

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO ZAGAR

## **Attrazione e potenziale di ellissoidi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 13 (1942), p. 57-77

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1942\\_\\_13\\_\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__57_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# ATTRAZIONE E POTENZIALE DI ELLISSOIDI

*Nota di FRANCESCO ZAGAR a Bologna*

## INTRODUZIONE

La scoperta, ormai accertata, del moto absidale nei sistemi binari molto stretti ha condotto gli astronomi in questi ultimi anni ad occuparsi più da vicino delle condizioni delle componenti di tali sistemi ed a studiare le proprietà del moto reciproco che deriva da queste condizioni speciali. È evidente infatti che nei sistemi doppi stretti, come sono tutti quelli cosiddetti fotometrici o ad eclisse e molti altri, in parecchi dei quali le due componenti sono così vicine da toccarsi quasi all'equatore, l'attrazione reciproca delle due masse fluide deve produrre delle deformazioni considerevoli, tanto da non potersi considerare le due componenti come punti materiali nello studio del loro moto reciproco. Due sono le azioni principali che intervengono in tali deformazioni, quella dovuta alla rotazione assiale di cui è dotata ciascuna componente e quella dovuta alla marea in conseguenza dell'attrazione reciproca. La prima, considerata isolatamente, causerebbe uno schiacciamento della massa originariamente sferica nel senso dell'asse di rotazione, mentre la seconda, considerata pure isolatamente, produrrebbe un allungamento nel senso della congiungente i centri dei due corpi. Le figure di equilibrio che derivano da queste azioni sono state studiate con larghi mezzi analitici si può dire sin dai tempi di NEWTON, ma per le azioni combinate solo in epoche più recenti le celebri ricerche del DARWIN hanno portato a risultati e dati che possono dirsi con-

clusivi, almeno per l'approssimazione e le condizioni imposte da questo autore al problema.

La figura di equilibrio che in generale risulta da queste ricerche è quella classica dell'ellissoide a tre assi, in qualche caso particolare dell'ellissoide di rotazione, e, pur essendo nella maggior parte dei casi risultati non rigorosi perchè lo strumento analitico non permette di andare oltre una certa approssimazione, è certamente lecito prendere nel problema astronomico dei sistemi binari la figura ellissoidica come base per le ulteriori ricerche. Le figure di DARWIN sono tutte ottenute per masse omogenee, ma anche dalle ricerche di questi anni sulle masse non omogenee deformate risultano a meno di quantità di ordine superiore delle figure ellissoidali.

Presentatosi il problema del moto reciproco delle componenti deformate di un sistema binario, era perciò naturale pensare alla forma ellissoidica delle componenti, e nelle trattazioni primitive e più semplici del problema si assumeva l'astro principale di tale forma, mentre il secondario rimaneva sferico, poi si passò ai due ellissoidi rotondi ed infine a quelli a tre assi. In tutte le ricerche fatte fin qui, come risulta da una esposizione critica fatta in altro lavoro (<sup>1</sup>), si sono però considerati ellissoidi di piccole eccentricità, tali cioè da potersi trascurare le potenze superiori alla seconda, e la funzione potenziale, che in questo problema ha una fondamentale importanza, non è sviluppata da nessun autore oltre ai termini del detto ordine. Ora, risulta in qualche caso pratico, come si è visto nel lavoro ricordato, che i termini di ordine superiore possono avere una notevole influenza, e che in ogni modo sono necessari quando invece di una pura constatazione qualitativa si aspiri al controllo tra dati osservati e teoria. Il fatto stesso dell'importo della eccentricità di figura che risulta per qualche sistema dall'osservazione od anche dalla teoria di DARWIN, importo che facilmente arriva a 0.6 o 0.7, fa ritenere che più attendibili e forse anche nuovi risultati possano

(<sup>1</sup>) F. ZAGAR, *Ricerche dinamiche sopra i sistemi binari stretti*. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XVI (1942).

ottenersi da una estensione delle ricerche coll'inclusione di ulteriori termini negli sviluppi.

In tale intento è stato necessario trattare dapprima il problema preparatorio dello sviluppo del potenziale, ed essendo tale problema risultato piuttosto laborioso, specialmente per quanto riguarda il potenziale mutuo dei due ellissoidi, è opportuno considerarlo come argomento a sè, anche perchè può servire eventualmente ad altre applicazioni. Gli ellissoidi considerati sono supposti sempre omogenei per rimanere nel campo delle ricerche classiche; d'altronde gli indizi che seguono dalle osservazioni circa la distribuzione della densità nell'interno delle componenti sono scarsi e contraddittori, e per quanto segue dalle accennate teorie moderne si è visto che si può con sufficiente approssimazione passare dai risultati per corpi omogenei a quelli relativi ai corpi eterogenei.

### **I. - Attrazione e potenziale di un ellissoide a tre assi sopra un punto esterno fino alle 6<sup>e</sup> potenze delle eccentricità.**

Come è noto, il potenziale di un ellissoide non può in generale essere espresso in forma finita, essendo ricondotto a integrali ellittici, almeno per masse omogenee, e soltanto per ellissoidi di rotazione la integrazione può essere effettuata in forma chiusa; però anche in questo caso speciale quello che importa per le applicazioni è lo sviluppo fino a quella certa approssimazione che è richiesta dal problema in esame. I calcoli che seguono sono effettuati per la necessità di avere per le ricerche astronomiche accennate degli sviluppi oltre al solito termine nel quadrato delle eccentricità che si ottiene senza difficoltà dalla definizione di questa funzione. La estensione si complica però subito e si presenta la opportunità di partire dalla forma integrale che discende dal metodo di Ivory, e siccome la espressione dell'attrazione appare più semplice di quella del potenziale, si è qui preferito arrivare al potenziale attraverso all'attrazione, sviluppando dapprima fino ai termini voluti la prima componente

dell'attrazione e passando poi dallo sviluppo ottenuto a quello del potenziale.

