

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

**Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno
per un sistema di due equazioni differenziali,
ordinarie, del primo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 12 (1941), p. 30-50

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__30_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI UNICITÀ RELATIVI A UN PROBLEMA AL CONTORNO PER UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI, ORDINARIE, DEL PRIMO ORDINE

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Padova).

In una Nota, pubblicata in questo volume istesso, TREVISAN dimostra, fra l'altro, due interessanti teoremi d'unicità ⁽¹⁾ per gl'integrali del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

soddisfacenti alle condizioni

$$(2) \quad y(a) = \alpha, \quad z(b) = \beta \quad (-\infty < a < b < +\infty).$$

In entrambi i teoremi di TREVISAN, *le funzioni* $f(x, y, z)$ *e* $g(x, y, z)$ *sono supposte (reali e) continue nello strato*

$$(3) \quad S: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

ed α *e* β *sono numeri (reali e finiti) qualunque. Inoltre, per la validità del primo teorema, si fanno le seguenti ipotesi:*

a) $f(x, y, z)$ *è crescente rispetto a* z *ed è lipschitziana in* y ;

⁽¹⁾ G. TREVISAN, *Teoremi di unicità e confronto per problemi relativi a sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* [questo volume, pagg. 12-21], nn. 1 e 2.

b) $g(x, y, z)$ è crescente rispetto a y ;

e, per la validità del secondo, le seguenti:

c) $f(x, y, z)$ è crescente rispetto a z e lipschitziana in y ;

d) $g(x, y, z)$ è non decrescente rispetto a y e z .

In questa Nota mi propongo di indicare teoremi analoghi a quelli di TREVISAN nel caso che $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ siano misurabili secondo LEBESGUE rispetto ad x e continue rispetto a (y, z) ; e che in tutto S sia

$$(4) \quad |f(x, y, z)| < k(x), \quad |g(x, y, z)| < k(x),$$

con $k(x)$ sommabile nell'intervallo

$$(5) \quad I: a \leq x \leq b \text{ (}^2\text{)}.$$

Queste ipotesi permettono di corredare i criteri di unicità con un teorema d'esistenza. La cosa è immediata, anzi banale, per chi conosca queste teorie, tuttavia la farò rilevare esplicitamente (§ 1).

Per formulare criteri d'unicità analoghi a quelli di TREVISAN suppongo ancora (§ 3):

a') $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ non decrescenti (non crescenti) in z e y rispettivamente;

b') $f(x, y, z)$ lipschitziana in senso generalizzato rispetto ad y e $g(x, y, z)$ rispetto a z (³);

oppure (§ 4):

c') $f(x, y, z)$ non decrescente [$g(x, y, z)$ non crescente] rispetto a z [ad y] e lipschitziana in senso generalizzato nella y [nella z];

(²) Sono queste le ipotesi, classiche ormai, che CARATHÉODORY ha posto a fondamento della teoria delle equazioni differenziali ordinarie: cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 2^a ed. 1927], §§ 576-592.

(³) Volendo la condizione b') si può supporre soddisfatta in ogni porzione limitata di S ; un'osservazione analoga si può fare a proposito della c') per la parte che riguarda la lipschitzianeità.

d') $g(x, y, z)$ non decrescente [$f(x, y, z)$ non crescente] rispetto a y e z .

In tal modo gli enunciati presentano una forma elegante di simmetria.

Il § 5 è dedicato invece a indicare teoremi d'esistenza per il sistema (1), imponendo le condizioni (2) e supponendo $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ definite in un insieme della forma

$$(6) \quad a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

dove $\sigma_1(x)$, $\tau_1(x)$ e $\sigma_2(x)$, $\tau_2(x)$ sono esse stesse soluzioni delle (1). In questo ordine di idee mi limito a dare un enunciato tipo.

Il procedimento che seguo nel § 5 è del tutto analogo a quello che ho già utilizzato altre volte per trattare un problema al contorno per le equazioni del secondo ordine ⁽⁴⁾. Prolungo $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ in tutto lo strato S e dimostro poi che le soluzioni del sistema prolungato, soddisfacenti alle (2), si mantengono nell'insieme (6). Questo si ottiene applicando i criteri d'unicità ricordati. Si potrebbe vedere se il ricorrere a criteri di confronto ⁽⁵⁾ invece che d'unicità, permette di sostituire la condizione

$$\sigma'_i(x) = f(x, \sigma_i(x), \tau_i(x)), \quad \tau'_i(x) = g(x, \sigma_i(x), \tau_i(x)) \quad (i = 1, 2)$$

con un'altra più generale, analogamente a quanto ho fatto per le equazioni del secondo ordine.

