

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

**Generazione proiettiva della varietà che rappresenta le coppie non ordinate di punti d'uno spazio lineare  $S_r$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 12 (1941), p. 123-129

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1941\\_\\_12\\_\\_123\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__123_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# GENERAZIONE PROIETTIVA DELLA VARIETÀ CHE RAPPRESENTA LE COPPIE NON ORDINATE DI PUNTI D'UNO SPAZIO LINEARE $S_r$ .

*Nota di UGO MORIN (a Padova).*

Dopo aver accennato (nn. 1, 2, 3) a proprietà della varietà minima  $V_{2r}$  che rappresenta senza eccezioni le coppie non ordinate di punti d'uno spazio lineare  $S_r$ , le quali sono ovvie generalizzazioni di proprietà della varietà dei piani tangenti d'una superficie di VERONESE (<sup>1</sup>), do di questa  $V_{2r}$  una costruzione proiettiva diretta. Da questa costruzione seguono varie determinazioni proiettive d'un sistema lineare di  $S_r$ , a due a due incidenti, i quali segano su alcuni spazi gruppi di punti che si corrispondono in omografie tra questi spazi (n. 9).

1. — Ad una quadrica inviluppo dello spazio lineare  $S_r^*$ , di equazione

$$(1) \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = 0, \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji}),$$

facciamo corrispondere il punto d'uno spazio lineare  $S_N$ ,  $N = \frac{r(r+3)}{2}$ , di coordinate  $\rho X_{ij} = \alpha_{ij}$ . Alle coppie non ordinate di punti dell'  $S_r^*$  (interpretati come sostegni di due stelle d'iperpiani) corrispondono nell'  $S_N$  i punti d'una varietà alge-

(<sup>1</sup>) BERTINI E., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [Giuseppe Principato, Messina 1923], Cap. XVI.

brica  $V_{2r}$ , di dimensione  $2r$  e di ordine  $\binom{2r}{r}$ . Infine, ai punti dell'  $S_r^*$  (interpretati come sostegni di stelle doppie) corrispondono nell'  $S_N$  i punti d'una  $V_r$ , rappresentata nell'  $S_r^*$  dal sistema lineare di tutte le quadriche luogo. L'ordine della  $V_r$  è quindi  $2^r$ .

**2.** Alle coppie di punti dell'  $S_r^*$ , con un punto fisso  $P^*$ , corrispondono nell'  $S_N$  i punti d'un  $S_r$ ; tangente alla  $V_r$  nel suo punto  $P$ , immagine di  $P^*$ . Al variare di  $P^*$  si ottiene un sistema  $\infty^r$ ,  $\Sigma$ , di  $S_r$  a due a due incidenti in un punto.

Per un punto generico della  $V_{2r}$  passano due  $S_r$  di  $\Sigma$  e i punti di incidenza di due  $S_r$  di  $\Sigma$  con gli  $\infty^r$  spazi di  $\Sigma$  si corrispondono in un omografia. Per un punto  $P$  della  $V_r$  passa un solo  $S_r$  di  $\Sigma$  e  $P$  è l'intersezione di questo  $S_r$  cogli spazi di  $\Sigma$  ad esso infinitamente vicini.

**3.** - Alle coppie di punti dell'  $S_r^*$ , con un punto fisso  $P^*$  e l'altro variabile in un  $S_{r-1}^*$  generico dell'  $S_r^*$  corrispondono nell'  $S_N$  i punti d'un  $S_{r-1}$ , appartenente all'  $S_r$  relativo a  $P^*$ . Al variare di  $P^*$ , fisso essendo l'  $S_{r-1}^*$ , si ottengono  $\infty^r$  spazi  $S_{r-1}$ , che appartengono ad un iperpiano  $S_{N-1}$  dell'  $S_N$ .

Infatti, la  $V_{2r}$  ha le equazioni parametriche  $X_{ij} = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$ , ( $i, j = 0, 1, \dots, r$ ), e se l'  $S_{r-1}^*$  ha l'equazione  $x_0 = 0$ , il corrispondente  $S_{N-1}$  ha l'equazione  $X_{00} = 0$ .