Supposto un ellissoide a tre assi  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$ , con  $a > b > c$ , e con le prime eccentricità

$$(1) \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad \eta^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

ed assunto un sistema di riferimento  $O(x, y, z)$  coincidente col triedro degli assi  $O(a, b, c)$ , la forma classica della prima componente dell'attrazione sopra un punto esterno, discendente dal metodo ora ricordato, è

$$(2) \quad X = -4\pi\sigma bck^2x \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{\{a^2 - (a^2 - b^2)u^2\} \{a^2 - (a^2 - c^2)u^2\}}},$$

dove  $k^2$  è la costante di GAUSS dell'attrazione newtoniana,  $\sigma$  la densità dell'ellissoide,  $x$  l'ascissa del punto potenziato, e  $x$  è la (unica) radice positiva della equazione

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2+x} + \frac{y^2}{b^2+x} + \frac{z^2}{c^2+x} = 1,$$

essendo  $y$  e  $z$  le ulteriori due coordinate del punto potenziato.

La (2) può facilmente trasformarsi coll'introduzione delle due eccentricità  $\varepsilon$  ed  $\eta$  nella forma

$$(2') \quad X = -4\pi\sigma k^2 x \sqrt{1-\varepsilon^2} \sqrt{1-\eta^2} \cdot I$$

avendo posto

$$(4) \quad I = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 u^2)(1-\eta^2 u^2)}}.$$

Sviluppando la funzione integranda fino alle 6<sup>e</sup> potenze delle eccentricità (quindi a meno di termini nelle ottave potenze e superiori) si ha facilmente

$$\frac{u^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 u^2)(1-\eta^2 u^2)}} = u^2 + \frac{1}{2} u^4 (\varepsilon^2 + \eta^2) +$$

$$+ \frac{1}{8} u^6 (3\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 \eta^2 + 3\eta^4) + \frac{1}{16} u^8 (5\varepsilon^6 + 3\varepsilon^4 \eta^2 + 3\varepsilon^2 \eta^4 + 5\eta^6),$$

cosicchè, introdotte per le espressioni di  $\varepsilon$  ed  $\eta$  le costanti  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  definite dalle prime tre relazioni (6'), integrato e limitato, si ottiene

$$(4') \quad I = \frac{1}{3} a^3 \left\{ \frac{1}{(a^2 + \kappa)^{3/2}} + \frac{3 a^2 p_1}{10 (a^2 + \kappa)^{5/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3 a^4 p_2}{56 (a^2 + \kappa)^{7/2}} + \frac{3 a^6 p_3}{144 (a^2 + \kappa)^{9/2}} \right\}.$$

Posto ora  $a^2 + \kappa = \nu$ , la (3) diventa

$$\frac{x^2}{\nu} + \frac{y^2}{\nu - a^2 \eta^2} + \frac{z^2}{\nu - a^2 \varepsilon^2} = 1,$$

e sviluppando  $(\nu - a^2 \eta^2)^{-1}$  e  $(\nu - a^2 \varepsilon^2)^{-1}$  fino alle necessarie potenze delle due eccentricità, e ponendo  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , si ha

$$\nu = R^2 + \frac{a^2}{\nu} (y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2) + \frac{a^4}{\nu^2} (y^2 \eta^4 + z^2 \varepsilon^4) + \frac{a^6}{\nu^3} (y^2 \eta^6 + z^2 \varepsilon^6);$$

sviluppando poi da questa  $1/\nu$  fino alle quarte potenze delle eccentricità (dato che  $1/\nu$  va moltiplicato per un'espressione contenente i quadrati di  $\varepsilon$  ed  $\eta$ ), calcolando  $1/\nu^2$  fino alle seconde potenze ed infine  $1/\nu^3$  fino al termine indipendente dalla eccentricità, e sostituendo nella precedente, si arriva dopo alcune trasformazioni alla espressione

$$\nu = R^2 \left\{ 1 + \frac{a^2 (y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2)}{R^4} + \frac{a^4 (y^2 \eta^4 + z^2 \varepsilon^4)}{R^6} + \frac{a^6 (y^2 \eta^6 + z^2 \varepsilon^6)}{R^8} - \right.$$

$$\left. - \frac{a^4 (y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2)^2}{R^8} - \frac{3a^6 (y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2) (y^2 \eta^4 + z^2 \varepsilon^4)}{R^{10}} + \frac{2a^6 (y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2)^3}{R^{12}} \right\}.$$

Ordinando tutto secondo le potenze crescenti delle due eccentricità, si arriva all'espressione

$$(5) \quad a^2 + \kappa = R^2 \left\{ 1 + \frac{a^2}{R^4} v_1 + \frac{a^4}{R^8} v_2 + \frac{a^6}{R^{12}} v_3 \right\},$$

dove è

$$(5') \quad \begin{cases} v_1 = y^2 \eta^2 + z^2 \varepsilon^2, & v_2 = x^2 (y^2 \eta^4 + z^2 \varepsilon^4) + y^2 z^2 (\eta^2 - \varepsilon^2)^2, \\ v_3 = x^4 (y^2 \eta^6 + z^2 \varepsilon^6) - x^2 [y^4 \eta^6 + (3 \eta^4 \varepsilon^2 + 3 \eta^2 \varepsilon^4 - 2 \eta^6 - \\ - 2 \varepsilon^6) y^2 z^2 + z^4 \varepsilon^6] - y^2 z^2 (y^2 - z^2) (\eta^2 - \varepsilon^2)^3. \end{cases}$$