⁽⁴⁾ Mi limito a citare qui il più recente dei miei lavori sull'argomento: G. SCORZA DRAGONI, *A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie* [questi Rendiconti, vol. X (1939), pagg. 90-100].

⁽⁵⁾ Per teoremi di questo tipo, vedi, per es., loc. cit. ⁽⁴⁾, nn. 4 e 5. Si potrebbe anche cercare di estendere questi ultimi teoremi dal caso di equazioni a secondi membri continui (come fa TREVISAN) al caso analogo a quello considerato nella Nota presente.

§ 1.

1. - Incominciamo col dimostrare che :

Se $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sono continue rispetto a (y, z) e misurabili rispetto ad x nello strato S , definito dalle (3), e vi soddisfanno alle (4), allora nell'intervallo I , definito dalle (5), esistono due funzioni, $y(x)$ e $z(x)$, verificanti le

$$(7) \quad \begin{aligned} y(x) &= \alpha + \int_{\alpha}^x f(t, y(t), z(t)) dt, \\ z(x) &= \beta + \int_{\beta}^x g(t, y(t), z(t)) dt \end{aligned}$$

con α e β numeri prefissati,

di guisa che $y(x)$ e $z(x)$ sono assolutamente continue, soddisfanno alle (1) in quasi tutti i punti di I e verificano le (2) (è sottinteso che l'integrazione va intesa, ora ed in seguito, nel senso di **LEBESGUE**).

A questo scopo, ricordiamo ⁽⁶⁾ che, se α^* è un numero reale, nelle ipotesi poste esistono sempre due funzioni $y^*(x)$ e $z^*(x)$ per cui, in tutto I , è

$$\begin{aligned} y^*(x) &= \alpha + \int_{\alpha}^x f(t, y^*(t), z^*(t)) dt, \\ z^*(x) &= \alpha^* + \int_{\alpha}^x g(t, y^*(t), z^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Inoltre è manifesto che riesce

$$z^*(b) < \beta,$$

⁽⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, § 582.

se

$$\alpha^* < \beta - \int_a^b k(t) dt;$$

e

$$z^*(b) > \beta,$$

se

$$\alpha^* > \beta + \int_a^b k(t) dt.$$

Di qui segue subito che è possibile soddisfare alle (7), se $z^*(b)$ è una funzione continua di α^* ⁽⁷⁾; in particolare, quindi ⁽⁸⁾, se $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sono lipschitziane in senso generalizzato rispetto a y e z , cioè, se

$$(8) \quad |f(x, y, z) - f(x, \bar{y}, \bar{z})| < h(x) (|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|),$$

$$(9) \quad |g(x, y, z) - g(x, \bar{y}, \bar{z})| < h(x) (|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|),$$

con $h(x)$ sommabile in I .

Questo risultato parziale permette di ottenere subito il teorema enunciato, come mostreremo nei due numeri seguenti.

2. - Supponiamo, per il momento, di aver costruito in S due successioni

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \dots,$$

$$g_1(x, y, z), \quad g_2(x, y, z), \dots,$$

convergenti rispettivamente verso $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$. E la convergenza risulti uniforme, per ogni x fissato, in ogni insieme limitato di variabilità per (y, z) .

⁽⁷⁾ Cfr. A. MINZONI, *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine* [questi Rendiconti, vol. IX (1938), pagg. 142-149], n. 1.

⁽⁸⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, §§ 583 e 586.

Supponiamo inoltre ch , per $n = 1, 2, \dots$, sia

$$(10) \quad |f_n(x, y, z)| < k(x), \quad |g_n(x, y, z)| < k(x)$$

e

$$(11) \quad \begin{aligned} |f_n(x, y, z) - f_n(x, \bar{y}, \bar{z})| &< h_n(x)(|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|), \\ |g_n(x, y, z) - g_n(x, \bar{y}, \bar{z})| &< h_n(x)(|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|), \end{aligned}$$

con le $h_n(x)$ sommabili in I .

Allora esiste sempre (almeno) una coppia di funzioni

$$y_n(x), \quad z_n(x)$$

soddisfacenti in I alle

$$(12) \quad \begin{aligned} y_n(x) &= \alpha + \int_a^x f_n(t, y_n(t), z_n(t)) dt, \\ z_n(x) &= \beta + \int_b^x g_n(t, y_n(t), z_n(t)) dt. \end{aligned}$$

In virt  delle (10) e delle (12) le funzioni $y_n(x)$ e $z_n(x)$ sono equicontinue ed equilimate. Possiamo quindi determinare i numeri naturali $n_1, n_2, \dots$ in modo che $y_{n_1}(x), y_{n_2}(x), \dots; z_{n_1}(x), z_{n_2}(x), \dots$ convergano uniformemente verso due funzioni $y(x)$ e $z(x)$.