**4.** - Ora vogliamo dare una *costruzione proiettiva diretta* d'un sistema  $\infty^r$  di  $S_r$  a due a due incidenti, del tipo  $\Sigma$ , e constatare che questi  $S_r$  generano una  $V_{2r}$ .

Consideriamo nello spazio lineare  $S_N$   $N+1$  punti linearmente indipendenti, che indichiamo con  $P_{ij} = P_{ji}$  ( $i, j = 0, 1, \dots, r$ ). Gli  $r+1$  di questi punti che contengono lo stesso indice  $i$  individuano uno spazio  $S_r^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) e due di questi  $r+1$  spazi,  $S_r^{(i)}$  e  $S_r^{(j)}$ , hanno in comune il punto  $P_{ij}$ , e questo soltanto.

Consideriamo inoltre un iperpiano generico  $S_{N-1}$  dell'  $S_N$ .

Questi taglia ciascun  $S_r^{(i)}$  in un  $S_{r-1}^{(i)}$ . Tra due degli  $r+1$  spazi,  $S_r^{(i)}$  e  $S_r^{(j)}$ , (ad esempio  $i < j$ ), risulta determinata un'omografia

$$(2) \quad \Omega_{ij} \left( \begin{matrix} P_{i0}, \dots, P_{ii}, \dots, P_{ij}, \dots, P_{ir}, & S_{r-1}^{(i)} \\ P_{j0}, \dots, P_{ji}, \dots, P_{jj}, \dots, P_{jr}, & S_{r-1}^{(j)} \end{matrix} \right),$$

dalle  $r+1$  coppie di punti e dalla coppia di  $S_{r-1}$  corrispondenti messi in evidenza. Segue direttamente che

$$(3) \quad \Omega_{ij} \Omega_{jk} = \Omega_{ik}.$$

In queste omografie, ad un punto  $P_i$  dell'  $S_r^{(i)}$  corrispondono  $r$  punti degli altri  $S_r^{(j)}$ , ed il gruppo  $G_{r+1}$  di  $r+1$  punti così ottenuti è individuato simmetricamente, in base alle (3), da ciascuno dei suoi punti. Lo spazio congiungente un gruppo generico  $G_{r+1}$  è un  $S_r$  e non uno spazio di dimensione minore, poichè se  $P_i$  tende a  $P_{ii}$ , il relativo spazio congiungente tende all'  $S_r^{(i)}$ .

Al variare di  $P_i$  nell'  $S_r^{(i)}$  otteniamo così un sistema  $\Sigma_r$ ,  $\infty^r$ , di spazi  $S_r$  congiungenti i gruppi  $G_{r+1}$ . Proviamo che *gli  $S_r$  di questo  $\Sigma_r$  generano una  $V_{2r}$  (n. 1).*

**5.** — Fissiamo perciò in un  $S'_N$  una  $V'_{2r}$ , immagine delle coppie non ordinate di punti d'un  $S_r^*$ . Ad  $r+1$  punti generici dell'  $S_r^*$  corrispondono (n. 2)  $r+1$  spazi  $S_r^{(i)}$ , a due a due incidenti in un punto  $P'_{ij}$ , e i punti d'incidenza di due di questi spazi cogli  $\infty^r$  spazi del sistema  $\Sigma'$  si corrispondono in un'omografia  $\Omega'_{ij}$  (n. 2). Un  $S'_{r-1}^{(0)}$  generico dell'  $S_r^{(0)}$  ed i corrispondenti  $S'_{r-1}^{(i)}$  nelle varie  $\Omega'_{0i}$  appartengono ad un medesimo  $S'_{N-1}$  (n. 3). Indicando con  $P'_{ii}$  il punto di contatto dell'  $S_r^{(i)}$  colla  $V'_r$  (n. 1), l'omografia  $\Omega'_{ij}$  è individuata dalle seguenti coppie di elementi corrispondenti

$$(4) \quad \Omega'_{ij} \left( \begin{matrix} P'_{i0}, \dots, P'_{ii}, \dots, P'_{ij}, \dots, P'_{ir}, & S'_{r-1}^{(i)} \\ P'_{j0}, \dots, P'_{ji}, \dots, P'_{jj}, \dots, P'_{jr}, & S'_{r-1}^{(j)} \end{matrix} \right).$$