Dalla (5) si ha facilmente

$$(a^2 + \kappa)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{R^4} v_1 - \frac{3}{8} \frac{a^4}{R^8} (4 v_2 - 5 v_1^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{16} \frac{a^6}{R^{12}} (24 v_3 - 60 v_1 v_2 + 35 v_1^3) \right\},$$

$$(a^2 + \kappa)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{R^5} \left\{ 1 - \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^4} v_1 - \frac{5}{8} \frac{a^4}{R^8} (4 v_2 - 7 v_1^2) \right\},$$

$$(a^2 + \kappa)^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{R^7} \left\{ 1 - \frac{7}{2} \frac{a^2}{R^4} v_1 \right\}, \quad (a^2 + \kappa)^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{R^9},$$

ed introdotte queste nella (4'), fatte tutte le necessarie riduzioni, e portata la espressione di  $I$  così ottenuta nella (2'), ricordando che per la massa dell'ellissoide si ha

$$M = \frac{4}{3} \pi a b c = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \eta^2},$$

si arriva finalmente alla espressione

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X = & -k^2 M x \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{3}{10} \frac{a^2}{R^7} (p_1 R^2 - 5n_{22}) + \frac{3}{56} \frac{a^4}{R^{11}} (p_2 R^4 - \right. \\ & - 14 p_1 n_{22} R^2 - 28 n_{24} x^2 - 14 q_1 y^2 z^2 + 35 n_{44}) + \\ & + \frac{1}{48} \frac{a^6}{R^{15}} (p_3 R^6 - 9 p_2 n_{22} R^4 - 9 p_1 R^2 [4n_{24} x^2 + 2 q_2 y^2 z^2 - \\ & - 7 n_{44}] - 7 n_{26} x^4 + 36 x^2 [7n_{46} - s_1 y^2 z^2] + 9 s_2 y^4 z^2 + \\ & \left. + 9 s_3 y^2 z^4 - 105 n_{66}) \right\}, \end{aligned} \right.$$

dove si è posto

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 = & \varepsilon^2 + \eta^2, \quad p_2 = 3\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\eta^2 + 3\eta^4, \quad p_3 = 5\varepsilon^6 + 3\varepsilon^4\eta^2 + 3\varepsilon^2\eta^4 + 5\eta^6 \\ q_1 = & 2\varepsilon^4 + 2\eta^4 - 9\varepsilon^2\eta^2, \quad q_2 = 2\varepsilon^4 + 2\eta^4 - 11\varepsilon^2\eta^2, \\ s_1 = & 4\varepsilon^6 - 11\varepsilon^4\eta^2 - 11\varepsilon^2\eta^4 + 4\eta^6, \quad s_2 = 28\eta^6 - 99\varepsilon^2\eta^4 + 44\varepsilon^4\eta^2 - 8\varepsilon^6, \\ s_3 = & 28\varepsilon^6 - 99\varepsilon^4\eta^2 + 44\varepsilon^2\eta^4 - 8\eta^6, \\ n_{22} = & y^2\eta^2 + z^2\varepsilon^2, \quad n_{24} = y^2\eta^4 + z^2\varepsilon^4, \quad n_{26} = y^2\eta^6 + z^2\varepsilon^6, \\ n_{44} = & y^4\eta^4 + z^4\varepsilon^4, \quad n_{46} = y^4\eta^6 + z^4\varepsilon^6, \quad n_{66} = y^6\eta^6 + z^6\varepsilon^6, \end{aligned} \right.$$

essendo dunque le costanti  $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, s_1, s_2, s_3$  tutte dipendenti esclusivamente dalle due eccentricità dell'ellissoide.

Ricercando allora la funzione  $U$  che ha per derivata rapporto ad  $x$  la espressione (6), si arriva con numerose trasformazioni al seguente risultato per il potenziale dell'ellissoide sopra un punto esterno

$$(7) \quad U = U_0 + U_2 + U_4 + U_6$$

essendo



$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{k^2 M}{R}; & U_2 &= \frac{k^2 M a^2}{10 R^3} (p_1 R^2 - 3n_{22}); \\
 U_4 &= \frac{k^2 M a^4}{R^5} \left( \frac{3}{280} p_2 R^4 - \frac{1}{84} [9p_1 n_{22} + 4n_{24}] R^2 - \frac{1}{12} q_1 y^2 z^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{24} n_{44} - \frac{1}{6} n_{24} x^2 \right); \\
 (8) \quad U_6 &= \frac{k^2 M a^6}{R^7} \left\{ \frac{1}{336} p_3 R^6 - \left( \frac{1}{48} p_2 n_{22} + \frac{1}{66} p_1 n_{24} + \frac{4}{429} n_{26} \right) R^4 - \right. \\
 &\quad - \left[ \left( \frac{3}{44} p_1 n_{24} + \frac{6}{143} n_{26} \right) x^2 + \frac{3}{176} p_1 (2 q_2 y^2 z^2 - 7 n_{44}) - \right. \\
 &\quad - \frac{3}{286} (7 n_{46} - s_1 y^2 z^2) \left. \right] R^2 - \frac{3}{26} n_{26} x^4 + \frac{3}{52} (7 n_{46} - \\
 &\quad - s_1 y^2 z^2) x^2 + \frac{1}{208} (3 s_2 y^4 z^2 + 3 s_3 y^2 z^4 - 35 n_{66}) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Come è facile vedere, le quattro parti di cui si compone la (7) sono rispettivamente di ordine zero, due, quattro e sei nelle eccentricità e contemporaneamente di ordine rispettivamente zero, due, quattro e sei nella quantità  $a/R$ , cioè nel rapporto delle dimensioni dell'ellissoide alla distanza del punto.