Poich  le $y_{n_p}(x)$ e le $z_{n_p}(x)$ si mantengono equilimate, dalle ipotesi fatte sulla convergenza delle $f_n(x, y, z)$ e $g_n(x, y, z)$ verso $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ si trae subito

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_{n_p}(x, y_{n_p}(x), z_{n_p}(x)) = f(x, y(x), z(x)),$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} g_{n_p}(x, y_{n_p}(x), z_{n_p}(x)) = g(x, y(x), z(x)).$$

Di qui, dalle (12) e dai teoremi di passaggio al limite sotto il segno d'integrale di LEBESGUE seguono subito le (7).

Il procedimento tenuto è nella sua essenza dovuto a SEVERINI ⁽⁹⁾.

3. - Tutto è quindi ricondotto alla facile costruzione delle funzioni $f_n(x, y, z)$ e $g_n(x, y, z)$.

A questo scopo, decomponiamo ogni piano $x = x_0 (a \leq x_0 \leq b)$ in quadrati mediante le rette $y = \frac{r}{n}$, $z = \frac{r}{n}$, con $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e suddividiamo ciascun quadrato mediante la diagonale parallela alla retta $y = z$. In ciascuno dei triangoli così ottenuti si definisca la $f_n(x, y, z)$ [la $g_n(x, y, z)$] in base alle condizioni di essere lineare rispetto a y e z ed uguale alla $f(x, y, z)$ [alla $g(x, y, z)$] nei vertici del triangolo che si considera.

Allora è notissimo che $f_n(x, y, z)$ e $g_n(x, y, z)$ tendono verso $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ e che, per ogni x prefissato, la convergenza è uniforme in ogni insieme limitato di variabilità per (y, z) . Tutto ciò è conseguenza immediata del teorema della continuità uniforme.

Inoltre ⁽¹⁰⁾ le $f_n(x, y, z)$ e $g_n(x, y, z)$ sono misurabili rispetto ad x e continue rispetto a (y, z) , verificano le (10) e soddisfanno anche alle (11) quando vi si ponga $h_n(x) = 2n h(x)$.

E con ciò la dimostrazione è ultimata.

⁽⁹⁾ C. SEVERINI, *Sopra gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati* [Atti della R. Acc. di Torino, vol. 40 (1904-1905), pagg. 637-653]. Per il contenuto astratto del metodo di SEVERINI (e per altre indicazioni bibliografiche) cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 2 (1938) pagg. 255-275], § 1.

⁽¹⁰⁾ Per le affermazioni che seguono, cfr. G. ZWIRNER, *Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali* [Bollettino della Unione matematica italiana, serie II, vol. I (1939), pagg. 334-336].

§ 2.

4. - Nei paragrafi successivi ci sarà utile il lemma che segue ⁽¹¹⁾.

Siano $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ due funzioni misurabili rispetto ad x e continue rispetto ad y nella striscia

$$\Sigma : a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Inoltre siano soddisfatte le seguenti condizioni :

I) è

$$|P(x, y)| < h(x), \quad |Q(x, y)| < h(x),$$

con $h(x)$ sommabile in $a \leq x \leq b$;

II) è

$$|P(x, y) - P(x, \bar{y})| < h(x) |y - \bar{y}|,$$

$$|Q(x, y) - Q(x, \bar{y})| < h(x) |y - \bar{y}|,$$

con $h(x)$ sommabile in $a \leq x \leq b$;

III) risulta

$$P(x, y) \leq Q(x, y).$$

Allora, dette $p(x)$ e $q(x)$ due funzioni verificanti le

$$p(x) = p(x_0) + \int_{x_0}^x P(t, p(t)) dt,$$

$$q(x) = q(x_0) + \int_{x_0}^x Q(t, q(t)) dt \quad (12),$$

⁽¹¹⁾ Questo lemma sostituisce nel caso nostro il teorema utilizzato da TREVISAN nei suoi ragionamenti e riportato nella nota a piè di pag. 14 del lavoro citato in ⁽¹⁾.

⁽¹²⁾ $p(x)$ e $q(x)$ esistono e sono univocamente determinate da $p(x_0)$ e $q(x_0)$; cfr. loc. cit. ⁽²⁾, §§ 582-583.

riesce

$$(13) \quad p(x) \leq q(x) \quad (x_0 \leq x \leq b),$$

se

$$(14) \quad p(x_0) \leq q(x_0);$$

mentre riesce

$$(15) \quad p(x) \geq q(x) \quad (a \leq x \leq x_0),$$

se

$$(16) \quad p(x_0) \geq q(x_0).$$

Incominciamo, in questo numero, col dimostrare il lemma sotto l'ipotesi suppletiva che $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ siano uniformemente continue rispetto ad y nella striscia Σ .