6. Possiamo ora determinare un'omografia  $\Omega$  tra gli spazi  $S'_N$  ed  $S_N$ , facendo corrispondere ordinatamente agli  $N + 1$  punti  $P'_{ij}$  (n. 5) i punti  $P_{ij}$  (n. 4) e all'iperpiano  $S'_{N-1}$  l'iperpiano  $S_{N-1}$ .

Questa omografia  $\Omega$  muta non solo gli  $r + 1$  spazi  $S'^{(r)}$  negli spazi  $S_r^{(r)}$ , ma trasforma anche l'omografia  $\Omega'_{ij}$  nell' $\Omega_{ij}$ ; in quanto trasforma le coppie di elementi corrispondenti messi in evidenza dalla (4) nelle coppie messe in evidenza dalla (2). Dunque la  $\Omega$  trasforma gli  $\infty^r$   $S'_r$  del sistema  $\Sigma'$  negli  $\infty^r$   $S_r$  di  $\Sigma_r$  (n. 4); cioè trasforma la  $V'_{2r}$  immagine delle coppie non ordinate di punti dell' $S_r^*$  nella  $V_{2r}$  da noi direttamente costruita.

7. - Lasciamo ora cadere per le omografie  $\Omega_{ij}$  tra gli spazi  $S_r^{(i)}$ ,  $S_r^{(j)}$ , soddisfacenti alle (3) e nelle quali i punti  $P_{ij}$  si corrispondano secondo gli schemi (2), l'ipotesi che un gruppo di  $S_{r-1}^{(i)}$  corrispondenti appartengano ad un iperpiano  $S_{N-1}$  e *sostituiamola coll'ipotesi che due  $S_r$  del nuovo sistema  $\Sigma_r^*$  siano incidenti in un punto.*

Questi due  $S_r$  individuano un  $S_r^*$ , che ha in comune con ciascun  $S_r^{(i)}$  la retta  $b_i^*$ , congiungente i punti d'incontro dell' $S_r^{(i)}$  coi due  $S_r$ . Supponiamo inoltre che la retta  $b_i^*$  sia indipendente dai punti  $P_{ij}$ .

Proponiamoci di dimostrare che *due generici  $S_r$  di  $\Sigma_r^*$  sono incidenti.*

Infatti, questa proprietà, in base al teorema del n. 6, è vera per  $r = 2$  (poichè  $S_N = S_5$ ,  $S_{2r}^* = S_4^*$ ). Supponiamo ora che la proprietà sia vera per spazi ad  $r - 1$  dimensioni e dimostriamo che essa è di conseguenza vera per spazi ad  $r$  dimensioni.

Proiettiamo gli  $\infty^r$  spazi di  $\Sigma_r$  dall' $S_r^{(i)}$  sopra un  $S_{N-r-1}$  complementare dell' $S_r^{(i)}$ . Essi si proiettano in spazi ad  $r - 1$  dimensioni. In particolare  $S_r^{(1)}, \dots, S_r^{(r)}$  daranno  $r$  spazi  $S_{r-1}^{(1)}, \dots, S_{r-1}^{(r)}$  dell' $S_{N-r-1}$   $\left( N - r - 1 = \frac{(r-1)(r+2)}{3} \right)$ , a due a due incidenti in un punto  $P'_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ).