Se in luogo delle coordinate  $x, y, z$  del punto potenziato si introducono le sue coordinate polari  $R, u, v$ , definite come segue

$$(9) \quad x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u,$$

la (7), per le (8), e limitata alle 4° potenze delle eccentricità e corrispondentemente alle quarte potenze del rapporto  $a/R$ , prende la forma

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned}
 U &= + \frac{k^2 M}{R} - \frac{k^2 M a^2}{10 R^3} \{ 3 \cos^2 u (\eta^2 \sin^2 v - \varepsilon^2) + c_1 \} + \\
 &+ \frac{3 k^2 M a^4}{280 R^5} \{ 35 \cos^4 u (\eta^2 \sin^2 v - \varepsilon^2)^2 + \\
 &+ 10 \cos^2 u (c_2 \sin^2 v - c_3) + c_4 \},
 \end{aligned} \right.$$

dove si ha

$$(10') \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \varepsilon^2 - \eta^2, & c_2 &= 3 \eta^2 (2 \varepsilon^2 - \eta^2), \\ c_3 &= \varepsilon^2 (4 \varepsilon^2 - \eta^2), & c_4 &= 8 \varepsilon^4 - 8 \varepsilon^2 \eta^2 + 3 \eta^4. \end{aligned}$$

## II. - Calcolo di alcuni integrali necessari nello sviluppo del potenziale.

Potendosi scrivere per il volume di un ellissoide di rotazione, con  $a = b > c$ ,

$$\begin{aligned} V &= \int dv = \iiint \rho^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi \, d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\rho_1} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho_1^3 \cos \varphi \, d\varphi, \end{aligned}$$

dove  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  sono le coordinate polari dei punti dell'ellissoide, definite come  $R$ ,  $u$ ,  $v$ , nelle (9), e  $\rho_1$  è il valore del raggio  $\rho$  alla superficie, risultante da semplici considerazioni geometriche nella forma

$$\rho_1^2 = \frac{c^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

segue facilmente

$$\frac{4}{3} \pi a^2 c = \frac{2}{3} \pi c^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}},$$

e quindi il valore del seguente integrale definito

$$(I) \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{2}{1 - \varepsilon^2},$$

dal quale si ha subito per derivazione rispetto ad  $\varepsilon^2$

$$(II) \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Posto poi nella (I)  $\varepsilon^2 = \frac{1}{u^2}$ , si ha

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 - \cos^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{2}{u(u^2 - 1)}$$

e per derivazione di questa rispetto ad  $u$

$$(II') \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 - \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3u^2 - 1}{u^3(u^2 - 1)^2},$$

cosicchè, rimettendo in questa  $u^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$ , si ottiene

$$(III) \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2},$$

e, sottraendo da questa la (II),

$$(IV) \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)}.$$

Osserviamo inoltre che, come facilmente si verifica per derivazione della parte destra, si ha

$$\int \frac{d\lambda}{1 - \eta^2 \cos^2 \lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

per cui segue facilmente

$$(V) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{1 - \eta^2 \cos^2 \lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

e, per derivazione rispetto ad  $\eta^2$ ,

$$(VI) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \lambda d\lambda}{(1 - \eta^2 \cos^2 \lambda)^2} = \frac{\pi}{(1 - \eta^2)^{3/2}}.$$

Posto poi nella (V)  $\eta^2 = \frac{1}{u^2}$ , e derivando rispetto ad  $u$  si ha

$$(V') \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{u^2 - \cos^2 \lambda} = \frac{2\pi}{u\sqrt{u^2 - 1}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(u^2 - \cos^2 \lambda)^2} = \frac{2u^2 - 1}{u^3(u^2 - 1)^{3/2}} \pi,$$

cosicchè, rimettendo nella seconda di queste  $u^2 = \frac{1}{\eta^2}$ , si ottiene

$$(VII) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(1 - \eta^2 \cos^2 \lambda)^2} = \frac{2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^{3/2}} \pi,$$

ed infine, sottraendo da questa la (V),

$$(VIII) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{(1 - \eta^2 \cos^2 \lambda)^2} = \frac{\pi}{(1 - \eta^2)^{1/2}}.$$

È ovvio che continuando a derivare la (II), la (II'), la (III), la (VI) e la (V') rispetto ad  $\varepsilon^2$ ,  $u$ , oppure  $\eta^2$ , si ottengono nuovi integrali di ordine sempre più elevato, ed utili per l'eventuale sviluppo del potenziale oltre ai termini dell'ordine prefissoci.

### III. - Potenziale mutuo di due ellissoidi fino alle 4<sup>e</sup> potenze delle eccentricità.

Avendo già indicato con  $U$  il potenziale di un ellissoide sopra un punto esterno, il potenziale mutuo o totale di due ellissoidi, indicando d'ora in poi con apici tutto quanto riguarda il secondo ellissoide, sarà

$$(11) \quad V = \int U dm' = \sigma' \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{\rho'_1} U \rho'^2 \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' d\rho',$$

essendo dunque  $dm'$  l'elemento di massa del secondo ellissoide,  $\sigma'$  la sua densità,  $\rho'$ ,  $\lambda'$ ,  $\varphi'$ , le coordinate polari dell'elemento nel secondo ellissoide in un sistema di assi coincidenti con gli assi geometrici  $O'$  ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ) di questo ellissoide, ed infine  $\rho'_1$  il valore di  $\rho'$  alla superficie, che in base alle (1) ed a semplici considerazioni geometriche sull'ellissoide a tre assi è dato dalle relazioni

$$(12) \quad \rho_1'^2 = \frac{a'^2(1 - \epsilon'^2)}{1 - k^2 \cos^2 \varphi'}, \quad k^2 = \epsilon'^2 - \eta'^2 \frac{1 - \epsilon'^2}{1 - \eta'^2} \sin^2 \lambda',$$

$$1 - k^2 = \frac{1 - \epsilon'^2}{1 - \eta'^2} (1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda').$$

