducendo ad uno solo i termini, che differiscono per una permutazione degl'indici, cioè:

$$\begin{aligned} & \Phi_p \cdot \Phi_q = \\ = & \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} du_{\alpha_1} du_{\alpha_2} \dots du_{\alpha_p} \cdot \Sigma B_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} du_{\beta_1} du_{\beta_2} \dots du_{\beta_q} = \\ = & \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} B_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} du_{\alpha_1} \dots du_{\alpha_p} du_{\beta_1} \dots du_{\beta_q} . \end{aligned}$$

La nozione di prodotto di due forme differenziali simboliche gode delle *proprietà associativa e distributiva rispetto alla somma*, non però della proprietà commutativa. Infatti facilmente si prova che:

$$\Phi_p \cdot \Phi_q = (-1)^{p \cdot q} \Phi_q \cdot \Phi_p$$

e quindi, se  $p$  e  $q$  sono numeri dispari, è:

$$(2) \quad \Phi_p \cdot \Phi_q + \Phi_q \cdot \Phi_p = 0$$

mentre, se uno almeno dei numeri  $p$  e  $q$  è pari, abbiamo:

$$\Phi_p \cdot \Phi_q = \Phi_q \cdot \Phi_p .$$

Di qui si trae che *il prodotto di due forme differenziali, di cui una almeno di grado pari, è indipendente dall'ordine dei fattori.*

In particolare, se  $\Phi_q = \Phi_p$  e  $p = q$  è *dispari*, dalla (2) si trae:  $(\Phi_p)^2 = 0$ , ossia: *Il quadrato d'una forma differenziale simbolica di grado dispari è sempre nullo identicamente.*

Notiamo inoltre che, se nel prodotto di più forme differenziali scambiamo due fattori  $\Phi_\mu$  e  $\Phi_\nu$  non consecutivi di gradi rispettivamente  $p$  e  $q$  e la somma dei gradi delle forme tra loro comprese è  $r$ , sarà:

$$\begin{aligned} \dots \Phi_\mu \dots \Phi_\nu \dots &= (-1)^{p(q+r)+qr} \dots \Phi_\nu \dots \Phi_\mu \dots = \\ &= (-1)^{pq+r(p+q)} \dots \Phi_\nu \dots \Phi_\mu \dots \end{aligned}$$

per modo che, se nel prodotto v'è un *solo* fattore di grado dispari, uno solo dei tre numeri  $r$ ,  $p \cdot q$ ,  $p + q$  (anzi in tal caso  $p \cdot q$  è sempre pari) può essere dispari, per cui:  $p \cdot q + r(p + q)$  è sempre pari. Potremo quindi enunciare:

1) Il prodotto di più forme differenziali, di cui *una solamente* sia di grado *dispari*, è indipendente dall'ordine dei fattori.

2) Se nel prodotto di più forme differenziali si scambiano due fattori, i cui gradi sono della stessa parità, il prodotto cambia o no di segno secondochè i gradi dei due fattori sono entrambi dispari o pari. Ne segue:

3) Ogni prodotto di forme differenziali simboliche, che contenga due fattori eguali di grado dispari è *identicamente* nullo.

Di qui segue che *ogni potenza  $p^{\text{esima}}$  d'una forma differenziale di grado dispari è identicamente nulla.* Non altrettanto accade per una forma differenziale di grado pari; per essa, in base alla proprietà commutativa del prodotto di forme differenziali di grado pari, si trova che la potenza  $p^{\text{esima}}$  si ottiene moltiplicando per  $p!$  la somma di tutti i prodotti a  $p$  a  $p$  degli  $m$  prodotti differenziali di cui essa è somma.

Notiamo pure, in particolare, che il prodotto delle due forme  $\Sigma A_{r_0 r_1 \dots r_h} du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_h}$  e  $\Sigma B_{s_0 s_1 \dots s_k} du_{s_0} du_{s_1} \dots du_{s_k}$  qualora sia  $h + k + 2 = n + 1$ , riducesi al sol termine:

$$F(AB) du_0 du_1 \dots du_n,$$

dal momento che gli altri termini contengono tutti almeno due differenziali uguali.

**6.** — Vediamo ora *come si comportano i prodotti differenziali simbolici rispetto ad un cambiamento di variabili.*

Sia:

$$d u_{r_0} d u_{r_1} \dots d u_{r_h}$$

un prodotto differenziale simbolico relativo alle  $n + 1$  variabili  $u_0, u_1, \dots, u_n$ ; supponiamo di dover passare da queste variabili alle  $v_0, v_1, \dots, v_n$  mediante le  $n + 1$  relazioni:

$$u_i = u_i(v_0, v_1, \dots, v_n) \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

allora il differenziale  $d u_{r_i}$  sarà legato ai differenziali delle nuove variabili dalla relazione:

$$d u_{r_i} = \sum_0^n \frac{\partial u_{r_i}}{\partial v_i} d v_i$$

per cui sarà:

$$\begin{aligned} d u_{r_0} d u_{r_1} \dots d u_{r_h} &= \prod_0^h d u_{r_i} = \prod_0^h \left\{ \sum_0^n \frac{\partial u_{r_i}}{\partial v_i} d v_i \right\} = \\ &= \Sigma C_{s_0 s_1 \dots s_h} d v_{s_0} d v_{s_1} \dots d v_{s_h}, \end{aligned}$$

ove la sommatoria va estesa a *tutte le combinazioni, opportunamente ordinate*, degl'indici  $0, 1, \dots, n$  ad  $h + 1$  ad  $h + 1$ .

Calcoliamo ora i coefficienti  $C_{s_0 s_1 \dots s_h}$ . Per questo notiamo che, se il prodotto differenziale simbolico:  $d v_{s_0} d v_{s_1} \dots d v_{s_h}$  si è costruito prendendo  $d v_{s_0}$  nel primo,  $d v_{s_1}$  nel secondo,  $\dots$ ,  $d v_{s_h}$

nell' $h + 1$ esimo fattore del prodotto  $\prod_0^h \left\{ \sum_0^n \frac{\partial u_{r_i}}{\partial v_i} d v_i \right\}$ , allora il

suo coefficiente è:  $\frac{\partial u_{r_0}}{\partial v_{s_0}} \cdot \frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{s_1}} \dots \frac{\partial u_{r_h}}{\partial v_{s_h}}$ . Perciò, se  $s'_0 s'_1 \dots s'_h$

è una permutazione degl'indici  $s_0 s_1 \dots s_h$ , il coefficiente del prodotto  $d v'_{s'_0} d v'_{s'_1} \dots d v'_{s'_h}$  sarà dato da:  $(-1)^p \frac{\partial u_{r_0}}{\partial v_{s'_0}} \cdot \frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{s'_1}} \dots \frac{\partial u_{r_h}}{\partial v_{s'_h}}$ ,

essendo  $p$  la classe della sostituzione  $\begin{pmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots & s'_h \\ s_0 & s_1 & \dots & s_h \end{pmatrix}$ .

Sarà quindi:

$$C_{s_0 s_1 \dots s_h} = \sum (-1)^p \frac{\partial u_{r_0}}{\partial v_{s_0}} \cdot \frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{s_1}} \dots \frac{\partial u_{r_h}}{\partial v_{s_h}},$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le *permutazioni* degl'indici  $s_0, s_1, \dots, s_h$ ; ma allora, ricordando la definizione di valore d' un determinante, possiamo scrivere:

$$C_{s_0 s_1 \dots s_h} = \frac{D(u_{r_0} u_{r_1} \dots u_{r_h})}{D(v_{s_0} v_{s_1} \dots v_{s_h})}$$

e la relazione, che cercavamo, diventa:

$$d u_{r_0} d u_{r_1} \dots d u_{r_h} = \sum \frac{D(u_{r_0} u_{r_1} \dots u_{r_h})}{D(v_{s_0} v_{s_1} \dots v_{s_h})} d v_{s_0} d v_{s_1} \dots d v_{s_h},$$

ove, come abbiamo già detto, la sommatoria va estesa a tutte le combinazioni, opportunamente ordinate, degl'indici  $0, 1, \dots, n$  ad  $h + 1$  ad  $h + 1$ .

Notiamo infine, senza dimostrarlo, che la nozione di *prodotto di due forme differenziali simboliche è invariante per cambiamenti di variabili*, vale a dire si può indifferentemente eseguire prima il prodotto e poi il cambiamento di variabili o viceversa.

CAP. II - PRODOTTI DI COMPLESSI LINEARI DI SPAZI  $S_k$   
SUBORDINATI IN UN  $S_n$ .

§ 1. - Nozioni generali.

I. - Complessi lineari di  $S_k$  in  $S_n$ .

7. - **Def.** *Dicesi complesso lineare di  $S_k$  in un  $S_n$  l'insieme  $H$  degli spazii  $S_k$  subordinati in  $S_n$ , che con le loro coordinate soddisfano all'equazione lineare:*

$$(1) \quad \sum_{r_0 r_1 \dots r_k} A_{r_0 r_1 \dots r_k} X_{r_0 r_1 \dots r_k} = 0,$$

ove i coefficienti  $A_{r_0 r_1 \dots r_k}$  sono delle costanti.

Consideriamo uno spazio  $S_m$  subordinato in  $S_n$  ed interpretiamo in esso la relazione (1): abbiamo allora il seguente:

**Lemma:** *Un complesso lineare di spazii  $S_k$  in un  $S_n$  individua in uno spazio  $S_m$  ( $m > k$ ), subordinato in  $S_n$ , ancora un complesso lineare di spazii  $S_k$ .*

Per questo scegliamo lo spazio  $S_m$  *fondamentale* (al qual caso possiamo sempre ridurci mediante un opportuno cambiamento di coordinate), per es. quello individuato dai vertici  $A_0, A_1, \dots, A_m$  della piramide fondamentale delle coordinate. Allora per interpretare l'espressione (1) nello spazio  $S_m$  basta far sistema di essa con le  $n - m$  equazioni  $x_j = 0$  ( $j = m + 1, \dots, n$ ) dello spazio  $S_m$ , vale a dire basta sopprimere nella relazione (1) tutte le coordinate grassmanniane di  $S_k$  contenenti un indice maggiore di  $m$ . La relazione che così otteniamo, essendo ancora *lineare* nelle coordinate grassmanniane di  $S_k$ , ci rappresenta dunque un complesso lineare di  $S_k$  nell' $S_m$ , c. v. d.

**8.** - Notiamo che un complesso lineare di  $S_0$  è un iperpiano e un complesso lineare di  $S_{n-1}$  è un'iperstella.

Infatti, per quanto abbiamo visto al n. 2 del § 1 - cap. I a proposito delle coordinate grassmanniane di punto e d'iperpiano, l'equazione d'un complesso lineare di  $S_0$  e quella d'un complesso lineare di  $S_{n-1}$  assumono rispettivamente le espressioni:

$$\sum_0^n a_i x_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_0^n x_i u_i = 0;$$

orbene tali relazioni ci rappresentano appunto la prima l'  $S_{n-1}$  di coordinate  $a_i$  e la seconda l'iperstella di centro il punto  $x_i$ .

## II. - Notazione differenziale e nozione di prodotto di complessi lineari.

**9.** - Sappiamo dal cap. I che il comportamento delle coordinate grassmanniane  $X$  d'un  $S_k$  in  $S_n$  è caratterizzato dalle proprietà seguenti:

a) Le  $X$  soddisfanno alla legge di *emisimmetria* di fronte alle permutazioni degli indici, in particolare una  $X$  con due indici eguali è nulla;

b) Per una trasformazione di coordinate che faccia passar dalle  $y_i$  alle  $x_i$  esse si trasformano secondo la legge espressa dalla formula:

$$X_{r_0 r_1 \dots r_k} = \sum_{s_0 s_1 \dots s_k} \frac{D(x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k})}{D(y_{s_0}, y_{s_1}, \dots, y_{s_k})} Y_{s_0 s_1 \dots s_k}.$$

Ciò mostra che le  $X$  si comportano alla stregua dei *prodotti differenziali simbolici*  $du_{r_0} du_{r_1} \dots du_{r_k}$ , di cui pure abbiamo parlato nel capitolo precedente. Appunto tale identità di comportamento suggerisce l'idea d'introdurre per i complessi lineari in discorso la *notazione simbolica* che deriva dal sostituire nel primo membro dell'equazione d'un complesso lineare al posto delle coordinate i corrispondenti prodotti differenziali. Con tale sostituzione il primo membro dell'equazione d'un complesso lineare di

$S_k$  in  $S_n$  assume l'aspetto d'una *forma differenziale simbolica*  $\Phi$  (di grado  $k + 1$  in  $n + 1$  variabili) a coefficienti costanti. Or bene diremo che quella forma *rappresenta il complesso* e designeremo il complesso con la stessa lettera  $\Phi$  o, più compiutamente, con  $\Phi_{k+1}$ , ove interessi mettere in vista la dimensione  $k$  degli elementi del complesso.

Va avvertito che un complesso lineare individua la corrispondente forma  $\Phi$  solo a meno d'un fattore costante e che pertanto due forme  $\Phi$ , differenti per un fattore costante (in particolare per il segno) rappresentano lo stesso complesso.

**10.** - I vantaggi della nuova notazione si rilevano principalmente attraverso il trasporto ai complessi della nozione di *prodotto di due o più forme differenziali simboliche*. Infatti, poichè ad ogni complesso lineare di spazi  $S_k$  in  $S_n$  è associata una forma differenziale di grado  $k + 1$  in  $n + 1$  variabili, dati in  $S_n$  due complessi lineari, uno di  $S_k$  e l'altro di  $S_k$ , potremo considerare il complesso lineare di spazi  $S_{k+k+1}$  legato al prodotto delle corrispondenti forme differenziali. Questo prodotto, se esiste, lo chiameremo *prodotto dei due complessi considerati*.

**11.** - Come già per le forme differenziali simboliche la nozione di *prodotto di due complessi lineari* si estende facilmente al caso di più complessi lineari e, come per le forme differenziali, esso gode della *proprietà associativa*; anzi conviene osservare che, mentre nel prodotto di due forme differenziali il segno dipende in generale dall'ordine dei fattori, questo non accade per il prodotto di due complessi lineari, dal momento che il complesso prodotto si rappresenta eguagliando a zero la forma prodotto. Si ha dunque che il prodotto dei complessi lineari gode anche della *proprietà commutativa*.

Notiamo inoltre che, essendosi definito il prodotto di due complessi lineari in base alla nozione di prodotto di due forme differenziali simboliche, il prodotto di complessi lineari gode della proprietà di essere *invariante* per trasformazioni di coordinate. Per ragioni analoghe si vede che *il quadrato d'un complesso lineare di  $S_k$ , con  $k$  pari, è identicamente nullo*, ossia esso è, come diremo nel seguito, un *complesso identico*.

### III. - Complessi involutori e complesso identico.

**12.** - Se nel fare il prodotto di due complessi lineari, uno di  $S_h$  e l'altro di  $S_k$ , in  $S_n$  le dimensioni  $h$  e  $k$  sono tali che  $h + k + 1 > n$ , il prodotto *svanisce* sempre; in tal caso non ha quindi senso parlare di prodotto di due complessi. Se invece accade che sia  $h + k + 1 = n$ , il prodotto dei due complessi lineari contiene un *sol* termine e allora, quando il coefficiente di quel termine è eguale a zero, si dice che *i due complessi sono in involuzione*.