Un  $S_r$  generico di  $\Sigma_r^*$  taglia gli spazi  $S_r^{(1)}, \dots, S_r^{(r)}$  rispettivamente in  $r$  punti  $A_1, \dots, A_r$ , che si proiettano in punti  $A'_1, \dots, A'_r$  rispettivamente degli spazi  $S_{r-1}^{(1)}, \dots, S_{r-1}^{(r)}$ . Nell'o-

omografia  $\Omega_{ij}$  alla retta  $P_{i0}A_i$  corrisponde la retta  $P_{j0}A_j$ , cioè agli  $\infty^1 S_r$  di  $\Sigma_r^*$  che si appoggiano alla retta  $P_{i0}A_i$  (e quindi alle corrispondenti rette  $P_{j0}A_j$ ) corrisponde nell' $S_{N-r-1}$  lo stesso spazio  $S_{r-1}$ , determinato dai punti  $A'_1, \dots, A'_r$ . Quindi questi gruppi di  $r$  punti, congiunti dagli  $S_{r-1}$  proiezioni degli  $S_r$  di  $\Sigma_r$ , si corrispondono in omografie  $\omega_{ij}$  tra le varie coppie di spazi  $S_{r-1}^{(i)}, S_{r-1}^{(j)}$  (soddisfacenti alle (3)). In queste omografie i punti  $P'_{ij}$  si corrispondono secondo gli schemi (2) ed inoltre le rette  $b_1^*, \dots, b_r^*$ , proiezioni delle rette  $b_1^*, \dots, b_r^*$ , appartengono ad un medesimo  $S_{2r-2}^*$ , proiezione dell' $S_{2r}^*$  delle rette  $b_0^*, b_1^*, \dots, b_r^*$  dall' $S_r^{(0)}$ , col quale ha in comune la retta  $b_0^*$ , <sup>(2)</sup>.

Dunque gli  $\infty^{r-1} S_{r-1}$  proiezioni degli  $\infty^r S_r$  di  $\Sigma_r^*$  formano un sistema  $\Sigma_{r-1}^*$  (soddisfacente alle condizioni poste in questo numero), quindi i suoi  $S_{r-1}$  sono (per ipotesi) a due a due incidenti. Cioè  $r$  rette generiche  $b'_1, \dots, b'_r$  corrispondenti nelle  $\omega_{ij}$  appartengono ad un medesimo  $S_{2r-2}$ .

Proviamo infine che lo spazio congiungente  $r+1$  rette generiche  $b_0, b_1, \dots, b_r$ , corrispondenti nelle  $\Omega_{ij}$ , è un  $S_{2r}$  (cioè che due  $S_r$  generici del  $\Sigma_r^*$  sono incidenti).

Infatti, se lo spazio congiungente le rette  $b_1, \dots, b_r$  è un  $S_{2r-2}$ , lo spazio congiungente  $b_0$  con questo  $S_{2r-2}$  ha la dimensione  $2r$ ; e la proprietà è dimostrata. Se lo spazio congiungente  $b_1, \dots, b_r$  è un  $S_{2r-1}$ , poichè dall' $S_r^{(0)}$  esso si proietta nell' $S_{2r-2}$  delle rette  $b'_1, \dots, b'_r$ , esso ha in comune coll' $S_r^{(0)}$  un punto. Questo punto appartiene alla retta  $b_0$ , <sup>(3)</sup>, cioè lo spazio congiungente  $b_0$  coll' $S_{2r-1}$  ha ancora la dimensione  $2r$ , c. v. d.

**8.** — Facciamo vedere che *il sistema  $\Sigma_r^*$  del n. 7 coincide col sistema  $\Sigma_r$  del n. 4.* Perciò prendiamo nell' $S_r^{(0)}$  del  $\Sigma_r^*$  un

<sup>(2)</sup> La proprietà che l' $S_{2r}^*$  abbia in comune coll' $S_r^{(i)}$  *soltanto* la retta  $b_i^*$  è vera per  $r=2$  (un  $S_4^*$  dell' $S_5$  avendo in comune con un  $S_2$  soltanto un  $S_1$ ). Se essa non fosse vera per  $r>2$ , per proiezione dall' $S_r^{(0)}$  sull' $S_{N-r-1}$  risulterebbe non vera per  $r-1$ , ciò che è assurdo.

<sup>(3)</sup> Poichè l' $S_{2r}$ , congiungente le rette  $b_0, b_1, \dots, b_r$  ha in comune coll' $S_r^{(0)}$  *soltanto* la retta  $b_0$  (cfr. nota <sup>(2)</sup>).

generico  $S_{r-1}^{(0)}$  e proviamo che gli  $\infty^{r-1} S_r$  del  $\Sigma_r^*$ , diversi dall'  $S_r^{(0)}$ , che si appoggiano all'  $S_{r-1}^{(0)}$ , appartengono ad un iperpiano dell'  $S_N$  (cioè  $\Sigma_r^* = \Sigma_r$ ).