Essendo la funzione  $U$  data fino alle 4<sup>e</sup> potenze di  $\epsilon$  ed  $\eta$  dalla espressione (10), segue ancora per  $V$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V = & + k^2 M \left\{ I_1 - \frac{3}{10} \eta^2 a^2 I_2 + \frac{3}{10} \epsilon^2 a^2 I_3 - \frac{1}{10} c_1 a^2 I_4 + \right. \\ & + \frac{3}{8} \eta^4 a^4 I_5 - \frac{3}{4} \epsilon^2 \eta^2 a^4 I_6 + \frac{3}{8} \epsilon^4 a^4 I_7 + \frac{3}{28} c_2 a^4 I_8 - \\ & \left. - \frac{3}{28} c_3 a^4 I_9 + \frac{3}{280} c_4 a^4 I_{10} \right\} \end{aligned} \right.$$

dove, ritornando alla notazione più breve

$$\sigma' \rho'^2 \cos \varphi' d\lambda d\varphi d\rho = \sigma' dv' = dm'$$

si ha

$$(13') \left\{ \begin{array}{ll} I_1 = \int \frac{dm'}{R}; & I_2 = \int \frac{1}{R^3} \cos^2 u \sin^2 v dm'; \\ I_3 = \int \frac{1}{R^3} \cos^2 u dm'; & I_4 = \int \frac{dm'}{R^3}; \\ I_5 = \int \frac{1}{R^5} \cos^4 u \sin^4 v dm'; & I_6 = \int \frac{1}{R^5} \cos^4 u \sin^2 v dm'; \\ I_7 = \int \frac{1}{R^5} \cos^4 u dm'; & I_8 = \int \frac{1}{R^5} \cos^2 u \sin^2 v dm'; \\ I_9 = \int \frac{1}{R^5} \cos^2 u dm'; & I_{10} = \int \frac{dm'}{R^5}; \end{array} \right.$$

nei quali la integrazione deve in ogni caso estendersi a tutto il secondo ellissoide.

Ora se indichiamo con  $r$  la distanza dei centri dei due ellissoidi e con  $\gamma$  l'angolo al centro del secondo formato tra la congiungente  $r$  e la distanza  $\rho'$  dell'elemento  $dm'$ , si ha notoriamente

$$R^2 = r^2 + \rho'^2 - 2r\rho' \cos \gamma = r^2 \left\{ 1 - 2 \frac{\rho'}{r} \cos \gamma + \left( \frac{\rho'}{r} \right)^2 \right\}$$

e da questa, sviluppando fino alle potenze necessarie per garantire poi negli integrali  $I_1, I_2, I_3, \dots$  le quarte potenze del rapporto delle dimensioni alla distanza, si ha

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + 3 \frac{\rho'}{r} \cos \gamma - \frac{3}{2} \left( \frac{\rho'}{r} \right)^2 (1 - 5 \cos^2 \gamma) \right. \\ \left. \frac{1}{R^5} = \frac{1}{r^5} \left\{ 1 + 5 \frac{\rho'}{r} \cos \gamma - \frac{5}{2} \left( \frac{\rho'}{r} \right)^2 (1 - 7 \cos^2 \gamma) \right\} \right. \end{array} \right.$$

Supponiamo inoltre che siano  $r, u_0, v_0$ , le coordinate del centro del secondo ellissoide rispetto al triedro  $O(a, b, c)$  del primo, ed analogamente  $r, u'_0, v'_0$  quelle del centro del primo

ellissoide rispetto al triedro  $O'(a', b', c')$  del secondo; sarà allora

$$(15) \quad \cos \gamma = \operatorname{sen} u'_0 \operatorname{sen} \varphi' + \cos u'_0 \cos \varphi' \cos (v'_0 - \lambda'),$$

e se con  $\bar{\varphi}'$  e  $\bar{\lambda}'$  denominiamo ancora le coordinate dell'elemento  $dm'$  in un sistema di assi parallelo al sistema  $O(a, b, c)$ , sarà

$$\begin{aligned} R \cos u \operatorname{sen} v &= r \cos u_0 \operatorname{sen} v_0 + \rho' \cos \bar{\varphi}' \operatorname{sen} \bar{\lambda}' \\ R \operatorname{sen} u &= r \operatorname{sen} u_0 + \rho' \operatorname{sen} \bar{\varphi}'. \end{aligned}$$

Nel caso che i due triedri ellissoidici siano paralleli, si ha evidentemente  $\bar{\varphi}' = \varphi'$ ,  $\bar{\lambda}' = \lambda'$ , e nel caso che siano paralleli soltanto i due piani equatoriali (e quindi paralleli i due assi minori), si ha  $\bar{\varphi}' = \varphi'$ ,  $\bar{\lambda}' = \lambda' + \omega$ , essendo  $\omega$  l'angolo tra i due assi positivi  $\bar{a}$  ed  $a'$ , contato da  $a$  verso  $a'$  nel verso diretto. Per il seguito, per non rendere esageratamente lunghi i calcoli, manterremo questo secondo caso, che è sufficiente per tutte le applicazioni, e quindi le due precedenti diventano

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \cos u \operatorname{sen} v = r \cos u_0 \operatorname{sen} v_0 + \rho' \cos \varphi' \operatorname{sen} \lambda' \cos \omega + \\ \hspace{10em} + \rho' \cos \varphi' \cos \lambda' \operatorname{sen} \omega \\ R \operatorname{sen} u = r \operatorname{sen} u_0 + \rho' \operatorname{sen} \varphi'. \end{array} \right.$$