La nozione di complessi lineari involutori si estende anche al caso di più di due complessi; così, ad es., tre complessi lineari  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Phi_{k+1}$ ,  $\Phi_{l+1}$ , tali che sia  $h + k + l + 3 = n + 1$ , si dicono involutori se il coefficiente dell'unico termine del loro prodotto è eguale a zero.

**13.** - Facciamo ora alcune *convenzioni*.

Se nell'equazione d'un complesso lineare di spazi  $S_h$  in  $S_n$  tutti i coefficienti sono nulli, in effetto il complesso non esiste; *converremo* che una tal equazione rappresenti il *complesso identico*. Considereremo un simile complesso lineare come il complesso di tutti gli spazi  $S_h$  di  $S_n$  in quanto che le coordinate grassmanniane d'un qualunque  $S_h$  di  $S_n$  soddisfano alla sua equazione, essendo essa a coefficienti tutti nulli.

*Converremo* inoltre di considerare anche la coordinata grassmanniana  $X_{01\dots n} \neq 0$  di un  $S_n$  in se stesso. Potremo perciò pensare che il simbolo  $C \cdot X_{01\dots n} = 0$  rappresenti il complesso lineare di  $S_n$  in  $S_n$  stesso. Tale complesso sarà identico allorchè  $C = 0$ .

**14.** - Dalle convenzioni ora fatte segue una *nuova* enunciazione della condizione d'involutorietà di due complessi lineari: *Due complessi lineari  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Phi_{k+1}$ , con  $h + k + 2 = n + 1$ , sono involutori allorchè il loro prodotto è identico.*

Sotto questa nuova forma la condizione d'involutorietà di due complessi lineari può venir *estesa* anche al caso in cui le dimensioni degli spazi dei due complessi *non sono duali*, *conve-*



nendo di chiamare involutori due complessi lineari qualunque, il cui prodotto sia identico.

D'ora in poi il caso d'involutorietà, in cui sia  $h + k = n - 1$ , lo distingueremo dal caso generale chiamandolo caso *normale* d'involutorietà.

#### IV. - Spazi totali d'un complesso lineare.

**15.** - Sappiamo che un complesso lineare di  $S_h$  in  $S_n$  subordina in un  $S_m$  ( $h < m < n$ ) un altro complesso lineare di  $S_h$ ; orbene può darsi che questo complesso indotto sia identico. Allora tutti gli  $S_h$  di  $S_m$  appartengono al complesso considerato e  $S_m$  si dice uno *spazio totale* del complesso. In particolare, se  $m = h$ , dire che  $S_h$  è spazio totale del complesso significa dire ch'esso vi appartiene.

A proposito di spazio totale d'un complesso lineare vale la seguente osservazione:

*L'  $S_m$  fondamentale individuato dai primi  $m + 1$  vertici della piramide delle coordinate di  $S_n$  è uno spazio totale per un complesso lineare di  $S_h$  quando nell'equazione del complesso mancano tutti i coefficienti delle coordinate grassmanniane corrispondenti alle combinazioni di classe  $h + 1$  degli indici  $0, 1, \dots, m$ .*

Difatti, poichè lo spazio  $S_m$  ( $m > h$ ) è individuato dai vertici  $A_0, A_1, \dots, A_m$  della piramide fondamentale, gli  $S_h$  di  $S_m$  hanno le coordinate contenenti un'indice maggiore di  $m$  tutte nulle e quindi l'equazione del complesso lineare di  $S_h$  subordinato in  $S_m$  dal complesso considerato si riduce a contenere solamente le coordinate grassmanniane di  $S_h$  corrispondenti alle combinazioni di classe  $h + 1$  degl'indici  $0, 1, \dots, m$ . Ma per ipotesi i coefficienti di tali coordinate sono tutti nulli, perciò il complesso lineare indotto in  $S_m$  dal complesso considerato è identico e di conseguenza  $S_m$  risulta spazio totale del complesso, c. v. d.

In particolare, se  $h = m$ , condizione perchè lo  $S_h$  fondamentale individuato dai primi  $h + 1$  vertici della piramide delle coordinate appartenga al complesso lineare considerato è che in esso il coefficiente della coordinata  $X_{01\dots h}$  sia nullo.

**16. - Teorema:** *Dati due complessi lineari  $\Phi$  e  $\Psi$  di spazi  $S_h$  ed  $S_k$  in  $S_n$  e considerati i due complessi  $\Phi'$  e  $\Psi'$  da essi indotti in un  $S_m$ , il prodotto  $\Phi \cdot \Psi$  subordina in  $S_m$  il complesso  $\Phi' \cdot \Psi'$ .*

Per vedere questo, indichiamo con  $r_0 r_1 \dots r_h$  ed  $r'_0 r'_1 \dots r'_h$  due generiche combinazioni di classe  $h + 1$  rispettivamente dei numeri  $0, 1, \dots, n$  e  $0, 1, \dots, m$ ; con  $s_0 s_1 \dots s_k$  e  $s'_0 s'_1 \dots s'_k$  due generiche combinazioni di classe  $k + 1$  rispettivamente dei numeri  $0, 1, \dots, n$  e  $0, 1, \dots, m$  e con  $r_0 \dots r_h s_0 \dots s_k$  ed  $r'_0 \dots r'_h s'_0 \dots s'_k$  due generiche combinazioni di classe  $h + k + 2$  sempre rispettivamente dei numeri  $0, 1, \dots, n$  e  $0, 1, \dots, m$ . Allora, se:

$$(2) \quad \sum A_{r_0 r_1 \dots r_h} X_{r_0 r_1 \dots r_h} = 0 \quad \text{e} \quad \sum B_{s_0 s_1 \dots s_k} X_{s_0 s_1 \dots s_k} = 0$$

sono le equazioni dei due complessi  $\Phi$  e  $\Psi$ , l'equazione del loro prodotto sarà:

$$(3) \quad \sum A_{r_0 r_1 \dots r_h} B_{s_0 s_1 \dots s_k} X_{r_0 r_1 \dots r_h s_0 s_1 \dots s_k} = 0.$$

Prendiamo per  $S_m$  lo spazio fondamentale individuato dai primi  $m + 1$  vertici della piramide delle coordinate; allora le equazioni dei due complessi  $\Phi'$  e  $\Psi'$  in esso subordinati rispettivamente da  $\Phi$  e  $\Psi$  si ottengono dalle (2) sopprimendovi tutte le coordinate contenenti un indice maggiore di  $m$ ; perciò le equazioni di  $\Phi'$  e  $\Psi'$  saranno:

$$\sum A_{r'_0 r'_1 \dots r'_h} X_{r'_0 r'_1 \dots r'_h} = 0 \quad \text{e} \quad \sum B_{s'_0 s'_1 \dots s'_k} X_{s'_0 s'_1 \dots s'_k} = 0$$

e quella del loro prodotto  $\Phi' \cdot \Psi'$ :

$$\sum A_{r'_0 r'_1 \dots r'_h} B_{s'_0 s'_1 \dots s'_k} X_{r'_0 r'_1 \dots r'_h s'_0 s'_1 \dots s'_k} = 0.$$

Ma questa è, come facilmente si riconosce, la relazione che otteniamo dall'equazione (3) sopprimendovi le coordinate grassmanniane di  $S_{h+k+1}$  contenenti un indice maggiore di  $m$ ; essa ci rappresenta dunque il complesso lineare  $(\Phi \cdot \Psi)'$  subordinato in  $S_m$  da  $\Phi \cdot \Psi$ .

Ne segue che la condizione affinché  $S_m$  sia spazio totale per il complesso  $\Phi \cdot \Psi$  è che il complesso  $\Phi' \cdot \Psi'$  sia identico.

Nel caso particolare in cui sia  $m = h + k + 1$  possiamo enunciare: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un  $S_{h+k+1}$  appartenga al complesso lineare  $\Phi_{h+k+2} = \Phi_{h+1} \cdot \Psi_{k+1}$  è che  $\Phi_{h+k+2}$  vi subordini il complesso identico.* Ma il complesso subordinato da  $\Phi_{h+k+2}$  è  $\Phi'_{h+1} \cdot \Psi'_{k+1}$ ; sussiste dunque il seguente:

**Teorema:** *Il complesso lineare  $\Phi_{h+k+2}$ , prodotto di due complessi lineari  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Phi_{k+1}$  ( $h + k < n - 1$ ) è l'insieme degli  $S_{h+k+1}$ , entro ai quali i due complessi dati subordinano complessi in involuzione.*

#### V. - Casi elementari del prodotto e della condizione d'involutorietà di complessi lineari di $S_h$ in $S_n$ .

**17.** - *Condizione necessaria e sufficiente perchè in  $S_n$   $h + 1$  complessi lineari  $K_1$  (3) di punti siano involutori è che gli  $h + 1$  iperpiani da essi individuati siano dipendenti.*

Sieno infatti, col ricorso alla notazione differenziale:

$$(4) \quad \sum_0^n a_{tt} dx_t = 0 \quad (t = 0, 1, \dots, h)$$

le  $h + 1$  equazioni dei complessi  $K_1$  considerati. Essi saranno involutori se tutti i coefficienti dell'equazione del loro prodotto sono nulli. Ma tali coefficienti, come facilmente si vede ricorrendo alla notazione differenziale, altro non sono che i minori d'ordine  $h + 1$  della matrice dei coefficienti del sistema (4); quindi la condizione perchè gli  $h + 1$  complessi  $K_1$  considerati siano involutori è che la matrice del sistema della loro equazione abbia caratteristica minore di  $h + 1$ , vale a dire che gli  $h + 1$  iperpiani individuati dai  $K_1$  siano dipendenti.

(3) D'ora in poi indicheremo con  $K_i$  un complesso di  $S_{i-1}$ .

In particolare, se  $h = n$ , si cade in un caso normale d'involutorietà. L'unico coefficiente del prodotto è il determinante dei coefficienti del sistema formato con le equazioni degli  $n + 1$   $K_1$ ; si può dunque enunciare: *Condizione necessaria e sufficiente perchè in uno spazio  $S_n$   $n + 1$  complessi lineari  $K_1$  di punti siano involutori è che gli  $n + 1$  iperpiani da essi individuati siano dipendenti, vale a dire passino per un punto.*

**18.** - *La condizione perchè in un  $S_n$  un  $K_1$  ed un  $K_n$  siano involutori è che l'iperpiano rappresentante  $K_1$  appartenga all'iperstella rappresentante  $K_n$ .*

Infatti sieno:

$$\sum_0^n \lambda_i x_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_0^n \mu_i u_i = 0$$

le equazioni rispettivamente di  $K_1$  e di  $K_n$ . Ricordando le relazioni intercedenti tra le coordinate plückeriane e quelle grassmanniane omogenee d'un iperpiano (vedi n. 2) e ricorrendo alla notazione differenziale, le precedenti equazioni possono scriversi nel modo seguente:

$$\sum_0^n \lambda_i dx_i = 0; \quad \sum_0^n (-1)^i \mu_i dx_0 dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n = 0.$$

Se ne deduce che l'equazione del prodotto  $K_1 \cdot K_n$  riducesi al termine:

$$\left( \sum_0^n \lambda_i \mu_i \right) dx_0 dx_1 \dots dx_n = 0$$

e quindi i complessi  $K_1$  e  $K_n$  sono involutori se:

$$\sum_0^n \lambda_i \mu_i = 0,$$

ossia se l'iperpiano  $(\lambda)$  contiene il punto  $(\mu)$ , centro dell'iperstella.

**19.** - *Il prodotto di un  $K_1$  per un  $K_h$  è il complesso lineare  $K_{h+1}$  degli  $S_h$  passanti per gli  $S_{h-1}$  del complesso lineare subordinato dal  $K_h$  nell' $S_{n-1}$  rappresentante il  $K_1$ .*

Indichiamo con  $U$  l'iperpiano  $K_1$  e con  $K'_h$  il complesso in esso indotto dal  $K_h$ . Per un teorema precedente sappiamo che, se  $S_h$  è uno spazio del  $K_{h+1} = K_1 \cdot K_h$ , allora i due complessi  $K'_1$  e  $K'_h$  in esso subordinati rispettivamente da  $K_1$  e  $K_h$  risultano involutori, vale a dire che l' $S_{h-1}$  rappresentante il  $K'_1$  appartiene all'iperstella di  $S_{h-1}$  individuata dal  $K'_h$ . Evidentemente, però, il  $K'_1$  è l'intersezione di  $S_h$  con  $U$ , quindi appartiene al  $K'_h$ . Se ne deduce quanto volevasi dimostrare.

**20.** - *Il prodotto di  $h$   $K_1$  in  $S_n$  è il complesso lineare speciale  $K_h$  degli  $S_{h-1}$  appoggiati all'intersezione  $S_{n-h}$  degli  $h$  iperpiani corrispondenti ai  $K_1$ .*

Per questo notiamo che  $h$  complessi lineari  $K_1$  in  $S_n$ , ossia  $h$   $S_{n-1}$ , subordinano in uno spazio  $S_{h-1}$  altrettanti complessi  $K'_1$ , rappresentanti nell' $S_{h-1}$   $h$   $S_{h-2}$ ; sappiamo inoltre che il prodotto degli  $h$   $K_1$  in  $S_n$  induce nell' $S_{h-1}$  il prodotto degli  $h$   $K'_1$  corrispondenti e che l' $S_{h-1}$  appartiene al prodotto  $K_h$ , se il complesso lineare in esso subordinato dal  $K_h$  è identico. Orbene ciò accade se gli  $h$   $K'_1$  in  $S_{h-1}$  sono involutori, ossia (vedi fine n. 17) se gli  $h$   $S_{h-2}$ , individuati dagli  $h$   $K'_1$ , passano per un punto. Ma ciò significa che l' $S_{h-1}$  deve appoggiarsi all'intersezione  $S_{n-h}$  degli  $h$  iperpiani  $K_1$ ; resta così provato quanto volevasi.

Tale risultato vale anche nel caso in cui qualcuno dei  $K'_1$  sia identico, perchè allora lo spazio  $S_{h-1}$  giace in qualcuno degli  $S_{n-1}$ , quindi s'appoggia ad  $S_{n-h}$ .

## § 2. - Situazioni in $S_1$ .

### I. - Complessi lineari e condizione d'involutorietà di due $K_1$ .

**21.** - In uno spazio  $S_1$  possiamo considerare solo complessi lineari di punti. E siccome in  $S_1$  l'equazione di un  $K_1$  è del tipo:  $ax_0 + bx_1 = 0$ , se ne deduce che in  $S_1$  un  $K_1$  è un punto,

precisamente quello di coordinata non omogenea  $x = \frac{x_1}{x_0} = -\frac{a}{b}$ .