Sia verificata la (14) e si ponga

$$P_n(x, y) = P(x, y) - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e $p_n(x)$ sia la funzione definita dalla

$$p_n(x) = p(x_0) - \frac{1}{n} + \int_{x_0}^x P_n(t, p_n(t)) dt,$$

di guisa che ⁽¹³⁾

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = p(x).$$

Per dimostrare la (13) basta far vedere che è

$$p_n(x) < q(x) \quad (x_0 \leq x \leq b).$$

Se $x = x_0$ questa relazione è certo soddisfatta. E se $x_0 = b$ non v'è nulla da aggiungere [se non che in tal caso la (13) si

⁽¹³⁾ Loc. cit. ⁽²⁾, § 586; per il contenuto astratto di questo teorema vedi G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e teoremi di dipendenza continua* [Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; vol. 99, parte II (1940), 147-151].

riduceva già alla (14)]. Se $x_0 < b$, sia x_1 il primo eventuale punto fra x_0 e b in cui $p_n(x) = q(x)$, e ξ un punto compreso fra x_0 e x_1 , estremi esclusi; x_1 e ξ dipenderanno da n .

Nell'intervallo $\xi \leq x \leq x_1$, la differenza $q(x) - p_n(x)$ si può supporre arbitrariamente piccola, pur di supporre ξ abbastanza vicino a x_1 . Lo stesso si potrà dire per la differenza

$$P_n(x, q(x)) - P_n(x, p_n(x)),$$

data l'ipotesi sulla continuità uniforme di $P(x, y)$ rispetto ad y . In particolare in $\xi \leq x \leq x_1$ si può supporre

$$|P_n(x, q(x)) - P_n(x, p_n(x))| < \frac{1}{n}.$$

Ne segue, sempre nello stesso intervallo,

$$P_n(x, p_n(x)) \leq P_n(x, q(x)) + \frac{1}{n} = P(x, q(x)) \leq Q(x, q(x));$$

epperò, contro il supposto,

$$q(x_1) - p_n(x_1) = q(\xi) - p_n(\xi) + \int_{\xi}^{x_1} [Q(t, q(t)) - P_n(t, p_n(t))] dt > 0;$$

da cui la prima parte del lemma.

Per dimostrare la (15) si potrà porre, p. es.,

$$Q_n(x, y) = \bar{Q}(x, y) + \frac{1}{n},$$

considerare la funzione $q_n(x)$ soddisfacente alla

$$q_n(x) = q(x_0) - \frac{1}{n} + \int_{x_0}^x Q_n(t, q_n(t)) dt,$$

e dimostrare che, non appena sia verificata la (16), è

$$p(x) > q_n(x) \quad (a \leq x \leq x_0).$$

5. - Per eliminare l'ipotesi relativa alla continuità uniforme di $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ possiamo utilizzare un procedimento di approssimazione, il quale presenta delle analogie con quello tenuto in un altro mio lavoro ⁽¹⁴⁾.

Intanto osserviamo che la funzione $h(x)$, di cui nella II) del n. 4, si può supporre sempre finita: nel caso contrario, infatti, basterebbe modificare $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ in un insieme contenuto in un insieme di misura nulla costituito da parallele all'asse y .

Sia e_n la porzione di $a \leq x \leq b$ in cui

$$h(x) \leq n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

la successione $e_1, e_2, \dots$ è monotona ed invade $a \leq x \leq b$.

Poniamo

$$P_n^*(x, y) = P(x, y), \quad Q_n^*(x, y) = Q(x, y),$$

se x appartiene ad e_n ; e

$$P_n^*(x, y) = 0, \quad Q_n^*(x, y) = 0$$

in caso contrario.

Il lemma da dimostrarsi è quindi valido per $P_n^*(x, y)$ e $Q_n^*(x, y)$, in virtù appunto di quanto si è detto nel numero precedente.