*Calcolo di  $I_1$ .* Per il primo dei 10 integrali della (13) non occorre alcun calcolo; infatti, ricordando che il potenziale  $U$  del primo ellissoide sopra un punto esterno di coordinate  $R, u, v$ , è dato a meno del fattore  $k^2$  dalla relazione

$$U = \int \frac{dm}{R_1},$$

dove  $dm$  è l'elemento del primo ellissoide ed  $R_1$  è la distanza del punto potenziato da questo elemento, si riconosce facilmente che l'integrale  $I_1$  è analogo a questo, solo che all'elemento  $dm$  è sostituito  $dm'$  e il punto potenziato (essendo alla distanza  $R$  dai singoli punti  $dm'$ ) diventa ora il centro del primo ellissoide. Perciò  $I_1$  risulta semplicemente dalla forma (10) della  $U$  omet-

tendo  $k^2$ , ponendo in essa gli elementi  $a'$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\eta'$  del secondo ellissoide in luogo dei corrispondenti del primo, ed inoltre  $r$ ,  $u'_0$ ,  $v'_0$  al posto di  $R$ ,  $u$ ,  $v$ , per cui è

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \frac{M'}{r} - \frac{M' a'^2}{10 r^3} \{ 3 \cos^2 u'_0 (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \varepsilon'^2) + c'_1 \} + \\ &+ \frac{3 M' a'^4}{280 r^5} \{ 35 \cos^4 u'_0 (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \varepsilon'^2)^2 + \\ &+ 10 \cos^2 u'_0 (c'_2 \sin^2 v'_0 - c'_3) + c'_4 \} \end{aligned} \right.$$

essendo le costanti  $c'_i$  date da relazioni analoghe alle (10').

*Calcolo di  $I_2$ .* Per il secondo integrale della (12) abbiamo in base alla prima delle (15)

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} I_2 &= r^2 \cos^2 u_0 \sin^2 v_0 \cdot I_2^I + \cos^2 \omega \cdot I_2^{II} + \sin^2 \omega \cdot I_2^{III} + \\ &+ 2r \cos u_0 \sin v_0 \cos \omega \cdot I_2^{IV} + 2r \cos u_0 \sin v_0 \sin \omega \cdot I_2^V + \\ &+ 2 \sin \omega \cos \omega \cdot I_2^{VI}, \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} I_2^I &= \int \frac{dm'}{R^5}; & I_2^{II} &= \int \frac{1}{R^5} \rho'^2 \cos^2 \varphi' \sin^2 \lambda' dm'; \\ I_2^{III} &= \int \frac{1}{R^5} \rho'^2 \cos^2 \varphi' \cos^2 \lambda' dm'; & I_2^{IV} &= \int \frac{1}{R^5} \rho' \cos \varphi' \sin \lambda' dm'; \\ I_2^V &= \int \frac{1}{R^5} \rho' \cos \varphi' \cos \lambda' dm'; & I_2^{VI} &= \int \frac{1}{R^5} \rho'^2 \cos^2 \varphi' \sin \lambda' \cos \lambda' dm'. \end{aligned} \right.$$

Per la seconda delle (14) abbiamo intanto, poichè tutti gli integrali contenenti potenze dispari del  $\cos \gamma$  in questo integrale sono nulli per ragioni di simmetria,

$$\begin{aligned} I_2^I &= \frac{1}{r^5} \iiint \sigma' \rho'^2 \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' d\rho' - \frac{5}{2r^7} \iiint \sigma' \rho'^4 \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' d\rho' + \\ &+ \frac{35}{2r^7} \iiint \sigma' \rho'^4 \cos^2 \gamma \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' d\rho' \end{aligned}$$



dove i limiti degli integrali, che ordinariamente trascureremo per brevità, sono quelli riportati nella (11). Siccome il primo dei precedenti tre è evidentemente la massa  $M'$  del secondo ellissoide, possiamo scrivere

$$I_2' = \frac{M'}{r^5} - \frac{5}{2r^7} K_1 + \frac{35}{2r^7} K_2,$$

dove, integrando subito rispetto a  $\rho'$ , ed omettendo gli apici per le variabili di integrazione per non ingombrare troppo le formule, si ha per le (12) e la (15)

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\sigma'}{5} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho_1^5 \cos \varphi d\varphi = \frac{\sigma'}{5} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} \\ K_2 &= \frac{\sigma'}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho_1^5 \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\sigma'}{5} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \int_0^{2\pi} d\lambda \left\{ \operatorname{sen}^2 u'_0 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 u'_0 \cos^2 (v'_0 - \lambda) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} \right\} \end{aligned}$$

essendo nullo l'integrale in  $K_2$  contenente il  $\cos (v'_0 - \lambda)$ . Ricordando allora la formola (III) e la terza delle (12), si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{2\sigma'}{15} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \int_0^{2\pi} \frac{3 - k^2}{(1 - k^2)^2} d\lambda = \\ &= \frac{2\sigma'}{15} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \left\{ 2 \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda)^2} + \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda} \right\}, \end{aligned}$$

ed ancora, per le (VII) e (V), riducendo,

$$K_1 = \frac{1}{5} M' a'^2 (3 - \varepsilon'^2 - \eta'^2);$$

ricordando poi le formole (IV), (II), ed ancora la terza delle (12), si ha

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{2\sigma'}{15} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \left\{ \text{sen}^2 u'_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda} + \right. \\ & + 2 \cos^2 u'_0 \text{sen}^2 v'_0 \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda)^2} + \\ & \left. + 2 \cos^2 u'_0 \cos 2v'_0 \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \lambda d\lambda}{(1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda)^2} \right\} \end{aligned}$$

e con le (V), (VII) e (VI),

$$K_2 = \frac{1}{5} M' a'^2 [(1 - \varepsilon'^2) - \cos^2 u'_0 (\eta'^2 \text{sen}^2 v'_0 - \varepsilon'^2)],$$

con le quali è

$$(20) \quad I_2^n = \frac{M'}{r} + \frac{M' a'^2}{2 r^3} [4 - 6 \varepsilon'^2 + \eta'^2 - 7 \cos^2 u'_0 (\eta'^2 \text{sen}^2 v'_0 - \varepsilon'^2)].$$