Quanto ai prodotti di complessi lineari in  $S_1$  ha senso solo la considerazione del caso d'involutorietà normale di due  $K_1$ . A questo proposito notiamo che, se:

$$\begin{cases} ax_0 + bx_1 = 0 \\ cx_0 + dx_1 = 0 \end{cases}$$

sono le equazioni di due  $K_1$ , il loro prodotto, col solito ricorso alla notazione differenziale, diventa:  $(ad - bc) dx_0 dx_1 = 0$ . Ne segue che i due complessi  $K_1$  sono involutori se:

$$ad - bc = 0,$$

cioè se i due punti da essi individuati coincidono.

### § 3. - Situazioni in $S_2$ .

#### I. - Complessi lineari e loro prodotti.

**22.** - In  $S_2$  possiamo considerare solamente complessi lineari di punti e di rette: i primi sono rappresentati da punteggiate:  $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ , i secondi da fasci di rette:  $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ .

Quanto ai prodotti di complessi lineari, escludendo i casi di involutorietà, che tratteremo in seguito, ha significato solamente il prodotto di due complessi lineari di  $S_0$ . A questo proposito notiamo come, in base all'osservazione generale fatta al n. 20, il prodotto di due  $K_1$  in  $S_2$  è il  $K_2$  rappresentato dal fascio di rette di centro l'intersezione delle due punteggiate individuate dai due  $K_1$ .

Tra i prodotti di complessi lineari potremmo considerare, in particolare, il quadrato di un  $K_1$ ; senonchè, trattandosi d'un complesso lineare di  $S_0$ , cioè di spazi di dimensioni pari, sappiamo (vedi fine n. 11) che il suo quadrato è identicamente nullo, non ha quindi senso la sua considerazione.

## II. - Casi normali d'involutorietà.

**23. - Condizione d'involutorietà di tre  $K_1$ .** - In base all'osservazione generale fatta alla fine del n. 17 possiamo affermare che *tre complessi lineari di punti in  $S_2$  sono involutori* se il determinante del sistema formato con le loro equazioni è eguale a zero, ossia *se le tre punteggiate che rappresentano i complessi lineari  $K_1$  passano per un punto.*

**24. - Condizione d'involutorietà d'un  $K_1$  e un  $K_2$ .** - Dall'osservazione fatta al n. 18 segue che *un  $K_1$  e un  $K_2$  in  $S_2$  sono involutori, se la retta sostegno del  $K_1$  appartiene al fascio individuato dal  $K_2$ .*

Notiamo che per la proprietà associativa, di cui gode il prodotto di complessi lineari, il caso d'involutorietà di tre  $K_1$  si riduce al caso d'involutorietà di un  $K_1$  e un  $K_2$  e viceversa.

### § 4. Situazioni in $S_3^*$ (4)

#### I. - Complessi lineari.

**25. -** In  $S_3^*$  possiamo considerare complessi lineari di punti, di rette e di piani. Quanto al loro significato geometrico notiamo che in  $S_3^*$  un  $K_1$  è rappresentato da un piano:  $ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$  e un  $K_2$  da una stella di piani:  $x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$ . Un  $K_3$ , invece, è il comune complesso lineare di rette dello spazio ordinario, la cui equazione viene indicata con la scrittura:

$$a_{01} p_{01} + a_{02} p_{02} + a_{03} p_{03} + a_{12} p_{12} + a_{23} p_{23} + a_{31} p_{31} = 0,$$

ove le  $p_{ik}$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ) sono le coordinate grassmanniane di retta in  $S_3^*$ . - Abbiamo così in  $S_3^*$  la distinzione di complessi

(4) Indicheremo con l'asterisco lo spazio  $S_3$ , in cui ora opereremo, per distinguerlo dagli altri eventuali  $S_3$ , da esso distinti, che dovremo considerare.

lineari  $K_2$  in *speciali* e *non speciali*, chiamandosi speciali quei complessi lineari, per cui risulta:  $a_{01} a_{23} + a_{02} a_{31} + a_{03} a_{12} = 0$ , ossia quei complessi, i coefficienti delle cui equazioni possono interpretarsi come coordinate di retta in  $S_3^*$ ; cosicchè *un complesso speciale  $K_2$  in  $S_3^*$  è rappresentato dall'insieme delle rette di  $S_3^*$  appoggiate ad una retta fissa (direttrice) di coordinate  $p'_{ik} = a_{lm}$  (ove gl'indici  $i, k$  ed  $l, m$  sono complementari e tali che la permutazione  $i k l m$  dei numeri 0, 1, 2, 3 risulti pari)*, dal momento che la relazione  $\Sigma p_{ik} p'_{lm} = 0$  esprime analiticamente la condizione d'incidenza delle rette di coordinate  $p_{ik}, p'_{lm}$ .

## II. - Prodotti di complessi lineari.

**26. - Prodotto di due  $K_1$ .** - Dall'osservazione generale del n. 20 segue che *il prodotto di due  $K_1$  in  $S_3^*$  è il complesso lineare speciale delle rette appoggiate all' $S_1$ , intersezione dei due  $S_2$  individuati dai due  $K_1$ , cioè il  $K_2$  delle rette appoggiate all' $S_1$ , le cui coordinate (assiali) sono date dai minori del 2° ordine tra loro distinti, che si possono estrarre dalla matrice dei coefficienti delle equazioni dei due  $K_1$  considerati.*

**27. - Prodotto di tre  $K_1$ .** - Sempre in base all'osservazione generale del n. 20 possiamo affermare che *il prodotto di tre  $K_1$  generici (il che ci assicura che i tre piani corrispondenti non appartengono ad un fascio) è il  $K_3$  rappresentato dalla stella di piani di centro il punto comune ai tre  $S_2$  individuati dai tre  $K_1$ .*

In particolare, se gli  $S_2$ , che rappresentano i tre  $K_1$ , appartengono ad un fascio, il complesso prodotto  $K_3$  risulta identico.

**28. - Prodotto di un  $K_1$  per un  $K_2$ .** - Per il teorema generale sul prodotto di complessi lineari possiamo senz'altro affermare che il prodotto di un  $K_1$  per un  $K_2$  è il  $K_3$  rappresentato dalla stella di  $S_2$ , entro ai quali i due complessi considerati,  $K_1$  e  $K_2$ , subordinano due complessi in involuzione.

Orbene sopra un piano  $\pi$  il complesso  $K_2$  subordina il  $K'_2$ , rappresentato dal fascio di rette avente per centro il punto  $P$  corrispondente del piano  $\pi$  nel sistema nullo di  $S_3^*$  individuato dal  $K_2$ , mentre il complesso  $K_1$  vi subordina il  $K'_1$ , rappresentato



dalla punteggiata  $r$ , intersezione di  $\pi$  col piano  $\sigma$ , individuato in  $S_3^*$  dal  $K_1$ . La condizione perchè su  $\pi$  i due complessi lineari  $K_1'$  e  $K_2'$  siano involutori è che la  $r$  passi per  $P$ , cioè appartenga al complesso  $K_2'$  e quindi a  $K_2$ . Se ne deduce che *il complesso lineare  $K_3 = K_1 \cdot K_2$  è costituito da tutti gli  $S_2$  che segano il piano  $\sigma$  secondo rette di  $K_2$ , cioè tutti i piani della stella di centro il punto  $S$  corrispondente di  $\sigma$  nel sistema nullo individuato in  $S_3^*$  dal  $K_2$ .*

### III. - Casi normali d'involutorietà.

**29. - Quattro  $K_1$ .** - Dall'osservazione generale fatta alla fine del n. 17 si deduce che *quattro  $K_1$  in  $S_3^*$  sono in involuzione allorquando i quattro piani da essi individuati passano per un punto, cioè appartengono ad una stella.*

**30. - Un  $K_1$  e un  $K_3$ .** - Analogamente, dall'osservazione generale del n. 18 segue che *in  $S_3^*$  un  $K_1$  ed un  $K_3$  sono involutori allorquando il piano  $\sigma$  che rappresenta il  $K_1$ , appartiene alla stella individuata dal  $K_3$ .*

**31. - Due  $K_2$ .** - Sieno:

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0$$

le equazioni dei due  $K_2$  considerati: la condizione affinchè essi siano in involuzione è la nota relazione di KLEIN:

$$\Sigma a_{ik} b_{lm} = 0,$$

ove, come precedentemente, gl'indici  $i, k$  ed  $l, m$  sono *complementari* e tali che la permutazione  $iklm$  dei numeri  $0, 1, 2, 3$  risulti *pari*. Perciò interpretando, com'è noto, le rette dell' $S_3^*$  come punti d'una quadrica  $V_4^2$  di  $S_5^{(5)}$ , i due complessi  $K_2$  sono in involuzione, se i due iperpiani, da essi individuati nell' $S_5$ , sono coniugati rispetto alla  $V_4^2$ .

(<sup>5</sup>) A tal proposito veggasi: BERTINI - *Geometria proiettiva degl'iperpazi* - cap. 6°, nn. 22, 23, 24, 25.

In particolare, se uno dei due  $K_2$  è speciale, la condizione d'involutorietà dei due complessi esprime che la direttrice del complesso speciale appartiene al complesso non speciale, mentre, se entrambi i complessi sono speciali, la condizione d'involutorietà si traduce nella condizione d'incidenza delle loro direttrici.

**32.** – Al caso d'involutorietà di due complessi lineari di rette in  $S_3^*$  si può dare una nuova ed interessante interpretazione, qualora i due complessi siano tra di loro distinti e non speciali. Tale nuova interpretazione si compendia nel seguente:

**Teorema:** *Condizione affinché due complessi lineari  $K$  e  $K'$  di rette in  $S_3^*$  siano involutori è che i due sistemi nulli corrispondenti  $N$  e  $N'$  siano permutabili o, ciò che è lo stesso, che il prodotto  $N \cdot N'$  sia un'omografia biassiale armonica (6).*

L'equivalenza delle due forme, sotto cui abbiamo enunciato il precedente teorema, discende dalle seguenti osservazioni:

Il prodotto di due sistemi nulli è, in generale, un'omografia biassiale: un'omografia, perchè prodotto di due reciprocità; biassiale perchè ammette per rette unite tutte le rette della congruenza lineare  $\Gamma$ , intersezione dei due complessi lineari  $K$  e  $K'$  corrispondenti ai due sistemi nulli. Sappiamo pure che le proiettività di  $S_3^*$  (in generale di  $S_n$ ) formano gruppo; tra gli elementi involutori di tale gruppo ci sono i sistemi nulli. Orbene sappiamo dalla teoria dei gruppi che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè due elementi involutori di un gruppo siano permutabili è che il loro prodotto sia involutorio.* Ne segue che l'omografia biassiale prodotto di due sistemi nulli permutabili è involutoria, quindi armonica; e viceversa, se il prodotto di due sistemi nulli è un'omografia biassiale armonica, i due sistemi nulli sono permutabili.

Fatte queste osservazioni, veniamo alla dimostrazione del teorema precedentemente enunciato.

(6) Questa nuova interpretazione del caso d'involutorietà di due complessi lineari di rette in  $S_3^*$  era già nota al KLEIN, il quale, però, la enuncia senza dimostrazione. Veggasi l'opera di KLEIN: *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades.*

Per la nota rappresentazione delle rette dell'  $S_3^*$  mediante i punti della  $V_4^2$  di  $S_5$  sappiamo come ogni trasformazione omografica dell'  $S_5$  che trasformi in sè la  $V_4^2$  è in  $S_3^*$  un'omografia o una correlazione e viceversa; in particolare ad un sistema nullo di  $S_3^*$  corrisponde in  $S_5$  un'omologia armonica che muta in sè la  $V_4^2$ , il cui asse è l'iperpiano individuato dall'equazione del complesso lineare di rette dell'  $S_3^*$ , relativo al sistema nullo considerato, e il cui centro è il polo di quest'iperpiano rispetto alla  $V_4^2$ .

Siano dunque  $\bar{K}$ ,  $\bar{K}'$  e  $\bar{P}$ ,  $\bar{P}'$  rispettivamente gli assi e i centri delle due omologie armoniche  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}'$  di  $S_5$  (che mutano in sè la  $V_4^2$ ), corrispondenti ai due sistemi nulli  $N$  e  $N'$ , individuati in  $S_3^*$  dai due complessi lineari di rette  $K$  e  $K'$ . In  $S_5$  il prodotto  $\bar{N} \cdot \bar{N}'$  è un'omografia, che trasforma in sè la  $V_4^2$  e che ha per punti uniti i punti dell'  $S_3$ , intersezione dei due iperpiani  $\bar{K}$  e  $\bar{K}'$ . L'intersezione di questo  $S_3$  con la  $V_4^2$  è una  $V_2^2$  che ha per immagine nell'  $S_3^*$  la congruenza lineare luogo di rette unite nell'omografia biassiale  $N \cdot N'$ .

Supponiamo ora che i due complessi  $K$  e  $K'$  siano involutori: allora i due iperpiani  $\bar{K}$  e  $\bar{K}'$ , da essi individuati in  $S_5$ , risultano coniugati rispetto alla  $V_4^2$ , cioè ognuno di essi contiene il polo dell'altro. Ma, dato che le due omologie  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  sono distinte e non speciali (il che resta provato dall'ipotesi che i complessi  $K$  e  $K'$  sono distinti e non speciali), questo equivale a dire che le due omologie  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  di  $S_5$  sono permutabili. Infatti dalla teoria generale dei gruppi sappiamo che due omologie  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  di  $S_5$  (in generale di  $S_n$ ), che siano permutabili ( $\bar{N} \cdot \bar{N}' = \bar{N}' \cdot \bar{N}$ ), sono tali che ognuna di esse trasforma l'altra in se medesima ( $\bar{N} = \bar{N}' \bar{N} \bar{N}'^{-1}$ ,  $\bar{N}' = \bar{N}^{-1} \bar{N} \bar{N}$ ), cioè sono tali che ognuna di esse trasforma in sè il centro e l'asse dell'altra e viceversa. Questo val quanto dire che il centro e l'asse della prima omologia devono essere rispettivamente punto e luogo di punti uniti per la seconda omologia e viceversa. Quindi il centro  $\bar{P}$  della prima omologia deve coincidere col centro  $\bar{P}'$  o stare sull'asse  $\bar{K}'$  della seconda omologia. Orbene, se fosse  $\bar{P} \equiv \bar{P}'$ , siccome

l'asse della prima dev'essere pure unito per la seconda omologia e d'altra parte esso non passa per  $\bar{P}$  (perchè  $K$  e  $K'$  non sono speciali), sarebbe pure  $\bar{K} \equiv \bar{K}'$  e le due omologie, avendo lo stesso centro e lo stesso asse, coinciderebbero, il che non può avvenire dato che  $K$  e  $K'$  sono distinti. Dunque  $\bar{P}$  deve stare in  $\bar{K}'$  e  $\bar{P}'$  in  $\bar{K}$ . Viceversa, se questa situazione si verifica, le due omologie sono permutabili in quanto che ognuna di esse trasforma in se medesima l'altra.

Resta così provato che, se i due complessi  $K$  e  $K'$  sono involutori, le due corrispondenti omologie armoniche  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  di  $S_5$  sono permutabili. Ma, se  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  di  $S_5$  sono permutabili, anche i due sistemi nulli  $N$  e  $N'$  di  $S_3^*$  lo sono; viceversa, se  $N$  e  $N'$  sono permutabili, lo sono pure  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  e  $K$  e  $K'$  risultano, di conseguenza, involutori. Resta così provato quanto volevasi dimostrare.