Siano allora

$$p_n^*(x) \quad \text{e} \quad q_n^*(x)$$

le funzioni definite dalle

$$p_n^*(x) = p(x_0) + \int_{x_0}^x P_n^*(t, p_n^*(t)) dt,$$

$$q_n^*(x) = q(x_0) + \int_{x_0}^x Q_n^*(t, q_n^*(t)) dt;$$

⁽¹⁴⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, s. 6^a, vol. 28 (1938), pagg. 317-325], n. 1.

risulterà

$$p_n^*(x) \leq q_n^*(x),$$

se

$$p(x_0) \leq q(x_0), \quad x_0 \leq x \leq b; \quad .$$

e

$$p_n^*(x) \geq q_n^*(x),$$

se

$$p(x_0) \geq q(x_0), \quad a \leq x \leq x_0.$$

Ma d'altra parte è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^*(x, y) = P(x, y), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^*(x, y) = Q(x, y),$$

e la convergenza è uniforme per ogni x fissato; ed è

$$|P_n^*(x, y)| < k(x), \quad |Q_n^*(x, y)| < k(x);$$

e di qui, dalla II) del n. 4 e da un teorema noto ⁽¹⁵⁾ segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^*(x) = p(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^*(x) = q(x);$$

dunque ecc...

§ 3.

6. - Ora siamo in grado di dimostrare che:

Le soluzioni $y(x)$ e $z(x)$, di cui nel teorema del n. 1, sono uniche, se $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ oltre alle condizioni là indicate soddisfanno anche alle seguenti:

I) $f(x, y, z)$ non decresce rispetto a z e $g(x, y, z)$ non decresce rispetto a y ;

II) $f(x, y, z)$ è lipschitziana in senso generalizzato rispetto ad y e $g(x, y, z)$ lo è rispetto a z

(cioè sono soddisfatte le disuguaglianze che si ottengono dalle (8) e (9) quando vi si ponga, nell'ordine, $z = \bar{z}$ e $y = \bar{y}$).

⁽¹⁵⁾ Vedi i passi citati nella nota ⁽¹³⁾; cfr. anche loc. cit. ⁽¹⁴⁾.

Supponiamo infatti che le (7) siano soddisfatte e per

$$y(x) = y_1(x), \quad z(x) = z_1(x)$$

e per

$$y(x) = y_2(x), \quad z(x) = z_2(x).$$

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ coincidono in tutto I , lo stesso accade per $z_1(x)$ e $z_2(x)$, perchè allora risulta $g(x, y_1(x), z) = g(x, y_2(x), z)$ mentre, per la II), le soluzioni della

$$z(x) = \beta + \int_b^x g(t, y_1(t), z(t)) dt$$

sono determinate in modo unico da β .

Viceversa, se $z_1(x)$ coincide in I con $z_2(x)$, lo stesso accade per $y_1(x)$ e $y_2(x)$ in virtù di un motivo analogo.

Escluse queste alternative, in I esiste un intervallo

$$i: \xi \leq x \leq \eta \quad (a \leq \xi < \eta \leq b)$$

tale che sia

$$y_1(\xi) = y_2(\xi),$$

che nell'interno di i risulti $[y_1(x) \neq y_2(x), \text{ anzi}]$

$$y_1(x) < y_2(x)$$

e che nel punto η sia

$$y_1(\eta) = y_2(\eta),$$

a meno che η non coincida con b .

Ciò premesso, se nel punto $\bar{x}$ riesce $z_1(\bar{x}) \geq z_2(\bar{x})$ ed è $\xi < \bar{x} < \eta$, di qui, da

$$g(x, y_1(x), z) \leq g(x, y_2(x), z) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x})$$

e dal lemma del n. 4 segue

$$z_1(x) \geq z_2(x) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x}).$$

Quindi è

$$f(x, y, z_1(x)) \geq f(x, y, z_2(x)) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x});$$

epperò, per la $y_1(\xi) = y_2(\xi)$ e il lemma del n. 4,

$$y_1(x) \geq y_2(x) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x}),$$

il che è contro l'ipotesi fatta.

Se invece è $z_1(\bar{x}) < z_2(\bar{x})$, sempre con $\xi < \bar{x} < \eta$, allora da

$$(17) \quad g(x, y_1(x), z) \leq g(x, y_2(x), z) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta)$$

segue pure (n. 4)

$$z_1(x) \leq z_2(x) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta),$$

e quindi

$$f(x, y, z_1(x)) \leq f(x, y, z_2(x)) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta);$$

epperò

$$y_1(\eta) < y_2(\eta)$$

[perchè (n. 4) in caso contrario in $\bar{x} \leq x \leq \eta$ sarebbe $y_1(x) \geq y_2(x)$, contro l'ipotesi], cioè

$$\eta = b;$$

ma allora, per la (17), la $z_1(\eta) = z_2(\eta)$ ed il lemma del n. 4, è

$$z_1(x) \geq z_2(x) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta),$$

contro l'ipotesi $z_1(\bar{x}) < z_2(\bar{x})$.