Sempre per la seconda delle (14) abbiamo poi

$$I_2^n = \frac{1}{r^5} \iiint \sigma' \rho'^4 \cos^3 \varphi' \text{sen}^2 \lambda' d\lambda' d\varphi' d\rho' + \dots$$

dove i termini omissi sono di ordine superiore a quello scritto, avendo  $r^7$  al denominatore ed ottenendo poi al numeratore un  $a'^7$ . Perciò si ha, integrando rispetto a  $\rho'$ , tenendo presente la prima delle (12), poi la (II) ed infine la terza delle (12)

$$\begin{aligned}
 I_2^{\text{II}} &= \frac{\sigma'}{5 r^5} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \lambda d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \\
 &= \frac{4}{15} \frac{\sigma'}{r^5} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \left( \frac{1 - \eta'^2}{1 - \varepsilon'^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{(1 - \eta'^2 \cos^2 \lambda)^2},
 \end{aligned}$$

ed ancora, per la (VIII), dopo fatte le riduzioni,

$$(21) \quad I_2^{\text{II}} = \frac{1}{5} \frac{M' a'^2}{r^5} (1 - \eta'^2).$$

Per  $I_2^{\text{III}}$  si segue la via tenuta per  $I_2^{\text{II}}$ , tenendo presente la (VI) anzichè la (VIII), e si ottiene facilmente

$$(22) \quad I_2^{\text{III}} = \frac{1}{5} \frac{M' a'^2}{r^5}.$$

Nei tre ultimi integrali (19) abbiamo  $\sin \lambda'$  e  $\cos \lambda'$  alla prima potenza che rendono nulli tutti gli integrali tranne quelli che contengono rispettivamente un  $\sin \lambda'$  o un  $\cos \lambda'$ , perciò rimane in base alla seconda delle (14) e la (15)

$$\begin{aligned}
 I_2^{\text{IV}} &= \frac{5 \sigma'}{r^6} \int \rho'^2 \cos^2 \varphi' \sin^2 \lambda' \cos u'_0 \sin v'_0 dm' = \\
 &= \frac{\sigma'}{r^6} \cos u'_0 \sin v'_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \lambda d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho_1^5 \cos^3 \varphi d\varphi
 \end{aligned}$$

e quindi per la (12), (II) e (VIII), dopo alcune riduzioni,

$$(23) \quad I_2^{\text{IV}} = \frac{M' a'^2}{r^6} (1 - \eta'^2) \cos u'_0 \sin v'_0;$$

analogamente si ha

$$(24) \quad I_2^{\text{V}} = \frac{5 \sigma'}{r^6} \int \rho'^2 \cos^2 \varphi' \cos^2 \lambda' \cos u'_0 \cos v'_0 dm' = \frac{M' a'^2}{r^6} \cos u'_0 \cos v'_0;$$

mentre infine  $I_2^{\text{VI}}$  è nullo fino all'ordine di approssimazione che abbiamo stabilito. Le (20) ... (24) conducono allora per la (18), dopo fatte tutte le riduzioni, alla espressione di  $I_2$ , osservato che è  $u'_0 = -u_0$ ,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} I_2 = & \frac{M'}{r^3} \cos^2 u_0 \sin^2 v_0 - \frac{M' a'^2}{10 r^5} \cdot [35 \cos^4 u_0 \sin^2 v_0 (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \varepsilon'^2) + \\ & + 5 \cos^2 u_0 \sin^2 v_0 (6 \varepsilon'^2 - \eta'^2) + \\ & + 20 \eta'^2 \cos^2 u_0 \sin v_0 \sin v'_0 \cos \omega - 2 + 2 \eta'^2 \cos^2 \omega]. \end{aligned} \right.$$

*Calcolo di  $I_3$ .* Per il terzo integrale della (13) abbiamo in base alla seconda delle (16)

$$(26) \quad I_3 = r^2 \cos^2 u_0 \cdot I_3^{\text{I}} + I_3^{\text{II}} - 2r \cos u'_0 \cos v'_0 \cdot I_2^{\text{V}} - 2r \cos u'_0 \sin v'_0 \cdot I_2^{\text{IV}}$$

essendo

$$I_3^{\text{I}} = \int \frac{1}{R^5} \rho'^2 \cos^2 \varphi' dm'$$

ed avendo gli altri integrali il significato dato nelle (19). Abbiamo per l'integrale ora scritto, analogamente a quanto si è fatto per  $I_2^{\text{II}}$ ,

$$I_3^{\text{I}} = \frac{\sigma'}{r^5} \iiint \rho'^4 \cos^3 \varphi' d\lambda' d\varphi' d\rho' = \frac{\sigma'}{5r^5} a'^5 (1 - \varepsilon'^2)^{5/2} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}}$$

e in base alle formole del secondo capitolo, facendo tutte le riduzioni,

$$(27) \quad I_3^{\text{I}} = \frac{M' a'^2}{5 r^5} (2 - \eta'^2).$$

Con le (20), (27), (24) e (23), la (26), osservando anche qui che si ha  $u'_0 = -u_0$ , diventa

$$(28) \quad I_3 = \frac{M'}{r^3} \cos^2 u_0 - \frac{M' a'^2}{10 r^5} \cdot [35 \cos^4 u_0 (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \epsilon'^2) + \\ + 5 \cos^2 u_0 (6 \epsilon'^2 - \eta'^2) - 20 \eta'^2 \cos^2 u_0 \sin^2 v'_0 - 4 + 2 \eta'^2].$$