**33. - Due  $K_1$  e un  $K_2$ .** - Dalla proprietà associativa del prodotto di più complessi lineari segue che, se più complessi lineari  $K', K'', \dots, K^{(r)}$  sono in involuzione, raggruppandoli comunque per prodotti, si ottengono ancora complessi in involuzione. Ora, come abbiamo già visto, il prodotto di due  $K_1$  in  $S_3^*$  è il complesso speciale  $K'_2$  avente per direttrice l'intersezione  $p$  dei due piani rappresentanti i due complessi lineari  $K_1$  e la condizione perchè questo  $K'_2$  sia in involuzione col  $K_2$  dato è che  $p$  appartenga al complesso lineare  $K_2$ .

## § 5. - Situazioni in $S_4$ .

### I. - Complessi lineari.

**34. -** In uno spazio  $S_4$  possiamo considerare complessi lineari di punti, di rette, di piani e di  $S_3$ . Sappiamo che un  $K_1$  rappresenta un  $S_3$ :  $ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 + ex_4 = 0$  e un  $K_4$  un'iperstella:  $x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$ . Quanto

ai  $K_2$  notiamo che, essendo  $S_4$  uno spazio di dimensioni pari, un suo complesso lineare di rette è *necessariamente singolare*; si presentano così i due casi:

*a)  $K_2$  singolare di specie 1 o generale.* - Considerazioni iperspaziali sui sistemi nulli singolari di specie  $h$  e relativi complessi lineari di rette (7) portano a concludere che, se il  $K_2$  è singolare di specie 1, esiste nel sistema nullo  $N$  ad esso associato un punto fondamentale  $O$ , coniugato di tutti i punti di  $S_4$ ; appartengono perciò al  $K_2$  tutte le rette di  $S_4$  uscenti da questo punto, che vien detto *centro* del complesso. Inoltre ad una retta  $r$  uscente da  $O$  corrisponde un  $S_3$ , omologo in  $N$  dei punti di  $r$  distinti da  $O$ . Ne segue che  $N$  subordina nella stella di centro  $O$  un sistema nullo non singolare, in cui ad ogni retta  $r$  per  $O$  rimane associato un  $S_3$  per essa, che indicheremo con  $R$ . Sono quindi rette di  $K_2$  anche le rette che in ogni  $R$  s'appoggiano alla corrispondente  $r$ ; anzi queste sono tutto le rette di  $K_2$ .

Perciò ogni retta di  $K_2$  è proiettata da  $O$  secondo un  $S_2$  tutto di rette del  $K_2$  e di conseguenza, proiettando il  $K_2$  da  $O$  su di un  $S_3$  non passante per esso otteniamo nell' $S_3$  un  $\bar{K}_2$  non speciale, in quanto che esso nasce dal sistema nullo non singolare, sezione coll' $S_3$  del sistema nullo non singolare subordinato dal  $K_2$  nella stella di centro  $O$ .

*b)  $K_2$  singolare di specie 3 o speciale.* - Da considerazioni iperspaziali analoghe alle precedenti, discende che in questo caso il centro del complesso  $K_2$  è un piano  $\omega$ , detto *piano direttore*, e le rette di  $K_2$  sono tutte e sole le rette appoggiate a  $\omega$ .

Quanto ai  $K_3$  di  $S_4$ , essendo le figure duali dei  $K_2$ , sono essi pure, *sempre* singolari. Si hanno così due tipi:

*a')  $K_3$  singolare di specie 1 o generale.* - In un tale  $K_3$  esiste un  $S_3$  *fondamentale*  $\Omega$  e il complesso è l'insieme di tutti gli  $S_2$  che segano  $\Omega$  secondo le rette d'un complesso lineare.

*b')  $K_3$  singolare di specie 3 o speciale.* - In base alla legge di dualità si vede che un tale  $K_3$  ammette una retta *fondamentale*  $\omega$  e il complesso è l'insieme degli  $S_2$  appoggiati a  $\omega$ .

(7) BERTINI: *Geometria proiettiva degl'iperspazi* - cap. 5º, nn. 5-8.

Si riconosce poi facilmente che il caso  $a'$ ) si riduce al caso  $b'$ ) quando il  $K_2$ , subordinato in  $\Omega$  dal  $K_3$  generale di  $S_4$ , è speciale.

## II. - Prodotti di complessi lineari.

**35. - Prodotto di due  $K_1$ .** - Per l'osservazione generale del n. 20 il prodotto di due  $K_1$  è il complesso speciale  $K_2$  delle rette appoggiate all' $S_2$  intersezione dei due  $S_3$  rappresentati dai due  $K_1$ .

**36. - Prodotto di tre  $K_1$ .** - In base all'osservazione generale prima ricordata il prodotto di tre  $K_1$  è il complesso speciale  $K_3$  dei piani appoggiati all' $S_1$  intersezioni dei tre iperpiani, che rappresentano i tre  $K_1$ .

**37. - Prodotto di un  $K_1$  per un  $K_2$ .** - Si possono presentare i due casi seguenti:

a) Il  $K_2$  è generale. - Indichiamo con  $\Omega$  l' $S_3$  dei punti di  $K_1$ , con  $O$  il centro di  $K_2$ , con  $K'_2$  il complesso lineare di rette subordinato in  $\Omega$  da  $K_2$  e supponiamo in un primo momento che  $\Omega$  non passi per  $O$ : allora  $K'_2$  risulta non speciale.

Dall'osservazione generale fatta al n. 19 sul prodotto di un  $K_1$  per un  $K_2$  in  $S_4$  segue che il  $K_3$ , prodotto di  $K_1$  per  $K_2$ , è l'insieme degli  $S_2$  passanti per le rette di  $K'_2$ .

Nel caso che  $\Omega$  passi per  $O$  il  $K_3$  è ancora l'insieme degli  $S_2$  che segano  $\Omega$  secondo le rette di  $K'_2$ , ma in questo caso  $K'_2$  è il complesso speciale avente per direttrice la retta  $\omega$  omologa di  $\Omega$  nel sistema nullo subordinato da  $K_2$  nella stella di centro  $O$ .

b) Il  $K_2$  è speciale. - Sia  $\omega$  il piano direttore di  $K_2$  e  $\Omega$  l' $S_3$  individuato da  $K_1$ . Ammesso che non si appartengano,  $\omega$  e  $\Omega$  hanno in comune una retta  $r$ , che viene ad essere la direttrice del complesso lineare  $K'_2$  subordinato da  $K_2$  in  $\Omega$ . Perciò il complesso prodotto  $K_3$ , essendo l'insieme dei piani passanti per gli  $S_1$  di  $K'_2$ , viene ad essere il complesso speciale degli  $S_2$  appoggiati ad  $r$ .

Quando  $\omega$  sta in  $\Omega$  il prodotto  $K_3$  è identico e i due complessi  $K_1$  e  $K_2$  sono perciò involutori. Infatti, dato che  $\omega$  sta in  $\Omega$ , possiamo scegliere la piramide fondamentale delle coordinate in  $S_4$  in modo che i vertici  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , stiano in  $\Omega$  e di essi i primi tre giacciono in  $\omega$ . Allora l'equazione di  $K_1$ , che è quella di  $\Omega$ , riducesi a:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_4 = 0$$

e l'equazione di  $K_2$  (esprimente che la retta generica individuata dai punti  $x_i$  e  $y_i$  s'appoggia a  $\omega$ ) a:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo determinante, sviluppato secondo la regola di LAPLACE prendendo come matrice quella formata con le due prime righe, dà:

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0.$$

Quest'equazione, ricordando la definizione delle coordinate grassmanniane di retta, riducesi a:

$$X_{34} = 0.$$

Ricorrendo alla notazione differenziale simbolica si vede allora subito che il prodotto di  $K_1$  per  $K_2$  svanisce identicamente, c. v. d.

**38. - Prodotto di quattro  $K_1$ .** - Dall'osservazione generale del n. 20 discende che *il prodotto di quattro  $K_1$  è l'iperstella di centro il punto d'intersezione dei quattro iperpiani, che rappresentano i complessi  $K_1$ .*

**39. - Prodotto di due  $K_2$ .** - Si presentano vari casi:

a) **I due  $K_2$  sono generali.** - Siano essi i due complessi  $K'_2$  e  $K''_2$ , di centri rispettivamente  $O_1$  e  $O_2$ , che per ora supponiamo *distinti*. Sia  $r$  la congiungente i due centri; diciamo  $N_1, N_2$  i due sistemi nulli indotti rispettivamente nelle stelle di centri  $O_1, O_2$  da  $K'_2, K''_2$ . Il prodotto  $K_4 = K'_2 \cdot K''_2$  è un'iperstella con un centro  $U$  che ora determineremo.

Per questo consideriamo gl'iperpiani dell'iperstella  $K_4$  passanti per la retta  $u_1 = UO_1$ . Per un teorema più volte citato sappiamo che entro ad ognuno di questi iperpiani, sia esso  $\Sigma$ , devono restar subordinati due complessi lineari  $\bar{K}'_2, \bar{K}''_2$  in involuzione.

Ora, poichè  $\Sigma$  passa per  $O_1$ ,  $\bar{K}'_2$  è speciale ed ha per direttrice la retta  $s$  omologa di  $\Sigma$  in  $N_1$ : dunque, per la condizione d'involutorietà di  $\bar{K}'_2$  e  $\bar{K}''_2$  la retta  $s$  deve appartenere a  $\bar{K}''_2$ , cioè a  $K''_2$ . Viceversa, se  $s$  è una retta per  $O_1$  che stia in  $K''_2$ , l'iperpiano  $\Sigma$ , ad essa corrispondente in  $N_1$ , appartiene al complesso prodotto  $K_4$ , cioè passa per la retta  $u_1$ . Ma le rette  $s$  di  $K''_2$  per  $O_1$  formano stella in uno spazio  $S_3$ , che indicheremo con  $\rho_2$ , il quale non è altro che il corrispondente in  $N_2$  della retta  $r = O_1O_2$ . Pertanto gl'iperpiani  $\Sigma$  predetti (omologhi delle rette  $s$  in  $N_1$ ) passeranno tutti per la retta corrispondente di  $\rho_2$  in  $N_1$ , la quale è la  $u_1$  cercata.

Dunque la retta  $u_1$  si costruisce così: Si trasforma  $r$  mediante  $N_2$  in  $\rho_2$ , indi  $\rho_2$  mediante  $N_1$  in  $u_1$ .

Analogamente, invertendo l'ufficio dei due complessi, si trasformerà  $r$  mediante  $N_1$  nell'iperpiano  $\rho_1$ , indi  $\rho_1$  mediante  $N_2$  in  $u_2 = UO_2$ .

Le rette  $u_1, u_2$  concorrono nel punto  $U$  cercato.

Per far vedere che  $u_1, u_2$  risultano incidenti basta dimostrare che esse sono complanari. Ora  $u_1$  giace in  $\rho_2$ , in quanto



che esso è l'  $S_3$  ad essa corrispondente in  $N_1$ : d'altra parte  $\rho_2$  passa per  $r$ , dunque, per il fatto che nelle corrispondenze involutorie le condizioni d'appartenenza vengono mantenute, lo spazio  $\rho_1$ , corrispondente ad  $r$  in  $N_1$ , conterrà  $u_1$ ; sicchè, in definitiva,  $u_1$  giace nel piano  $\pi = (\rho_1, \rho_2)$  e analogamente così avviene di  $u_2$ .

Notiamo che, se in particolare i centri dei due complessi  $K_2$  coincidono, cioè se è  $O_1 \equiv O_2 \equiv P$ , allora il centro  $U$  dell' iperstella  $K_4$  è  $P$  stesso.

*b) Uno dei due  $K_2$  è speciale.* - Sia  $K_2''$  in tali condizioni. Diciamo  $\pi$  il suo piano direttore e  $O_1$  il centro di  $K_2'$ , che in generale non giace in  $\pi$ .

Se  $O_1$  giace in  $\pi$ , allora il centro di  $K_4$  è  $O_1$  stesso; nel caso contrario esso è il centro del fascio di rette rappresentante il  $\overline{K}_2'$ , subordinato dal  $K_2'$  nel piano  $\pi$ .

*c) Entrambi i due  $K_2$  sono speciali.* - Sieno  $\pi'$  e  $\pi''$  i piani direttori dei due complessi. Nell' ipotesi più generale  $\pi'$  e  $\pi''$  hanno un sol punto comune  $U$ . Tale punto è il centro dell' iperstella  $K_4 = K_2' \cdot K_2''$ .

Infatti, se  $\Omega$  è un  $S_3$  di  $K_4$ , in esso  $K_2'$  e  $K_2''$  devono subordinare due complessi  $\overline{K}_2'$ ,  $\overline{K}_2''$  in involuzione. Ora  $\overline{K}_2'$  e  $\overline{K}_2''$  sono i complessi speciali di  $S_1$  aventi per direttrici rispettivamente le rette:  $r' = (\pi' \Omega)$  e  $r'' = (\pi'' \Omega)$ ; per l' involutorietà di essi (vedi n. 31)  $r'$  e  $r''$  devono essere incidenti e, poichè giacciono rispettivamente su  $\pi'$  e  $\pi''$ , non potranno incontrarsi che nel punto  $U = (\pi' \pi'')$ , che perciò viene ad essere il centro di  $K_4$ .

Se invece  $\pi'$  e  $\pi''$  si tagliano in una retta (e quindi giacciono in un  $S_3$ )  $K_2'$  e  $K_2''$  risultano involutori.

Infatti in ogni  $S_3$  di  $S_4$  i due complessi inducono due complessi speciali con direttrici incidenti (le direttrici sono gli  $S_1$  intersezioni dell'  $S_3$  con  $\pi'$  e  $\pi''$ ), quindi ogni  $S_3$  di  $S_4$  appartiene a  $K_4$ , che perciò risulta identico.