Visto che ciascuna delle alternative $z_1(\bar{x}) > z_2(\bar{x})$, $z_1(\bar{x}) = z_2(\bar{x})$, $z_1(\bar{x}) < z_2(\bar{x})$ conduce ad un assurdo, l'intervallo i non può esistere. E con ciò la dimostrazione è ultimata.

7. - Con un ragionamento analogo si prova che:

Il teorema precedente è sempre vero, se, fermo il resto,

I) $f(x, y, z)$ non cresce in z e $g(x, y, z)$ non cresce in y ;

II) $f(x, y, z)$ è lipschitziana in senso generalizzato rispetto ad y e $g(x, y, z)$ lo è rispetto a z ;

Infatti $y_1(x), z_1(x)$ e $y_2(x), z_2(x)$ abbiano lo stesso significato che nel n. 6. Allora, con lo stesso ragionamento là svolto si riconosce che o risulta

$$y_1(x) = y_2(x), \quad z_1(x) = z_2(x)$$

in tutto I , oppure esiste un intervallo

$$i: \xi \leq x \leq \eta \quad (a \leq \xi < \eta \leq b)$$

tale da aversi, p. es.,

$$z_1(\eta) = z_2(\eta),$$

$$z_1(x) > z_2(x), \quad (\xi < x < \eta),$$

$$(z_1(\xi) - z_2(\xi))(\xi - a) = 0.$$

Sia $\bar{x}$ un punto interno di i e si supponga $y_1(\bar{x}) \leq y_2(\bar{x})$.

Allora da $f(x, y, z_1(x)) \leq f(x, y, z_2(x))$ in tutto i segue, col solito ragionamento,

$$y_1(x) \leq y_2(x) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta);$$

epperò

$$g(x, y_1(x), z) \geq g(x, y_2(x), z) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta);$$

da cui, per la $z_1(\eta) = z_2(\eta)$ e per il solito ragionamento,

$$z_1(x) \leq z_2(x) \quad (\bar{x} \leq x \leq \eta),$$

il che è contro le ipotesi fatte.

Se invece è $y_1(\bar{x}) > y_2(\bar{x})$, allora si vede subito che riesce

$$y_1(x) \geq y_2(x) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x});$$

e quindi

$$g(x, y_1(x), z) \leq g(x, y_2(x), z) \quad (\xi \leq x \leq \bar{x})$$

e

$$z_1(\xi) > z_2(\xi)$$

[perchè altrimenti in $\xi \leq x \leq \bar{x}$ si avrebbe $z_1(x) \leq z_2(x)$]; e

quindi

$$\xi = a;$$

ma allora di qui, dalla $y_1(a) = y_2(a)$ e dalla $f(x, y, z_1(x)) \leq f(x, y, z_2(x))$, valida in tutto i , segue

$$y_1(\bar{x}) \leq y_2(\bar{x}),$$

il che è di nuovo un assurdo. E il teorema è dimostrato.

§ 4.

8. - Passiamo a far vedere che:

Le soluzioni $y(x)$ e $z(x)$ di cui al teorema del n. 1 sono uniche, se, oltre alle ipotesi là fatte, sono verificate le seguenti:

I) $f(x, y, z)$ non decresce rispetto a z ed è lipschitziana in senso generalizzato rispetto a y ;

II) $g(x, y, z)$ non decresce sia rispetto ad y che a z .

Infatti $y_1(x)$, $z_1(x)$ e $y_2(x)$, $z_2(x)$ abbiano lo stesso significato che al n. 6.

Allora, se $z_1(x)$ e $z_2(x)$ coincidono in tutto I , lo stesso accade (cfr. n. 6) per $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

In caso contrario, sia

$$i: \xi \leq x \leq \eta \quad (a \leq \xi < \eta \leq b)$$

un intervallo, certo esistente, tale da aversi, p. es.,

$$z_1(\eta) = z_2(\eta),$$

$$z_1(x) < z_2(x) \quad (\xi < x < \eta),$$

$$(z_1(\xi) - z_2(\xi))(\xi - a) = 0;$$

di guisa che in i risulta

$$(18) \quad f(x, y, z_1(x)) \leq f(x, y, z_2(x)).$$

Se fosse $y_1(\xi) \leq y_2(\xi)$, dalla (18), dalla I) e dal lemma del n. 4 seguirebbe

$$y_1(x) \leq y_2(x)$$

in tutto i ; e quindi, per la II),

$$g(x, y_1(x), z_1(x)) \leq g(x, y_2(x), z_2(x)) \quad (\xi \leq x \leq \eta)$$

e la differenza $z_1(x) - z_2(x)$ sarebbe non crescente in i . Ma essa è negativa nell'interno di i ; quindi, contro il supposto,

$$z_1(\eta) < z_2(\eta).$$

Indi $y_1(\xi) > y_2(\xi)$; da cui $a < \xi$ e $z_1(\xi) = z_2(\xi)$.