*Calcolo di  $I_4$ .* Il calcolo di  $I_4$  si effettua in base alla prima delle (14) come segue

$$I_4 = \frac{1}{r^3} \int dm' - \frac{3}{2 r^5} K_1 + \frac{15}{2 r^5} \cdot K_2$$

dove il primo integrale non è altro che la massa  $M'$ , mentre gli altri due sono identici ai due integrali  $K_1$  e  $K_2$  che abbiamo ottenuto durante il calcolo di  $I_2$ . Abbiamo con essi

$$(29) \quad I_4 = \frac{M'}{r^3} + \frac{3 M' a'^2}{10 r^5} [2 - 4 \epsilon'^2 + \eta'^2 - 5 \cos^2 u_0 (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \epsilon'^2)].$$

*Calcolo di  $I_5 \dots I_{10}$ .* In quanto infine ai rimanenti integrali nella espressione (13) di  $V$ , essendo ciascuno di essi moltiplicato per una quarta potenza nelle eccentricità e per  $a^4$ , volendo trascurare le potenze superiori alla quarta tanto per le eccentricità quanto per il rapporto  $a/r$ , basta prendere nello sviluppo di  $R$  il primo termine, ossia si può porre in tutti  $1/R^5 = 1/r^5$ . Per tale motivo è sufficiente porre nei predetti integrali

$$\cos^4 u \sin^4 v = \cos^4 u_0 \sin^4 v_0, \quad \cos^4 u \sin^2 v = \cos^4 u_0 \sin^2 v_0, \\ \cos^2 u = \cos^2 u_0, \quad \cos^2 u \sin^2 v = \cos^2 u_0 \sin^2 v_0, \quad \cos^2 u = \cos^2 u_0,$$

e si ha allora immediatamente

$$(30) \quad \begin{cases} I_5 = \frac{M'}{r^5} \cos^4 u_0 \sin^4 v_0, & I_6 = \frac{M'}{r^5} \cos^4 u_0 \sin^2 v_0, & I_7 = \frac{M'}{r^5} \cos^4 u_0, \\ I_8 = \frac{M'}{r^5} \cos^2 u_0 \sin^2 v_0, & I_9 = \frac{M'}{r^5} \cos^2 u_0, & I_{10} = \frac{M'}{r^5}. \end{cases}$$

Abbiamo dunque nelle (17), (25), (28), (29), e (30) tutti i 10 integrali della (13), e sostituendo e ordinando si arriva alla espressione del potenziale mutuo dei due ellissoidi nella forma

$$(31) \left\{ \begin{aligned} V = & + \frac{k^2 MM'}{r} - \frac{k^2 MM'}{10 r^3} \sum a^2 \{ 3 \cos^2 u_0 (\eta^2 \sin^2 v_0 - \varepsilon^2) + c_1 \} + \\ & + \frac{3 k^2 MM'}{280 r^5} \sum a^4 \{ 35 \cos^4 u_0 (\eta^2 \sin^2 v_0 - \varepsilon^2)^2 + \\ & + 10 \cos^2 u_0 (c_2 \sin^2 v_0 - c_3) + c_4 \} + \\ & + \frac{3 k^2 MM'}{100 r^5} a^2 a'^2 \{ 35 \cos^4 u_0 (\eta^2 \sin^2 v_0 - \varepsilon^2) (\eta'^2 \sin^2 v'_0 - \varepsilon'^2) + \\ & + 5 \cos^2 u_0 [c_5 \sin^2 v_0 - c_6 + c_7 (\sin^2 v'_0 - \sin^2 v_0) - \\ & - 4 \eta^2 \eta'^2 \sin v_0 \cos v'_0 \sin \omega] + (c_8 - 2 \eta^2 \eta'^2 \sin^2 \omega) \}, \end{aligned} \right.$$

dove le sommatorie si estendono a due termini simili a quello scritto, avendo il secondo al posto degli elementi del primo ellissoide  $\varepsilon, \eta, u_0, v_0, c_1, c_2 \dots$  rispettivamente gli elementi  $\varepsilon', \eta', u'_0, v'_0, c'_1, c'_2 \dots$  del secondo ellissoide, e dove si è posto ancora, oltre alle (10'),

$$(31') \quad \begin{aligned} c_5 &= 6 \varepsilon^2 \eta'^2 + 6 \varepsilon'^2 \eta^2 - 6 \eta^2 \eta'^2, & c_6 &= 8 \varepsilon^2 \varepsilon'^2 - \varepsilon^2 \eta'^2 - \varepsilon'^2 \eta^2, \\ c_7 &= \eta'^2 (6 \varepsilon^2 - \eta^2), & c_8 &= 8 \varepsilon^2 \varepsilon'^2 - 4 \varepsilon^2 \eta'^2 - 4 \varepsilon'^2 \eta^2 + 3 \eta^2 \eta'^2. \end{aligned}$$

Per due ellissoidi con tutti e tre gli assi paralleli i primi tre termini nella (31) rimangono invariati e solo nell'ultimo, essendo  $\omega = 0, v'_0 = v_0 - 180^\circ$ , si annullano i due termini in  $\sin \omega$  e quello in  $\sin^2 v'_0 - \sin^2 v_0$ . Analogamente si ricava dalla espressione (31) facilmente la forma del potenziale mutuo per altri casi speciali, come per ellissoidi uguali ( $a = a', \varepsilon = \varepsilon', \eta = \eta'$ ): per ellissoidi simili ( $\varepsilon = \varepsilon', \eta = \eta'$ ); per ellissoidi di rotazione [ $\varepsilon = \eta, \varepsilon' = \eta'$  (allungati), oppure  $\eta = \eta' = 0$  (schiacciati)]; per ellissoidi coi piani equatoriali coincidenti ( $u_0 = u'_0 = 0$ ) ed infine per ellissoidi con una coppia di assi allineati (per es. i due assi maggiori allineati:  $u_0 = u'_0 = v_0 = 0, v'_0 = 180^\circ$ ).