Infatti, per  $r$  punti generici  $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r$  dell'  $S_{r-1}^{(0)}$  passano rispettivamente  $r$  spazi  $\bar{S}_1^{(1)}, \dots, \bar{S}_r^{(r)}$  del  $\Sigma_r^*$ , i quali sono  $r$  spazi generici di questo sistema. Questi  $r$  spazi sono linearmente indipendenti, poichè i loro  $\frac{r(r-1)}{2}$  punti d'incontro a due a due, gli  $r$  punti  $\bar{P}_i$  ed  $r$  punti  $\bar{P}_{ii}$  (scelti ciascuno genericamente sul rispettivo  $\bar{S}_i^{(i)}$ ) sono complessivamente  $N$  punti linearmente indipendenti: come si vede facendo tendere  $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r$  ai punti  $P_{01}, \dots, P_{0r}$  ed osservando che gli spazi  $\bar{S}_i^{(i)}$  hanno come limiti gli spazi  $S_i^{(i)}$ , per i quali gli  $N$  punti  $P_{ij}, P_{0i}, P_{ii}$ , limiti degli  $N$  punti sopra considerati, sono indipendenti. Quegli  $N$  punti linearmente indipendenti individuano l'  $S_{N-1}$ , al quale gli  $\bar{S}_i^{(i)}$  appartengono.

Uno spazio di  $\Sigma_r^*$  che si appoggia in un punto  $\bar{P}$  all'  $S_{r-1}^{(0)}$  incontra quegli  $r$  spazi in punti che, assieme a  $\bar{P}$ , formano  $r+1$  punti indipendenti. Infatti, facendo tendere  $\bar{P}$  a  $P_{01}$ , si osserva che gli  $r$  punti  $P_{11}, \dots, P_{r1}$ , relativi agli spazi  $S_1^{(1)}, \dots, S_r^{(r)}$ , e il punto  $\bar{P} = P_{01}$  sono indipendenti. L'  $S_r$  di  $\Sigma_r^*$  per  $\bar{P}$ , avendo in comune coll'  $S_{N-1}$   $r+1$  punti indipendenti, appartiene all'  $S_{N-1}$ , c. v. d.

9. - La condizione posta colle (2) alle omografie  $\Omega_{ij}$  che, fisso essendo  $i$ , ai diversi punti  $P_{ij}$  corrisponda il solo punto  $P_{ii}$  equivale alla condizione che lo spazio  $S_r^{(i)}$  faccia parte del sistema  $\Sigma_r = \Sigma_r^*$ . Possiamo quindi riassumere i risultati di questa Nota nel seguente modo:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè siano a due a due incidenti gli spazi  $S_r$  d'un sistema  $\Sigma_r$ ,  $\infty^r$ , dell'  $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ , i quali segano su  $r+1$  spazi generici  $S_r^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), a due a due incidenti, punti che si corrispondono in omografie  $\Omega_{ij}$  tra le varie coppie  $S_r^{(i)}, S_r^{(j)}$ , è che gli spazi  $S_r^{(i)}$  appartengano al  $\Sigma_r$  ed inoltre*





I) gli  $S_{r-1}^{(n)}$  corrispondenti nelle  $\Omega_{ij}$  d'un  $S_{r-1}^{(n)}$  dell'  $S_r^{(n)}$  appartengano, assieme all'  $S_{r-1}^{(n)}$ , ad un medesimo iperpiano;

II) oppure due ulteriori spazi  $S_r$  del  $\Sigma_r$  siano incidenti.

Il sistema  $\Sigma_r$  genera la varietà minima  $V_{2r}$  che rappresenta, senza eccezioni, le coppie non ordinate di punti d'un  $S_r$ .

---

(Pervenuto in Redazione il 30 Gennaio 1942-XX)