Determiniamo ora $\xi_0 < \xi$ in modo che sia

$$(19) \quad y_1(\xi_0) = y_2(\xi_0)$$

e

$$(20) \quad y_1(x) > y_2(x) \quad (\xi_0 < x \leq \xi).$$

Se in un punto $\bar{x} \geq \xi_0$ e $< \xi$ risulta $z_1(\bar{x}) > z_2(\bar{x})$, di qui, dalla (20) e dalla II) segue subito che la differenza $z_1(x) - z_2(x)$ non decresce in un intorno destro di $\bar{x}$. Se ne deduce facilmente che questa differenza non si annulla nel punto ξ . Ma ciò è contro le ipotesi fatte; quindi ⁽¹⁶⁾ è

$$z_1(x) \leq z_2(x) \quad (\xi_0 \leq x \leq \xi);$$

epperò

$$f(x, y, z_1(x)) \leq f(x, y, z_2(x)) \quad (\xi_0 \leq x \leq \xi).$$

Da cui, per la (19), la I) ed il lemma nel n. 4,

$$y_1(x) \leq y_2(x) \quad (\xi_0 \leq x \leq \xi),$$

il che è contraddetto dalla (20).

L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra il teorema.

⁽¹⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽¹⁾, pag. 17.

9. - La conclusione precedente è sempre valida, se, fermo il resto,

I) $f(x, y, z)$ non cresce sia rispetto ad y che a z ;

II) $g(x, y, z)$ non cresce rispetto ad y ed è lipschitziana in senso generalizzato nella z .

Introdotte, al solito, le funzioni $y_1(x)$ e $z_1(x)$, $y_2(x)$ e $z_2(x)$, se in I è sempre $y_1(x) = y_2(x)$, ivi è anche $z_1(x) = z_2(x)$.

Altrimenti

$$i: \xi \leq x \leq \eta \quad (a \leq \xi < \eta \leq b)$$

sia un intervallo tale da aversi, per es.,

$$y_1(\xi) = y_2(\xi),$$

$$y_1(x) > y_2(x) \quad (\xi < x < \eta),$$

$$(y_1(\eta) - y_2(\eta))(b - \eta) = 0.$$

Se è $z_1(\eta) \geq z_2(\eta)$, dalla II) e dal lemma del n. 4 segue $z_1(x) \geq z_2(x)$ in tutto i . Quindi, per la I), la differenza $y_1(x) - y_2(x)$, positiva nell'interno di i , non può annullarsi nel punto ξ . Ma ciò è contro l'ipotesi, dunque $z_1(\eta) < z_2(\eta)$, $\eta \neq b$, $y_1(\eta) = y_2(\eta)$.

Determiniamo $\eta_0 > \eta$ in modo che sia

$$z_1(x) < z_2(x) \quad (\eta \leq x < \eta_0)$$

e

$$(21) \quad z_1(\eta_0) = z_2(\eta_0).$$

Se in un punto $\bar{x}$, con $\eta < \bar{x} \leq \eta_0$, fosse

$$y_1(\bar{x}) < y_2(\bar{x}),$$

in un intorno sinistro di $\bar{x}$ avremmo

$$f(x, y_1(x), z_1(x)) \geq f(x, y_2(x), z_2(x)),$$

la differenza $y_1(x) - y_2(x)$ non decrescerebbe ivi e se ne dedurrebbe facilmente, contro l'ipotesi, $y_1(\eta) < y_2(\eta)$.

Sicchè in $\eta \leq x \leq \eta_0$ è $y_1(x) \geq y_2(x)$, epperò $g(x, y_1(x), z) \leq g(x, y_2(x), z)$. Ma allora, dalla (21) e dal n. 4 si trae

$$z_1(x) \geq z_2(x) \quad (\eta \leq x \leq \eta_0).$$

Il che è assurdo. E anche questo teorema è dimostrato.

§ 5.

10. - Supponiamo $\varphi(x, y, z)$ e $\phi(x, y, z)$ continue (e limitate) nell'insieme

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

dove

$$\sigma_1(x), \tau_1(x) \quad \text{e} \quad \sigma_2(x), \tau_2(x) \quad (\sigma_i(x) \leq \tau_i(x))$$

sono due coppie di integrali del sistema

$$(22) \quad y' = \varphi(x, y, z), \quad z' = \phi(x, y, z).$$

Allora :

In queste ipotesi, il sistema (22) ammette in $I: a \leq x \leq b$ una soluzione

$$\sigma(x), \quad \tau(x)$$

soddisfacente alle condizioni

$$\sigma(a) = \alpha, \quad \tau(b) = \beta,$$

se.