**40. - Quadrato di un  $K_2$ .** - È un caso particolare del prodotto di due  $K_2$ , qualora i due complessi coincidano. Dalle considerazioni del numero precedente si prevede che *il quadrato di*

un  $K_2$  generale di centro  $O$  è l'iperstella di centro  $O$ , mentre il quadrato d'un  $K_2$  speciale è identico. Confermiamolo analiticamente.

a) **II  $K_2$  è generale.** - Scelta la piramide fondamentale delle coordinate in  $S_4$  in modo che il suo vertice  $A_4$  coincida con  $O$  e gli altri vertici  $A_3, A_2, A_1, A_0$  si trovino in un  $S_3$  non contenente  $O$ , il  $K_2$  può rappresentarsi <sup>(8)</sup> con un'equazione del tipo:

$$a_0 X_{03} + a_1 X_{12} = 0.$$

Ora il quadrato di tale complesso è il  $K_4$  d'equazione:

$$a_0 a_1 X_{0123} = 0.$$

Ma, per la nota relazione di proporzionalità tra coordinate grassmanniane e plückeriane d'un iperpiano esaminata al n. 2, è:  $X_{0123} = u_4$ , quindi il  $K_4 = (K_2)^2$  è l'iperstella d'equazione:

$$a_0 a_1 u_4 = 0,$$

ossia, l'iperstella di centro il punto  $(0, 0, 0, 0, a_0 \cdot a_1)$ , cioè il punto  $A \equiv O$ .

b) **II  $K_2$  è speciale.** - Allora, scelta la piramide fondamentale delle coordinate in  $S_4$  in modo che i vertici  $A_2, A_3, A_4$  cadano sul piano direttore  $\pi$  di  $K_2$  e  $A_0, A_1$  su una retta  $r$  indipendente da  $\pi$ , l'equazione di  $K_2$  diventa del tipo:

$$a_0 X_{01} = 0,$$

ove  $a_0$  altro non è che la coordinata grassmanniana  $X_{234}$  di  $\pi$ . Facendo il quadrato di questa equazione col ricorso alla notazione differenziale simbolica, si vede immediatamente che esso svanisce identicamente, quindi  $K_4 = (K_2)^2$  è, in questo caso, identico, c. v. d.

<sup>(8)</sup> Vedi la teoria generale dei sistemi nulli e relativi complessi lineari di rette in: BERTINI - *Geometria proiettiva degli iperspazi* - cap. 5°, nn. 5, 6, 7, 8.

**41. - Prodotto di due  $K_1$  per un  $K_2$ .** - Poichè il prodotto dei due  $K_1$  è il  $K'_2$  speciale degli  $S_1$  appoggiati al piano  $\pi$ , intersezione dei due  $S_3$  rappresentanti i due  $K_1$ , così, per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari, potremo dire che il prodotto dei due  $K_1$  considerati per  $K_2$  è uguale al  $K_4 = K'_2 \cdot K_2$ . Perciò, secondochè  $K_2$  è generale o speciale, si presentano le alternative *b)*, *c)* del caso trattato al n. 39. Si ha quindi un caso involutorio (vedi *c)*) se i due  $S_3$ , individuati dai due  $K_1$ , e il piano direttore di  $K_2$  si tagliano in una retta.

**42. - Prodotto di un  $K_1$  per un  $K_3$ .** - Si presentano i seguenti casi:

*a)* Il  $K_3$  è generale. - Sia  $\Omega$  l'  $S_3$  dei punti di  $K_1$  e  $\Omega'$  lo spazio direttore di  $K_3$ . Nell' ipotesi generale  $\Omega$  e  $\Omega'$  si tagliano in un piano, che indicheremo con  $\pi$ .

Per il teorema generale sul prodotto d' un  $K_1$  per un  $K_n$  in  $S_n$  (vedi n. 19) possiamo affermare che il  $K_4 = K_1 \cdot K_3$  è l' iperstella degli  $S_3$  passanti per gli  $S_2$  del complesso  $K'_3$ , subordinato in  $\Omega$  dal  $K_3$ , cioè l' iperstella avente per centro il centro  $U$  della stella di piani individuata in  $\Omega$  da  $K'_3$ . Orbene, siccome  $K'_3$  è il complesso subordinato dal  $K_3$  in  $\Omega$  e il  $K_3$  è l' insieme degli  $S_2$  di  $S_4$  che tagliano  $\Omega$  secondo le rette d' un  $K_2$ , così  $K'_3$  sarà la stella di piani di  $\Omega$  che segano  $\pi$  secondo le rette del complesso  $K'_2$ , indotto in  $\pi$  da  $K_2$ . Ma  $K'_2$  è rappresentato da un fascio di rette di  $\omega$  con un certo centro  $P$ : ne segue che  $U \equiv P$ .

Notiamo in particolare che, se  $\Omega$  e  $\Omega'$  coincidono, il prodotto  $K_4$  svanisce identicamente: ossia in questo caso  $K_1$  e  $K_3$  sono involutori.

*b)* Il  $K_3$  è speciale. - Sia  $\Omega$  l'  $S_3$  dei punti di  $K_1$  e  $\omega$  la retta, a cui s' appoggiano i piani di  $K_3$ : si riconosce facilmente che il centro  $U$  dell' iperstella  $K_4 = K_1 \cdot K_3$  è il punto d' intersezione di  $\omega$  con  $\Omega$ .

In particolare, se  $\omega$  giace in  $\Omega$ , si ha ancora un caso involutorio.

### III. - Casi normali d' involutorietà.

**43. - Cinque  $K_1$ .** - Per l'osservazione generale fatta alla fine del n. 17 possiamo affermare che *cinque complessi lineari di punti in  $S_4$  sono involutori, se i cinque iperpiani da essi individuati passano per un punto.*

**44. - Un  $K_1$  e un  $K_4$ .** - Dall'osservazione generale del n. 18 deduciamo che *un  $K_1$  e un  $K_4$  in  $S_4$  sono involutori, quando l'iperpiano  $K_1$  passa per il centro dell'iperstella  $K_4$ .*

**45. - Un  $K_1$  e due  $K_2$ .** - Per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari la condizione d' involutorietà di un  $K_1$  e due  $K_2$  riducesi alla condizione d' involutorietà del  $K_1$  e del  $K_4$ , prodotto dei due  $K_2$ . Orbene il  $K_4$ , prodotto dei due  $K_2$ , è un'iperstella di  $S_4$ , il cui centro  $U$  si determina in base alle considerazioni fatte al n. 39; i tre complessi lineari considerati saranno dunque involutori se l'iperpiano  $\Omega$ , individuato dal  $K_1$ , passa per il punto  $U$  così determinato.

**46. - Un  $K_2$  e un  $K_3$ .** - Si presentano i casi seguenti:

a)  **$K_2$  e  $K_3$  generali.** - Sia  $O$  il centro di  $K_2$ ,  $\Omega$  l' $S_2$  singolare di  $K_3$  e  $\Phi$  e  $\Psi$  i complessi lineari di rette indotti in  $\Omega$  rispettivamente da  $K_2$  e  $K_3$ . Dimostriamo che la condizione d' involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$  riducesi alla condizione d' involutorietà in  $\Omega$  di  $\Phi$  e  $\Psi$ .

Per questo decomponiamo  $K_3$  in un  $K_1$  per un  $K'_2$ : a norma di quanto si disse al n. 37,  $K_1$  sarà lo stesso spazio  $\Omega$  e il centro  $O_1$  di  $K'_2$  resterà arbitrario, essendo, dopo ciò,  $K'_2$  individuato dal dover subordinare in  $\Omega$  il complesso  $\Psi$ . Con questa decomposizione di  $K_3$  la condizione d' involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$  riducesi alla condizione d' involutorietà di  $K_4 = K_2 \cdot K'_2$  e  $K_1$ . Ora  $K_4$  è un'iperstella, il cui centro  $U$  si determina col metodo indicato al n. 39; la condizione d' involutorietà cercata è dunque che  $U$  giaccia in  $\Omega$  (ed appena vi giace per una posizione di  $O_1$  vi giace per tutte le altre, come risulterà da

quello che segue), ossia che  $\Omega$  appartenga a  $K_4$ . Ma, per il teorema generale sul prodotto di complessi lineari visto alla fine del n. 16,  $\Omega$  appartiene a  $K_2 \cdot K'_2$ , se i complessi  $\Phi$  e  $\Psi$  in esso subordinati da  $K_2$  e  $K'_2$  sono involutori: quindi, come avevamo affermato,  $K_2$  e  $K_3$  sono involutori se lo sono in  $\Omega$   $\Phi$  e  $\Psi$  <sup>(9)</sup>.

b)  $K_2$  speciale e  $K_3$  generale. – Sia  $\omega$  il piano direttore di  $K_2$ ,  $\Omega$  l' $S_3$  singolare di  $K_3$  e  $\Phi$  e  $\Psi$  i due complessi lineari di rette indotti in  $\Omega$  rispettivamente da  $K_2$  e  $K_3$ .

Sempre in base alla proprietà associativa del prodotto di complessi lineari la condizione d'involutorietà del  $K_2$  e  $K_3$  considerati equivale, come precedentemente, alla condizione d'involutorietà in  $\Omega$  di  $\Phi$  e  $\Psi$ ; ma in questo caso  $\Phi$  è il complesso speciale degli  $S_1$  appoggiati alla retta  $r = (\omega, \Omega)$ , quindi tutto si riduce alla condizione che  $r$  appartenga a  $\Psi$ .

c)  $K_2$  generale e  $K_3$  speciale. – Sia  $O$  il centro di  $K_2$  e  $r$  la retta, a cui s'appoggiano i piani di  $K_3$ . Potremo allora pensare  $K_3$  decomposto nel prodotto di un  $K_1$  per un  $K'_2$  speciale, tali che l'iperpiano  $\Omega$ , rappresentante  $K_1$ , e il piano direttore  $\omega$  di  $K'_2$  s'intersechino in  $r$ . Ragionando come nei casi precedentemente trattati si giunge a concludere che  $K_2$  e  $K_3$  sono involutori in  $S_4$  se lo sono in  $\Omega$   $\Phi$  e  $\Psi$ . Ora, però,  $\Psi$  è il complesso speciale di direttrice  $r$ ; quindi, per l'involutorietà di  $\Phi$  e  $\Psi$ ,  $r$  dovrà appartenere a  $\Phi$  e di conseguenza a  $K_2$ . Si ha dunque che un  $K_2$  generale e un  $K_3$  speciale sono involutori se la retta  $r$ , a cui s'appoggiano gli  $S_2$  di  $K_3$ , appartiene a  $K_2$ .

Potevamo ragionare anche nel modo seguente.

Per le osservazioni svolte al n. 39 sappiamo che il centro  $U$  di  $K_4 = K_2 \cdot K'_2$  giace in un  $\omega$ , essendo esso il centro del fascio di rette rappresentante il  $\bar{K}_2$  subordinato in  $\omega$  da  $K_2$ :

<sup>(9)</sup> Il procedimento ora seguito per la ricerca della condizione d'involutorietà di un  $K_2$  e un  $K_3$  in  $S_4$  può generalizzarsi negli spazi  $S_n$  di dimensione pari per la ricerca della condizione d'involutorietà di un  $K_2$  e un  $K_{n-1}$ . Infatti, se  $n$  è pari, un  $K_{n-1}$  ammette sempre un  $S_{n-1}$ ,  $\Omega$ , *sin-golare* e allora possiamo decomporre  $K_{n-1}$  nel  $K_1$ , rappresentato da  $\Omega$ , per un  $K_{n-2}$ , essendo questo assoggettato alla sola condizione d'indurre in  $\Omega$  il complesso lineare  $\Psi$  per cui passano gli  $S_{n-2}$  di  $K_{n-1}$ .

d'altra parte per l'involutorietà di  $K_1$  e  $K_4 = K_2 \cdot K'_2$ , a cui, come abbiamo già visto, si riduce l'involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$ ,  $\Omega$  deve passare per  $U$ , quindi  $U$  deve giacere sulla retta  $r = (\omega, \Omega)$ . Orbene, come abbiamo già osservato in principio, un  $K_3$  speciale avente per  $S_1$  fondamentale la retta  $r$  può decomporre in infiniti modi nel prodotto di un  $K_1$  per un  $K'_2$  speciale, purchè tanto l'iperpiano  $\Omega$  rappresentante  $K_1$  quanto il piano direttore  $\omega$  di  $K'_2$  passino per  $r$ . Potremo dunque affermare che il  $K_2$  e il  $K_3$  considerati sono involutori quando almeno in un  $S_2$  per  $r$  il complesso indotto da  $K_2$  è un fascio col centro  $U$  su  $r$ . Ora un piano  $\omega$  per  $r$  determina con  $O$  un  $S_3$ ,  $\Sigma$ , ed il centro  $U$ , di cui sopra si parla, è la traccia su  $\omega$  della retta  $s$  corrispondente a  $\Sigma$  nel sistema nullo  $N$ , indotto da  $K_2$  nella stella  $O$ . Al variare di  $\omega$  per  $r$ ,  $\Sigma$  descrive un fascio avente per sostegno il piano  $\alpha = (O, r)$ , e quindi  $s$  un fascio in un piano  $\pi$  per  $O$ . Per l'involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$  bisognerà dunque che  $r$  s'appoggi a  $\pi$ , ossia ad una delle rette  $s$ . Ma l' $S_3$ ,  $\Sigma$ , corrispondente in  $N$  alla  $s$ , a cui s'appoggia  $r$ , passa per  $r$ , quindi  $r$  è una retta di  $K_2$ .

Siamo così giunti, per altra via, al risultato di prima, se nonchè col ragionamento ora seguito si mette in evidenza il fatto che la scomposizione di  $K_3$  in  $K_1$  e  $K'_2$  può farsi in  $\infty^1$  modi, cioè in tanti modi, quanti sono gli  $S_2$ ,  $\omega$ , di  $\Sigma$  passanti per  $r$ : infatti per qualunque  $\omega$  passante per  $r$  e giacente in  $\Sigma$  la situazione che si desidera è verificata.

d)  $K_2$  e  $K_3$  speciali. — Sia  $\pi$  il piano direttore di  $K_2$  e  $r$  la retta, a cui s'appoggiano i piani di  $K_3$ . Come nel caso precedente possiamo pensare  $K_3$  decomposto in un  $K_1$  e un  $K'_2$  speciale tali, che l'iperpiano  $\Omega$ , rappresentante  $K_1$ , e il piano direttore di  $K'_2$  s'intersechino nella retta  $r$  e allora la condizione d'involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$  si traduce nella condizione d'involutorietà in  $\Omega$  dei complessi  $\Phi$  e  $\Psi$  subordinati in  $\Omega$  rispettivamente da  $K_2$  e  $K'_2$ , la quale condizione è soddisfatta non appena  $\Omega$  appartiene all'iperstella  $K_4 = K_2 \cdot K'_2$ . Ora il centro  $U$  di  $K_4$  è, come sappiamo, il punto comune ai piani  $\pi$  ed  $\omega$ : se ne deduce che, se un  $K_2$  e un  $K_3$  speciali sono involutori, la retta  $r$ , centro di  $K_3$ , incontra il piano direttore  $\pi$  di  $K_2$ .

**47. Tre  $K_1$  e un  $K_2$ .** - Per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari risulta che la condizione d'involutorietà di tre  $K_1$  e un  $K_2$  si riconduce alla condizione d'involutorietà del  $K_2$  considerato col complesso speciale  $K_1$ , prodotto dei tre  $K_1$ . Perciò, secondochè il complesso  $K_2$  è generale o speciale, si presentano i due ultimi casi trattati nel numero precedente.

**48. - Due  $K_1$  e un  $K_3$ .** - Per ragioni analoghe alle precedenti la condizione d'involutorietà di due  $K_1$  e un  $K_3$  si riconduce alla condizione d'involutorietà del  $K_3$  e del  $K_2$  speciale, prodotto dei due  $K_1$ . Così, secondochè  $K_3$  è generale o speciale, si presentano le alternative b) e d) trattate al n. 46.