I) $\varphi(x, y, z)$ non decresce rispetto a z ed è lipschitziana rispetto ad y ;

II) $\phi(x, y, z)$ non decresce rispetto ad y ed è lipschitziana in z ;

ed inoltre se

III) riesce $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = \alpha$, $\tau_1(b) \leq \beta \leq \tau_2(b)$ ⁽¹⁷⁾.

Infatti poniamo

in Γ ;

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \varphi(x, y, z),$$

per $y < \sigma_1(x)$, $\tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x)$;

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \varphi(x, \sigma_2(x), z),$$

per $y > \sigma_2(x)$, $\tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x)$;

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \bar{\varphi}(x, y, \tau_1(x)) + \operatorname{tgh}(z - \tau_1(x)),$$

se $z < \tau_1(x)$;

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \bar{\varphi}(x, y, \tau_2(x)) + \operatorname{tgh}(z - \tau_2(x)),$$

se $z > \tau_2(x)$ e definiamo $\bar{\psi}(x, y, z)$ in modo analogo a partire da $\psi(x, y, z)$, scambiando gli uffici di y e z , $\sigma_1(x)$ e $\tau_1(x)$, $\sigma_2(x)$ e $\tau_2(x)$.

Allora il sistema

$$y' = \bar{\varphi}(x, y, z), \quad z' = \bar{\psi}(x, y, z)$$

ammette una soluzione $\bar{\sigma}(x)$, $\bar{\tau}(x)$ verificante le

$$\bar{\sigma}(a) = \alpha, \quad \bar{\tau}(b) = \beta.$$

Dimostriamo che $\tau_1(x) \leq \bar{\tau}(x) \leq \tau_2(x)$.

Infatti, se in un punto x_0 di I è, p. es., $\tau_1(x_0) = \bar{\tau}(x_0)$, in tutto $a \leq x \leq x_0$ risulta [per la III) ed il n. 6], $\bar{\sigma}(x) = \sigma_1(x)$, $\bar{\tau}(x) = \tau_1(x)$. Di qui e dalla $\tau_1(b) \leq \bar{\tau}(b)$ segue che non può mai essere $\tau_1(x) > \bar{\tau}(x)$. Analogamente per la $\bar{\tau}(x) \leq \tau_2(x)$.

Indi è

$$\bar{\varphi}(x, y, \tau_1(x)) \leq \bar{\varphi}(x, y, \bar{\tau}(x)) \leq \bar{\varphi}(x, y, \tau_2(x));$$

⁽¹⁷⁾ Si noti che, se fosse $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$, sarebbe identicamente $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, $\tau_1(x) = \tau_2(x)$, come del resto apparirà dal seguito. E se fosse $\sigma_1(a) < \sigma_2(a)$, $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$, sarebbe, per le ipotesi, $\tau_1(x) \geq \tau_2(x)$ e quindi $\tau_1(x)$ identicamente uguale a $\tau_2(x)$; il teorema continuerebbe però a sussistere.

epperò (n. 4) risulta anche

$$\sigma_1(x) \leq \bar{\sigma}(x) \leq \sigma_2(x);$$

cioè $\bar{\sigma}(x)$ e $\bar{\tau}(x)$ verificano le (22), c. v. d.

11. - Naturalmente dal criterio del n. 7 se ne deduce uno analogo a quello del n. 10, in cui la III) del n. prec. sia sostituita dalle $\sigma_1(a) \leq \alpha \leq \sigma_2(a)$, $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$ ⁽¹⁸⁾.

(18) Se fosse invece $\sigma_1(a) = \sigma_2(a)$, $\tau_1(b) \leq \tau_2(b)$, varrebbero osservazioni analoghe a quelle della nota precedente.

Un'ultima osservazione [aggiunta dopo la stampa degli estratti]. Se si prescinde dalle quistioni d'esistenza, i criteri d'unicità dei §§ 3 e 4 sono validi [nel senso che le funzioni $y(x)$ e $z(x)$, continue in I e soddisfacenti ivi alle (7), sono univocamente determinate da α e β] anche se, fermo il resto, si sostituiscono le (4) con le

$$|f(x, y, z)| < k_n(x),$$

$$|g(x, y, z)| < k_n(x),$$

ove $n = 1, 2, \dots$; $|x| < n$, $|y| < n$; $k_n(x)$ sommabile in I . Ciò si vede immediatamente.

Inoltre nella quarta e quinta formula di pag. 49 si può sopprimere il termine contenente la tangente iperbolica.

(Pervenuto in Redazione il 9 Luglio 1941 - XIX)