## § 6. - Situazioni in $S_5$

### I. - Complessi lineari.

**49. - In  $S_5$  possiamo considerare complessi lineari di punti, di rette, di piani, di  $S_3$  e di  $S_4$ .** Notiamo subito che in  $S_5$  un  $K_1$  è la figura duale d'un  $K_5$ , un  $K_2$  di un  $K_4$ , mentre un  $K_3$  è figura duale di se stessa.

Per le considerazioni generali fatte al § 1 di questo capitolo possiamo affermare senz'altro che un  $K_1$  in  $S_5$  rappresenta un  $S_4$  e un  $K_5$  un'iperstella di  $S_4$ . Quanto ai  $K_2$ , essendo  $S_5$  uno spazio di dimensione *dispari*, essi sono in generale non singolari; possono, però, essere anche singolari ed allora si presentano i due casi:

a)  **$K_2$  singolare di specie 2.** - Da considerazioni iperspaziali sui sistemi nulli e sui complessi lineari di rette singolari risulta che nel caso d'un  $K_2$  singolare di specie 2 esiste in  $S_5$  una *retta fondamentale*  $r$ , i cui punti sono coniugati a tutti i punti di  $S_5$ ; fanno quindi parte del  $K_2$  considerato tutte le rette appoggiate alla  $r$ , che viene perciò chiamata *centro* del complesso.

Ora il sistema nullo  $N$  di  $S_5$  associato al complesso lineare  $K_2$  subordina nella stella di centro la retta  $r$  (che, come insieme degli  $S_2, S_3, S_4$  passanti per  $r$ , può considerarsi uno spazio a tre dimensioni, di cui gli  $S_2$  e gli  $S_4$  sono rispettivamente i punti e gli iperpiani) un sistema nullo  $N_1$ , in cui ad un piano  $\pi$  per  $r$  corrisponde un  $S_4$  per  $\pi$ . Sono quindi rette del complesso  $K_2$  tutte le  $S_1$  appoggiate agli  $S_2$  per  $r$  e contenute negli  $S_4$  ad essi corrispondenti in  $N_1$ . In ogni  $S_4$  per  $r$  viene dunque subordinato dal  $K_2$  un complesso lineare speciale  $K'_2$ , di cui l' $S_2$ , omologo dell' $S_4$  in  $N_1$ , è il piano direttore. Se consideriamo invece un  $S_4$  non passante per  $r$ , esso sarà incontrato da  $r$  in un punto, che viene ad essere il centro del  $K''_2$  generale, indotto da  $K_2$  nell' $S_4$  considerato.

*b)  $K_2$  singolare di specie 4.* In questo caso esiste in  $S_5$  un  $S_3$  fondamentale, che indicheremo con  $\Omega$ , detto *centro* del complesso: il  $K_2$  considerato è allora formato da tutte e sole le rette appoggiate ad  $\Omega$ .

Quanto ai  $K_4$  in  $S_5$  notiamo che anch'essi, come figure duali dei  $K_2$ , possono essere o *generalì* o *singolari*; in questo secondo caso si presentano le due alternative:

*a')  $K_4$  singolare di specie 2.* - Allora in  $K_4$  esiste un  $S_3$  fondamentale  $\Omega$  e il complesso lineare è l'insieme degli  $S_3$  che tagliano  $\Omega$  secondo rette d'un  $\bar{K}_2$ .

*b')  $K_4$  singolare di specie 4.* - In un tale  $K_4$  esiste una retta fondamentale  $\omega$ , per cui il  $K_4$  viene ad essere l'insieme degli  $S_3$  appoggiati ad  $\omega$ .

Notiamo infine che il caso precedente *a')* si riduce al caso *b')* ora trattato qualora il complesso  $\bar{K}_2$ , subordinato dal  $K_1$  in  $\Omega$ , sia speciale: in tal caso la retta fondamentale  $\omega$  è la direttrice di  $\bar{K}_2$ .

**50.** - Quanto ad un  $K_3$  osserviamo ch'esso ha in  $S_5$  comportamento analogo a quello d'un  $K_2$  in  $S_3$ . Infatti, come un  $K_2$  in  $S_3$ , così un  $K_3$  in  $S_5$  è figura duale di se stessa e inoltre può essere o generale o speciale, il secondo caso presentandosi allorchando i venti coefficienti dell'equazione del complesso si possono interpretare come coordinate grassmanniane



d' un  $S_2$  in  $S_5$ . Ma, come per due  $S_1$  in  $S_3$ , così per due  $S_2$  in  $S_5$  la condizione d'incidenza s'esprime (vedi n. seguente) eguagliando a zero una relazione bilineare tra le loro coordinate grassmanniane; perciò un  $K_3$  speciale in  $S_5$  viene ad essere l'insieme dei piani di  $S_5$  appoggiati ad un  $S_2$  fisso.

**51.** — In questo numero cercheremo di dare alla condizione d'incidenza di due  $S_2$  in  $S_5$  una interpretazione che ci possa servire per altre considerazioni che svolgeremo nel seguito. A tale scopo ricordiamo che le coordinate grassmanniane d' un  $S_2$  in  $S_5$  sono venti qualunque minori del 3° ordine, tra di loro distinti, estratti dalla matrice formata con le coordinate  $x'_i, x''_i, x'''_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) di tre punti linearmente indipendenti dell'  $S_2$ . Orbene, per i nostri scopi ci converrà di scegliere le coordinate dell'  $S_2$  in modo che dieci di esse,  $X_{ikl}$ , corrispondano a dieci combinazioni senza ripetizione,  $i k l$ , di classe tre dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, tali che due qualunque di esse non siano costituite da terne complementari e le altre,  $X_{mnp}$ , a dieci combinazioni senza ripetizione,  $m n p$ , di classe tre, sempre dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, tali che la terna  $m n p$  sia complementare della terna  $i k l$  e che la permutazione  $i k l m n p$  dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 sia pari. Allora, se  $x'_i, x''_i, x'''_i$  e  $y'_i, y''_i, y'''_i$  sono le coordinate di due terne di punti linearmente indipendenti che individuano due piani incidenti,  $\omega$  e  $\pi$ , di  $S_5$ , per la dipendenza di queste coordinate (dovuta al fatto che  $\omega$  e  $\pi$ , essendo incidenti, stanno al massimo, in un  $S_4$ ) dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 & x'_6 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 & x''_6 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 & x'''_5 & x'''_6 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 & y''_5 & y''_6 \\ y'''_1 & y'''_2 & y'''_3 & y'''_4 & y'''_5 & y'''_6 \end{vmatrix} = 0$$

Dallo sviluppo secondo la regola di LAPLACE di questo determinante, prendendo come matrice quella formata con le prime tre righe, segue, indicando con  $X$  e  $Y$  rispettivamente le coor-

dinate di  $\omega$  e di  $\pi$  e ricordando le convenzioni fatte sulla scelta delle coordinate grassmanniane d'un  $S_2$  in  $S_5$ , che la condizione d'incidenza di  $\omega$  e  $\pi$  s'esprime con la seguente relazione:

$$(1) \quad \sum (X_{ikl} Y_{mnp} - X_{mnp} Y_{ikl}) = 0,$$

ove la sommatoria va estesa alle dieci permutazioni  $iklmnp$  predette degli indici 1, 2, ..., 6.

Orbene, se interpretiamo  $X$  e  $Y$  come coordinate di punto in un  $S_{19}$ , la formula (1) ci dà la relazione bilineare che lega le coordinate di due punti coniugati in un sistema nullo di questo spazio. Di tale risultato ci serviremo in seguito trattando della condizione d'involutorietà di due  $K_3$  in  $S_5$ .

## II. Prodotti di complessi lineari.

**52. - Prodotto di due  $K_1$ .** - Per l'osservazione generale del n. 20 notiamo che il prodotto di due  $K_1$  in  $S_5$  è il  $K_2$  (singolare di specie 4) delle rette appoggiate all' $S_3$  intersezione dei due  $S_4$  rappresentanti i  $K_1$ .

**53. Prodotto di tre  $K_1$ .** - Sempre per l'osservazione generale prima ricordata il prodotto di tre  $K_1$  in  $S_5$  è il  $K_3$  speciale dei piani appoggiati all' $S_2$  intersezione dei tre  $S_4$  rappresentanti i  $K_1$ .

**54. - Prodotto di un  $K_1$  per un  $K_2$ .** - Si presentano i casi seguenti:

a) Il  $K_2$  è generale. - Sia  $\Omega$  l' $S_4$  rappresentante il  $K_1$  e  $K'_2$  il complesso subordinato in  $\Omega$  dal  $K_2$ . Per l'osservazione generale del n. 19 il prodotto di  $K_1$  per  $K_2$  è il  $K_3$  degli  $S_2$  che tagliano  $\Omega$  secondo le rette di  $K'_2$ .

Orbene, nell'ipotesi in cui ci siamo posti che  $K_2$  sia generale,  $K'_2$  non può essere speciale. Infatti, se  $K'_2$  fosse speciale, dovrebbe esistere in  $\Omega$  un piano  $\omega$ , a cui sono appoggiate tutte le rette di  $K'_2$ : allora il sistema nullo individuato da  $K_2$  in  $S_5$  degenererebbe in quanto che in esso ai punti di  $\omega$  corrisponde-

rebbe un iperpiano fisso,  $\Omega$ , e quindi  $K_2$  sarebbe singolare, contro l'ipotesi.

*b) Il  $K_2$  è singolare di specie 2.* - Il  $K_3$  prodotto è ancora l'insieme degli  $S_2$  che tagliano  $\Omega$  secondo le rette di  $K'_2$ . Quest'ultimo complesso è generale come nel caso *a)* ed ha per centro il punto d'intersezione di  $\Omega$  con la retta  $r$ , centro di  $K'_2$ .

Nel caso particolare che  $r$  appartenga ad  $\Omega$   $K'_2$  è speciale e il relativo piano direttore è l' $S_2$ ,  $\omega$ , corrispondente a  $\Omega$  nel sistema nullo indotto da  $K_2$  nella stella ( $r$ ). Perciò in questo caso il prodotto  $K_3$  è speciale ed è l'insieme degli  $S_2$  appoggiati ad  $\omega$ .

*c) Il  $K_2$  è singolare di specie 4.* - Se  $K_2$  è singolare di specie 4 ed  $\Omega$  è il suo  $S_3$  fondamentale, allora  $K'_2$  è speciale ed il suo piano direttore  $\omega$  è l' $S_2$  intersezione di  $\Omega$  con  $\Omega$ . In questo caso dunque il prodotto  $K_3$  è certamente speciale, essendo esso l'insieme dei piani appoggiati a  $\omega$ .

Se, in particolare,  $\Omega$  appartiene a  $\Omega$ ,  $K_3$  è identico, ossia  $K_1$  e  $K_2$  sono involutori.

**55. Prodotto di quattro  $K_1$ .** - Sempre in base all'osservazione generale del n. 20 possiamo affermare che *il prodotto di quattro  $K_1$  è il  $K_4$  (singolare di specie 4 degli  $S_3$  appoggiati all' $S_1$  intersezione dei quattro  $S_4$ , che rappresentano i  $K_1$ ).*

**56. - Prodotto di un  $K_1$  per un  $K_3$ .** - Sia  $\Omega$  l' $S_4$  rappresentante il  $K_1$  e  $K'_3$  il complesso subordinato in  $\Omega$  dal  $K_3$ . Per l'osservazione, già citata, del n. 19 *il  $K_4 = K_1 \cdot K_3$  è l'insieme degli  $S_3$ , che tagliano  $\Omega$  secondo gli  $S_2$  di  $K'_3$ .*

Orbene  $K'_3$  può essere generale o speciale, il secondo caso presentandosi allorchè  $K_3$  è speciale, ossia quando  $K_3$  è l'insieme dei piani appoggiati ad un  $S_2$  fisso,  $\omega$ : allora la retta, a cui sono appoggiati i piani di  $K'_3$ , è evidentemente la retta  $r = (\omega, \Omega)$ .

Dunque, se  $K_3$  è speciale, il prodotto  $K_4$  è singolare di specie 4, poichè allora i suoi  $S_3$  sono gli  $S_3$  appoggiati alla  $r$ .

Se, essendo  $K_3$  speciale,  $\omega$  appartiene a  $\Omega$ , si ha un caso involutorio.

**57. - Prodotto di due  $K_2$ .** - Sieno  $K'_2$  e  $K''_2$  i due complessi considerati: nel caso generale non possiamo dire altro che *il loro prodotto  $K_4$  è l'insieme degli  $\infty^7 S_3$ ,  $\Omega$ , di  $S_5$  entro ai quali  $K'_2$  e  $K''_2$  subordinano complessi  $\bar{K}'_2$  e  $\bar{K}''_2$  involutori.*

Ora degli  $\infty^7 S_3$  di  $K_4$  se ne possono determinare facilmente  $\infty^5$  in base alle seguenti osservazioni.

Sieno  $N'$  e  $N''$  i sistemi nulli di  $S_5$  che generano i complessi  $K'_2$  e  $K''_2$ . Si consideri un punto  $P$  di  $S_5$  e sieno  $S'$  e  $S''$  gli  $S_4$  ad esso corrispondenti rispettivamente in  $N'$  e  $N''$ ; allora tutte le rette di  $S'$  per  $P$  appartengono a  $K'_2$  e tutte le rette di  $S''$ , pure per  $P$ , appartengono a  $K''_2$ . Indichiamo con  $\Omega$  l' $S_3 = (S', S'')$ : un tale  $S_3$  appartiene al  $K_4 = K'_2 \cdot K''_2$ . Infatti le rette della stella di  $\Omega$  di centro  $P$  appartengono tanto a  $K'_2$  che a  $K''_2$ : questo significa che i complessi  $\bar{K}'_2$  e  $\bar{K}''_2$ , indotti in  $\Omega$  rispettivamente da  $K'_2$  e  $K''_2$ , sono speciali con le direttrici incidenti in  $P$ . Ma allora  $K'_2$  e  $K''_2$  sono involutori e perciò  $\Omega$  appartiene a  $K_4$ , c. v. d.

Questo ragionamento si può ripetere per ogni altro punto dell' $S_5$ : si trovano così  $\infty^5 S_3$  del complesso  $K_4$ .

Osserviamo che per il prodotto di due  $K_2$  si può dire qualcosa di più in alcuni casi particolari che ora esamineremo.

1) **Uno dei due  $K_2$  è singolare di specie 4.** - Sia il  $K'_2$  in queste condizioni e indichiamo con  $\Omega''$  il suo  $S_3$  fondamentale. Allora, sia che  $K'_2$  sia generale o singolare di specie 2, il  $K_4 = K'_2 \cdot K''_2$  è il complesso singolare (di specie 2) degli  $S_3$ ,  $\Omega$ , che tagliano  $\Omega''$  secondo le rette del complesso lineare  $\varphi$ , subordinato in  $\Omega''$  da  $K'_2$ .

Infatti in questo caso dei due complessi  $\bar{K}'_2$ ,  $\bar{K}''_2$  indotti in  $\Omega$  da  $K'_2$  e  $K''_2$  il  $\bar{K}''_2$  è il complesso lineare speciale avente per direttrice la retta  $r = (\Omega, \Omega'')$ , quindi, per l'involutorietà di  $K'_2$  e  $K''_2$ ,  $r$  dovrà appartenere a  $\bar{K}'_2$ , quindi a  $K'_2$  ed infine, giacendo in  $\Omega$ , a  $\varphi$ , c. v. d.

In particolare se, essendo  $K'_2$  singolare di specie 2, avviene che  $\Omega''$ , passando per il centro  $r$  di  $K'_2$ , contiene un piano  $\omega$  per  $r$  e giace nell' $S_4$  omologo di  $\omega$  nel sistema nullo indotto da  $K'_2$  nella stella ( $r$ ), allora tutte le rette di  $\Omega''$  appartengono a  $K'_2$ ,

quindi  $\varphi$ , contenendo tutte le rette di  $\Omega''$ , è identico. Ma allora lo è anche  $K_4$ , perchè viene a contenere tutti gli  $S_3$  di  $S_5$ ; perciò  $K'_2$  e  $K''_2$  sono involutori.

2) I due  $K_2$  sono entrambi singolari di specie 4. — Allora il loro prodotto è il  $K_4$  singolare (di specie 4) degli  $S_3$ ,  $\Omega$ , appoggiate alla retta  $r$ , intersezione dei loro spazi fondamentali  $\Omega'$  e  $\Omega''$ .

Infatti in questo caso  $K'_2$  e  $K''_2$  sono i due complessi speciali di  $\Omega$  aventi per direttrici le rette  $r' = (\Omega, \Omega')$  e  $r'' = (\Omega, \Omega'')$ . Per l'involutorietà di  $\bar{K}'_2$  e  $\bar{K}''_2$   $r'$  e  $r''$  dovranno essere incidenti e il loro punto d'incontro cadrà, evidentemente, sulla  $r = (\Omega', \Omega'')$ : quindi gli  $S_3$  di  $K_4$  s'appoggiano tutti a  $r$ , e. v. d.

58. — Quadrato d'un  $K_2$ . — Indichiamo con  $N$  il sistema nullo individuato in  $S_5$  dal  $K_2$  e ricordiamo che in esso ad un  $S_0$  corrisponde un  $S_4$  per l' $S_0$ , ad un  $S_1$  un  $S_3$ , non avente in generale relazione d'incidenza con l' $S_1$ , ad un  $S_2$  un  $S_2$ , ad un  $S_3$  un  $S_1$  e a un  $S_4$  un  $S_0$  di  $S_4$  stesso. Si dimostra facilmente che un  $S_3$  e un  $S_1$  omologhi in  $N$  sono sghembi o si appartengono e così pure che due  $S_2$  corrispondenti in  $N$  sono sghembi o coincidono.

Come un  $S_2$  coincidente col suo omologo viene chiamato piano autoconiugato in  $N$ , così chiameremo *autoconiugato* in  $N$  un  $S_3$  che contiene l' $S_1$  ad esso corrispondente.

Osserviamo che, se  $S$  è un  $S_3$  autoconiugato in  $N$ , il complesso lineare in esso indotto da  $K_2$  è speciale e la retta  $r$ , omologa di  $S$  in  $N$ , ne è la direttrice e viceversa. Non solo, ma ogni piano  $\pi$  per  $r$  e giacente in  $S$  è tutto costituito da rette di  $K_2$ , quindi, come si vede subito, è un piano autoconiugato. Viceversa, se  $\pi$  è un  $S_2$  autoconiugato, ogni  $S_3$  per esso è pure autoconiugato e la retta corrispondente a quell' $S_3$  giace in  $\pi$ . Ne segue che gli  $S_2$  autoconiugati in  $N$  sono i piani totali di  $K_2$ , mentre gli  $S_3$  autoconiugati sono gli  $S_3$  passanti per i piani totali di  $K_2$ . Ora per ogni piano totale di  $K_2$  passano  $\infty^2$   $S_3$ , mentre in ogni  $S_3$  autoconiugato giacciono  $\infty^1$  piani totali, che formano fascio intorno alla retta  $r$  omologa dell' $S_3$ .

Dimostriamo che il  $K_4 = K_2^2$  è l'insieme degli  $S_3$  autoconiugati in  $N$ .

Difatti, se  $\Omega$  è un  $S_3$  di  $K_2^2$ , il  $K_2$  dovrà subordinare in esso un complesso lineare di rette involutorio con se stesso, cioè speciale. Quindi gli  $S_3$  di  $K_2^2$  sono quelli nei quali  $K_2$  induce un complesso speciale, cioè gli  $S_3$  autoconiugati in  $N$ , c. v. d.

Tenuto conto che gli  $S_3$  di  $K_2^2$  sono  $\infty^7$  e che ognuno contiene  $\infty^1$  piani totali di  $K_2$ , mentre per ogni  $S_2$  totale passano  $\infty^2$   $S_3$  di  $K_2^2$ , ne segue che il sistema dei piani totali di  $K_2$  è  $\infty^6$ .

**59. - Prodotto d'un  $K_2$  per due  $K_1$ .** - Sieno  $K'_1, K''_1$  e  $K_2$  i tre complessi, di cui ricerchiamo il prodotto; indichiamo con  $\Omega', \Omega''$  i due  $S_4$  che rappresentano  $K'_1$  e  $K''_1$  e con  $\bar{\Omega}$  l' $S_3 = (\Omega', \Omega'')$ . In base alla proprietà associativa del prodotto di complessi lineari il prodotto dei tre complessi considerati si riduce al  $K_4 = \bar{K}_2 \cdot K_2$ , ove  $\bar{K}_2 = K'_1 \cdot K''_1$ . Ma  $\bar{K}_2$  è il complesso singolare (di specie 4) delle rette appoggiate a  $\bar{\Omega}$ ; perciò, in base, a quanto abbiamo visto al n. 57, potremo senz'altro affermare che, se  $K_2$  è generale o singolare di specie 2, il complesso  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K_2$  è il  $K_4$  singolare (di specie 2) degli  $S_3$ , che tagliano  $\bar{\Omega}$  secondo le rette del complesso  $\Phi$  subordinato in  $\bar{\Omega}$  da  $K_2$ , mentre, se  $K_2$  è singolare di specie 1, il prodotto  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K_2$  è il  $K_4$  singolare (di specie 4) degli  $S_3$  appoggiati alla retta  $r = (\bar{\Omega}, \Omega)$ , ove  $\Omega$  è l' $S_3$  fondamentale di  $K_2$ .

In particolare, se  $\Phi$  è identico, i complessi  $K'_1, K''_1, K_2$  sono involutori, comè risulta dalle considerazioni svolte alla fine del caso 1°) del n. 57.

**60. - Prodotto di cinque  $K_1$ .** - In base ad un'osservazione generale più volte citata possiamo affermare che il prodotto di cinque  $K_1$  è l'iperstella di centro il punto comune ai cinque  $S_4$ , che rappresentano i complessi considerati.

**61. - Prodotto d'un  $K_1$  per un  $K_4$ .** - Indichiamo con  $\Omega$  l' $S_4$  che rappresenta il  $K_1$  e con  $K'_4$  il complesso subordinato

in  $\Omega$  dal  $K_4$ . Dall'osservazione generale del n. 19 discende immediatamente che *il*  $K_5 = K_1 \cdot K_4$  *è l'iperstella avente per centro il centro*  $U$  *di*  $K_4$ .

Notiamo in particolare che, se  $K_4$  è singolare di specie 2,  $U$  giace nel piano intersezione di  $\Omega$  con l' $S_3$  fondamentale di  $K_4$ , mentre, se  $K_4$  è singolare di specie 4,  $U$  è il punto d'intersezione di  $\Omega$  con la retta fondamentale  $\omega$  di  $K_4$ .

In quest'ultima ipotesi, se  $\omega$  giace in  $\Omega$ , il  $K_1$  e  $K_4$  risultano involutori.

**62. - Prodotto d'un  $K_1$  per due  $K_2$ .** - In base alla proprietà associativa del prodotto di complessi lineari notiamo che, detti  $K'_2, K''_2$  i due complessi lineari di rette considerati, il prodotto di essi per un  $K_1$  è uguale al complesso prodotto di  $K_1$  per  $K_4 = K'_2 \cdot K''_2$ . Siamo così ricondotti al caso trattato nel numero precedente, osservando che, per quanto abbiamo visto al n. 57,  $K_4$ , come prodotto di due  $K_2$ , è singolare di specie 2, se dei due complessi  $K'_2$  e  $K''_2$  uno è singolare di specie 4, ed è singolare di specie 4, se entrambi i complessi  $K'_2$  e  $K''_2$  sono singolari di specie 4.

In quest'ultimo caso, se la retta intersezione dei due  $S_3$  fondamentali giace nello spazio  $\Omega$  di  $K_1$ , si ha involutorietà.

**63. - Prodotto d'un  $K_2$  per un  $K_3$ .** - *Il prodotto*  $K_2 \cdot K_3$  *è l'iperstella degli*  $S_4, \bar{\Omega}$ , *entro ai quali*  $K_2$  *e*  $K_3$  *subordinano due complessi*  $\bar{K}_2, \bar{K}_3$  *involutori.*

Orbene, siccome  $\Omega$  è uno spazio a quattro dimensioni, i complessi  $\bar{K}_2$  e  $\bar{K}_3$  possono essere generali o speciali; si presentano così per l'involutorietà di essi le quattro alternative trattate nel n. 46. Anzi da quanto s'è visto in quel numero seguono le seguenti considerazioni.

1)  $K_3$  non speciale e  $K_2$  qualunque. - Un  $K_3$  generale di  $S_5$  induce in un  $S_4, \Omega$ , un  $\bar{K}_3$ , che ammette ivi un  $S_3$  fondamentale  $\Omega'$ . Tutti gli  $S_2$  di  $\Omega'$  stanno in  $K_3$ , cioè in  $\bar{K}_3$ , talchè  $\Omega'$  è uno spazio totale di  $K_3$ . Ora in  $S_5$  vi sono  $\infty^4$  di tali  $\Omega'$  totali, poichè in ogni  $S_4$  ne giace uno ben determinato

(formano una figura duale d'una congruenza di rette d'indice 1), e d'altra parte, come in seguito vedremo, un  $\Omega'$  è tale per  $\infty^1 \bar{\Omega}$ . È chiaro inoltre che un  $\Omega'$  totale è spazio fondamentale in ciascuno degli  $\infty^1 \bar{\Omega}$  per esso, per il relativo  $\bar{K}_3$ . Questo è l'insieme degli  $S_2$  che segano  $\Omega'$  secondo le rette d'un complesso lineare  $\Psi$ , il quale, al variare di  $\bar{\Omega}$  nel fascio di asse  $\Omega'$ , varia anch'esso in un fascio (come si verifica, ad es., per via analitica).

Ora sia  $\Phi$  il complesso lineare indotto da  $K_2$  in  $\Omega'$ . La condizione affinché  $\bar{\Omega}$  appartenga al complesso  $K_5$  è che  $\Phi$  e  $\Psi$  siano involutori. Variando  $\Omega$  nel fascio di asse  $\Omega'$ ,  $\Phi$  resta fisso e  $\Psi$  varia in un fascio, quindi esiste una (ed una sola, a meno che non lo siano tutte) posizione di  $\bar{\Omega}$  per cui  $\Phi$  e  $\Psi$  sono involutori.

Si vede così che per ciascuno degli  $\infty^4$  spazi  $\Omega'$  totali per  $K_3$  passa un iperpiano  $\Omega$  dell'iperstella  $K_5$ , che resta determinato nel modo predetto.

2)  $K_3$  speciale e  $K_2$  qualunque. *Il centro dell'iperstella  $K_5$  è il centro  $U$  del fascio di rette che rappresenta il complesso indotto da  $K_2$  nel piano direttore  $\omega$  di  $K_3$ .*

Infatti, se  $K_3$  è speciale, pure  $\bar{K}_3$  risulta tale e il suo  $S_1$  fondamentale è la retta  $r = (\Omega, \omega)$ . Ma allora la condizione d'involutorietà di  $K_3$  e  $\bar{K}_2$  (vedi n. 46, c.) è che  $r$  stia in  $K_2$ , cioè in  $K_2$ . Dunque  $\Omega$ , per appartenere a  $K_5$ , deve tagliare  $\omega$  in una retta di  $K_2$ , quindi passare per il centro  $U$  del fascio di rette indotto su  $\omega$  da  $K_2$ , e. v. d.

3)  $K_2$  singolare di specie 4 e  $K_3$  qualunque. — Allora il centro di  $K_5$  è il centro  $U$  della stella di  $S_2$  che rappresenta il complesso subordinato dal  $K_3$  nell' $S_3$  fondamentale,  $\Omega$ , di  $K_2$ .

Infatti, se  $K_2$  è singolare di specie 4, il  $K_2$  risulta speciale e il suo piano direttore è l' $S_2$   $\omega = (\bar{\Omega}, \Omega)$ . Perciò se  $K_3$  è generale, detto  $\Omega'$  l' $S_3$  fondamentale di  $K_3$ , dalle considerazioni svolte al n. 46, b) si deduce che per l'involutorietà di  $K_2$  e  $K_3$  occorre e basta che la retta  $r = (\omega, \Omega')$  appartenga al complesso



$\Psi$ , secondo le cui rette gli  $S_2$  di  $\bar{K}_3$  segano  $\Omega'$ ; vale a dire  $\omega$  deve appartenere a  $\bar{K}_3$ , ossia a  $K_3$ . Ma i piani di  $K_3$  in  $\Omega$  formano una stella di centro  $U$ , perciò, siccome  $\omega$  sta in  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega}$  dovrà passare per  $U$ .

La sufficienza è evidente dal momento che  $K_5$  dev'essere un'iperstella.

Se poi  $\Omega$  è spazio totale di  $K_3$ , il prodotto  $K_5$  è identico, quindi  $K_2$  e  $K_3$  risultano involutori.

In particolare se anche  $K_3$  è speciale il centro  $U$  di  $K_5$  è il punto d'intersezione di  $\Omega$  col piano direttore  $\omega$  di  $K_3$ .

**64. - Prodotto di due  $K_1$  per un  $K_3$ .** - Sieno  $K'_1, K''_1, K_3$  i tre complessi ed  $\Omega', \Omega''$  gli  $S_4$  che rappresentano i due complessi di punti. L'iperstella  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K_3$  è il  $K_5 = K_2 \cdot K_3$ , ove  $K_2 = K'_1 \cdot K''_1$ . Ma  $K_2$  è il complesso singolare di specie 4 avente per  $S_3$  fondamentale lo spazio  $\Omega = (\Omega', \Omega'')$ , quindi (vedi caso 3°) del numero precedente) il centro di  $K_5$  è il centro  $U$  del  $K'_3$  subordinato in  $\Omega$  da  $K_3$ .

**65. - Prodotto d'un  $K_2$  per tre  $K_1$ .** - Sieno  $K'_1, K''_1, K'''_1$  e  $K_2$  i complessi di cui ricerchiamo il prodotto e  $\Omega', \Omega'', \Omega'''$  gli iperpiani individuati dai tre  $K_1$ . In base alla proprietà associativa del prodotto di complessi lineari avremo anche in questo caso che il complesso  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'''_1 \cdot K_2$  è l'iperstella  $K_5 = K_3 \cdot K_2$ , dove  $K_3 = K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'''_1$ . Ma  $K_3$  è il complesso speciale avente per piano direttore l' $S_2$   $\omega = (\Omega', \Omega'', \Omega''')$ , quindi (vedi n. 63, caso 2°) il  $K_5$  è l'iperstella il cui centro è il centro  $U$  del fascio di rette indotto in  $\omega$  da  $K_2$ .

Se, in particolare,  $K_2$  è singolare di specie 4 ed  $\Omega$  è il suo  $S_3$  fondamentale, risulta  $U = (\omega, \Omega)$ .

### III. - Casi normali d'involutorietà.

**66. - Sei  $K_1$ .** - Per un'osservazione generale, a cui più volte abbiamo fatto ricorso, la condizione d'involutorietà di sei  $K_1$  in  $S_5$  è che gl'iperpiani da essi individuati passino per un punto.

**67.** - Un  $K_1$  e un  $K_5$ . - Da un'osservazione di carattere generale segue che un  $K_1$  e un  $K_5$  sono involutori se l'iperpiano, che rappresenta  $K_1$ , appartiene all'iperstella.

**68.** - Un  $K_2$  e quattro  $K_1$ . - Sieno  $K'_1, K''_1, K'''_1, K''''_1$  e  $K_2$  i complessi considerati ed  $\Omega', \Omega'', \Omega''', \Omega''''$  gli  $S_4$  che rappresentano i quattro  $K_1$ . La condizione d'involutorietà cercata è che la retta  $r = (\Omega', \Omega'', \Omega''', \Omega'''')$  appartenga a  $K_2$ .

Difatti sia  $\omega$  il piano, (contenente  $r$ ) in cui si tagliano i primi tre iperpiani,  $U$  il centro del fascio indotto da  $K_2$  in  $\omega$ . La condizione cercata si trasforma al solito in quella che siano involutori i due complessi  $K_2 \cdot K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'''_1$  e  $K''''_1$ . Ma il primo complesso (vedi n. 65) è l'iperstella col centro nel punto  $U$ : dunque per l'involutorietà  $\Omega''''$  deve passare per  $U$  e, siccome  $\Omega''''$  taglia  $\omega$  in  $r$ , così  $r$  deve passare per  $U$  e quindi (in quanto giace in  $\omega$ ) appartenere a  $K_2$ , c. v. d.

**69.** - Un  $K_2$  e un  $K_4$ . - Per il caso generale possiamo dare solamente una risposta di carattere analitico e cioè: un  $K_2$  e un  $K_4$  generici di  $S_5$  sono involutori se il loro invariante è nullo.

Dal punto di vista geometrico possiamo dire qualcosa solo nei casi seguenti:

a)  $K_4$  singolare di specie 2 e  $K_2$  generico. - Detto  $\Omega$  l' $S_3$  fondamentale di  $K_4$ , la condizione d'involutorietà di  $K_2$  e  $K_4$  si traduce nella condizione d'involutorietà in  $\Omega$  del complesso  $\Phi$ , subordinato in  $\Omega$  da  $K_2$ , col complesso  $\Psi$ , secondo le rette del quale gli  $S_3$  di  $K_4$  tagliano  $\Omega$ .

Difatti, in base alle considerazioni svolte nel n. 57, essendo  $K_4$  singolare di specie 2, possiamo pensarlo decomposto nel prodotto d'un  $K'_2$  singolare di specie 4, avente  $\Omega$  per spazio fondamentale, e un  $K''_2$  singolare di specie 2 di direttrice  $r$  arbitraria, essendo dopo di ciò  $K''_2$  determinato dal dover subordinare in  $\Omega$  il complesso  $\Psi$ . Allora la condizione d'involutorietà di  $K_4$  e  $K_2$  si traduce nella condizione d'involutorietà di  $K'_2, K''_2, K_2$ . Senonchè  $K'_2$ , essendo singolare di specie 4, si può

pensare decomposto nel prodotto di due  $K_1$ , che indicheremo con  $K'_1, K''_1$ , i cui  $S_4$  rappresentativi  $\Omega', \Omega''$  s'intersecano in  $\Omega$ . Di conseguenza  $K_4$  e  $K_2$  saranno involutori, se è identico il complesso  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'_2 \cdot K_2$ , quindi  $K'_1 (K''_1 \cdot K'_2) \cdot K_2$  ed infine  $K'_1 [(K''_1 \cdot K'_2) \cdot K_2]$ . Ora (vedi n. 54, b)) il  $K_3 = K''_1 \cdot K'_2$  è il complesso dei piani, che tagliano  $\Omega''$  secondo le rette del complesso  $\bar{K}_2''$ , subordinato in  $\Omega''$  da  $K'_2''$ ; la condizione d'involutorietà cercata si traduce dunque nella condizione che  $K'_1$  appartenga al  $K_3 = K_3 \cdot K_2$  e quindi, per il teorema generale sul prodotto di complessi lineari, nella condizione che i due complessi  $\bar{K}_2, \bar{K}_3$ , subordinati in  $\Omega'$  da  $K_2$  e  $K_3$ , siano involutori.

Orbene, poichè  $\Psi$  è il complesso subordinato in  $\Omega$  da  $K_2''$ , e quindi anche da  $K_2'$  ed  $\Omega = (\Omega', \Omega'')$ , così il  $K_3$  subordinato in  $\Omega'$  da  $K_3$  sarà l'insieme degli  $S_2$  che tagliano  $\Omega'$  secondo le rette di  $\Psi$ ; ma allora  $\Omega$  è lo spazio fondamentale di  $\bar{K}_3$  e quindi spazio totale non solo per  $\bar{K}_3$ , ma anche per  $K_3$ . Perciò, in base alle considerazioni generali svolte al n. 63 possiamo concludere, e. v. d., che  $K_2$  e  $K_3$  sono involutori, se lo sono in  $\Omega, \Phi$  e  $\Psi$ .

In particolare, se  $K_2$  è singolare di specie 4 allora  $\Phi$  è speciale ed ha per direttrice la retta  $r$ , intersezione di  $\Omega$  con l' $S_3$  fondamentale,  $\bar{\Omega}$ , di  $K_2$ : perciò l'involutorietà di  $K_2$  e  $K_4$  implica che  $r$  appartenga a  $\Psi$ .

b)  $K_4$  singolare di specie 4 e  $K_2$  generico. — In questo caso possiamo pensare  $K_4$  scomposto nel prodotto di quattro  $K_1$ , i cui  $S_4$  rappresentativi s'intersecano nella retta  $r$ , a cui s'appoggiano gli  $S_3$  di  $K_4$ . Si è così ricondotti al caso trattato nel n. 68, per cui si conclude: *Un  $K_4$  singolare di specie 4 e un  $K_2$  generico sono involutori, se la direttrice  $r$  di  $K_4$  appartiene a  $K_2$ .*

c)  $K_2$  singolare di specie 4 e  $K_4$  generico. — *Due tali complessi sono involutori, se l' $S_3$  fondamentale,  $\Omega$ , di  $K_2$  appartiene a  $K_4$ .*

Infatti, essendo  $K_2$  singolare di specie 4, possiamo pensarlo scomposto nel prodotto di due  $K_1$ , che indicheremo con  $K'_1, K''_1$ ,

i cui  $S_4$  rappresentativi  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  s'intersecano in  $\Omega$ . Allora la condizione d'involutorietà di  $K_2$  e  $K_4$  si traduce nella condizione d'involutorietà di  $K'_1$  e  $K_5 = K''_1 \cdot K_4$ .

Orbene, per quanto s'è visto nel n. 67,  $K'_1$  e  $K_5$  sono involutori, se  $\Omega'$  passa per il centro  $U$  dell'iperstella  $K_5$ ; ma dalle considerazioni svolte al n. 61 a proposito del prodotto d'un  $K_1$  per un  $K_4$ ,  $U$  giace in  $\Omega''$ , essendo esso il centro dell'iperstella di  $S_3$  determinata dal complesso  $K''_4$ , indotto in  $\Omega''$  da  $K_4$ . Dunque  $K_2$  e  $K_4$  sono involutori, se  $K_2$  può venir scomposto in due  $K_1$  tali che i loro iperpiani rappresentativi  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  si tagliano in  $\Omega$  e tali inoltre che i centri dei complessi  $K'_4$ ,  $K''_4$  in essi subordinati da  $K_4$  giacciono in  $\Omega$ . Orbene questo accade solo quando  $\Omega$  appartiene a  $K_4$ , perchè allora, condotto un iperpiano qualunque  $\Omega'$  per  $\Omega$ , il centro  $U$  del  $K'_4$  ivi subordinato, giace in  $\Omega$  stesso.

**70. - Due  $K_1$  e un  $K_4$ .** - Siano  $K'_1$ ,  $K''_1$ ,  $K_4$  i complessi considerati e  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  gli iperpiani che rappresentano i due  $K_1$ : per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari la condizione d'involutorietà cercata si traduce nella condizione d'involutorietà di  $K_4$  e  $K_2 = K'_1 \cdot K''_1$ . Perciò, essendo  $K_2$  il complesso (singolare di specie 4) degli  $S_1$  appoggiati all' $S_3$   $\Omega = (\Omega', \Omega'')$ , ci si riconduce al caso c) del numero precedente. Se ne deduce che *la condizione d'involutorietà cercata è che  $\Omega = (\Omega', \Omega'')$  appartenga a  $K_4$ .*

**71 - Due  $K_3$ .** - Sieno:

$$\Sigma U_{ikl} X_{ikl} = 0 \quad , \quad \Sigma V_{ikl} X_{ikl} = 0$$

le equazioni dei due  $K_3$  in questione. Col ricorso alla notazione differenziale simbolica e tenendo conto delle convenzioni, con cui nel n. 51 abbiamo stabilito di scegliere le venti coordinate grassmanniane d'un piano in  $S_5$ , la condizione d'involutorietà dei due  $K_3$  è allora data dalla relazione:

$$(1) \quad \Sigma (U_{ikl} V_{mnp} - U_{mnp} V_{ikl}) = 0,$$

ove, in base alle convenzioni testè citate nel n. 51, le due terne complementari d'indici  $ikl, mnp$  devono essere tali che  $iklmnp$  risulti una permutazione pari dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si trova così per l'involutorietà di due  $K_3$  in  $S_5$  una condizione analitica analoga a quella di KLEIN per due  $K_3$  in  $S_3$ .

In particolare, se uno dei due  $K_3$  è speciale, la relazione d'involutorietà (1) esprime che il piano direttore del complesso speciale appartiene al complesso non speciale; mentre, se entrambi i  $K_3$  sono speciali, la relazione (1) esprime la condizione d'appoggio dei loro piani direttori.

Alla condizione d'involutorietà di due  $K_3$  in  $S_5$  possiamo dare un'altra interpretazione trasportandoci nell' $S_{19}$ , ov'è immersa la grassmanniana  $V_9$  dei piani di  $S_5$ . A tale scopo ricordiamo come nel n. 51 s'era trovato che la condizione d'incidenza di due  $S_2$  in  $S_5$  si può esprimere mediante la relazione:

$$(2) \quad \sum (X_{ikt} Y_{mnp} - X_{mnp} Y_{ikt}) = 0,$$

la quale, interpretata nell' $S_{19}$ , ci dà la relazione che lega le coordinate  $X, Y$  di due punti coniugati in un sistema nullo  $N$  di  $S_{19}$ .

In base a questo risultato dimostriamo che *la condizione d'involutorietà di due  $K_3$  in  $S_5$  equivale in  $S_{19}$  alla condizione di coniugio nel sistema nullo  $N$  dei due iperpiani di  $S_{19}$ , corrispondenti ai due  $K_3$ .*

Per questo notiamo che, se nella (2) pensiamo fisse le  $X$  e variabili le  $Y$ , essa ci rappresenta in  $S_{19}$  un iperpiano, per cui si vede che i punti  $Y$ , coniugati in  $N$  d'un punto fisso  $X$ , variano in un iperpiano; le coordinate plückeriane  $U_{ikt}$  di questo iperpiano sono i coefficienti delle  $Y$  nella (2), abbiamo cioè:

$$(3) \quad \begin{cases} U_{ikt} = -X_{mnp} \\ U_{mnp} = X_{ikt} \end{cases}.$$

Ora la condizione di coniugio di due iperpiani  $U$  e  $V$  è che al secondo appartenga il punto  $X$  omologo del primo, cioè che valga la relazione:

$$\Sigma V_{ikl} X_{ikl} + \Sigma V_{mnp} X_{mnp} = 0,$$

la quale, in forza delle (3), diviene:

$$\Sigma (U_{ikl} V_{mnp} - U_{mnp} V_{ikl}) = 0.$$

Ma questa formula, interpretata in  $S_5$ , ci esprime appunto la condizione d'involutorietà dei due complessi  $K_3$ , le cui equazioni, col ricorso alle convenzioni stabilite nel n. 51 sulla scelta delle coordinate grassmanniane d'un  $S_2$  in  $S_5$ , sono:

$$\Sigma U_{ikl} X_{ikl} + \Sigma U_{mnp} X_{mnp} = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma V_{ikl} X_{ikl} + \Sigma V_{mnp} X_{mnp} = 0.$$

Resta dunque provato quanto volevasi dimostrare.

**72. - Tre  $K_1$  e un  $K_3$ .** - Sieno  $K'_1, K''_1, K'''_1, K_3$  i complessi in questione e  $\Omega', \Omega'', \Omega'''$  gli  $S_4$  rappresentativi dei tre  $K_1$ . Per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari il prodotto  $K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'''_1 \cdot K_3$  si riduce al complesso  $\bar{K}_3 \cdot K_3$ , ove  $\bar{K}_3 = K'_1 \cdot K''_1 \cdot K'''_1$ . E siccome  $\bar{K}_3$  è speciale, la condizione d'involutorietà di  $K'_1, K''_1, K'''_1, K_3$  si traduce nella condizione di appartenenza a  $K_3$  del piano  $\bar{\omega} = (\Omega', \Omega'', \Omega''')$ .

In particolare, se  $K_3$  è speciale ed  $\omega$  è il suo piano direttore, la condizione d'involutorietà cercata è la condizione d'appoggio di  $\omega$  a  $\bar{\omega}$ .

**73. - Un  $K_1$ , un  $K_2$  e un  $K_3$ .** - Sempre per la proprietà associativa del prodotto di complessi lineari possiamo affermare che i complessi  $K_1, K_2, K_3$  sono involutori se l'iperpiano, che rappresenta  $K_1$ , appartiene all'iperstella  $K_5 = K_2 \cdot K_3$ , determinata in base alle considerazioni fatte al n. 63.

**74. - Tre  $K_2$ .** - Anche per la condizione d'involutorietà di tre complessi lineari di rette,  $K'_2, K''_2, K'''_2$ , ci si riconduce ad un caso già trattato, notando che il prodotto dei tre  $K_2$  è, ad es., uguale al prodotto di  $K'_2$  per  $K_4 = K''_2 \cdot K'''_2$ .