

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Criteri d'unicità per gli integrali d'un sistema di
equazioni differenziali ordinarie**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 11 (1940), p. 90-96

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__90_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__90_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CRITERI D'UNICITÀ PER GLI INTEGRALI D'UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER a Padova.

Alla determinazione di criteri sufficienti a garantire l'unicità delle soluzioni del problema dei valori iniziali per un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ho dedicato di recente una Memoria ⁽¹⁾. In essa mi sono proposto, limitandomi a considerare le cose nel campo delle funzioni continue, di estendere un teorema già dato per una equazione differenziale da SCORZA DRAGONI ⁽²⁾. Tale Autore ha però formulato diversi teoremi relativi ad equazioni differenziali a secondo membro discontinuo; e di questi uno ⁽³⁾ comprende sia tutti i criteri dati dallo SCORZA

⁽¹⁾ G. ZWIRNER: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un sistema di equazioni differenziali* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 1 (1936-1937), pp. 235-252].

⁽²⁾ G. SCORZA DRAGONI: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di una equazione differenziale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1930), pp. 430-444].

Per altre notizie bibliografiche rimando alle due Memorie fin' ora citate ed ai lavori seguenti: H. OKAMURA: *Sur l'approximation successive e l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$* [Mem. Coll. Sci. Kyôto Univ., ser. A (1931), pp. 85-96]; M. NAGUMO: *Über das Verfahren der sukzessiven Approximationen zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichung und die Eindeutigkeit ihrer Integrale* [Japanese Journal of Mathematics, vol. VII, (1930), pp. 143-160]; T. SATÔ: *Contribution à l'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire* [Japanese Journal of Mathematics, vol. XIII, (1936), pp. 1-6]; G. SCORZA DRAGONI: *A proposito di un teorema di Rosenblatt* [Rendiconti dei Lincei, serie VI, vol. XIV (1931), pp. 7-11].

⁽³⁾ SCORZA DRAGONI, loc. cit. ⁽²⁾, pp. 447-448.

$$y_1(x), \dots, y_n(x), \\ Y_1(x), \dots, Y_n(x),$$

quasi ovunque in $\bar{x} \leq x \leq b$, due soluzioni del sistema (1) uscenti dal punto $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ continue in $\bar{x} \leq x \leq b$ e assolutamente continue per $x > \bar{x}$.

Per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$, $(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x))$ supponiamo verificata la disequaglianza

$$(2) \quad \sum_1^n \omega_i [y_1(x) - Y_1(x), \dots, y_n(x) - Y_n(x)] \{ f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) - \\ - f_i(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x)) \} \leq \varphi(x),$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione definita nel segmento $\bar{x} \leq x \leq b$ e sommabile in ogni intervallo del tipo $\bar{x} + h \leq x \leq b$ ($\bar{x} < \bar{x} + h < b$), e le $\omega_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sono funzioni continue, definite per ogni valore di $u_1, \dots, u_n$, eccezione fatta per $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$. Supponiamo inoltre che esistano un numero intero positivo pari p e un numero reale $\alpha > 0$ tale che, fissato a piacere il numero positivo ε , si possano determinare i due numeri

$$(3) \quad \delta \geq 0, \quad \delta_1 > 0$$

in modo che sia

$$(4) \quad \bar{x} + \delta < b, \quad \delta_1 < \varepsilon$$

e che si abbia

$$(5) \quad \{ [y_1(x) - Y_1(x)]^p + \dots + [y_n(x) - Y_n(x)]^p \}^\alpha < \delta_1$$

per ogni $x \geq \bar{x}$ e $\leq \bar{x} + \delta$, e

$$(6) \quad \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) dx < \int_c \sum_1^n \omega_i(u_1, \dots, u_n) du_i$$

per ogni coppia di punti a_1, a_2 ($a_1 < a_2$) dell'intervallo $\bar{x} + \delta < x \leq b$ e per ogni curva continua e rettificabile c dello

spazio $u_1, \dots, u_n$, non passante per l'origine, e congiungente un punto dell'ipersuperficie

$$(7) \quad (u_1^p + \dots + u_n^p)^\alpha = \delta_1$$

con un punto dell'ipersuperficie

$$(8) \quad (u_1^p + \dots + u_n^p)^\alpha = \varepsilon.$$

In tali ipotesi riesce

$$y_1(x) = Y_1(x), \dots, y_n(x) = Y_n(x),$$

in tutto $\bar{x} \leq x \leq b$.

Posto

$$u_i(x) = y_i(x) - Y_i(x), \quad u(x) = \{[u_1(x)]^p + \dots + [u_n(x)]^p\}^\alpha$$

e fissato un numero positivo arbitrario ε , si determinino δ e δ_1 in modo da soddisfare alle (3), (4), (5) e (6). Per provare il teorema enunciato basterà, evidentemente, far vedere che, nelle ipotesi fatte, è $u(x) < \varepsilon$ in tutto l'intervallo $\bar{x} + \delta < x \leq b$. A tale scopo supponiamo, se possibile, che in un certo punto ξ ($\bar{x} + \delta < \xi \leq b$) sia $u(\xi) = \varepsilon$ e poniamo $\bar{\xi} = \bar{x} + \delta$ se nell'intervallo $\bar{x} + \delta \leq x \leq \xi$ la funzione $u(x)$ non si annulla mai; in caso contrario indichiamo con $\bar{\xi}$ il massimo punto, certamente esistente, dell'intervallo $\bar{x} + \delta \leq x \leq \xi$, dove $u(x)$ si annulla. Sarà in ogni caso $u(\bar{\xi}) < \delta_1$. Indichiamo ora con ξ_1 un punto dell'intervallo $\bar{\xi} \leq x \leq \xi$ dove risulta $u(\xi_1) = \delta_1$ ($\bar{x} < \xi_1$). Quasi ovunque in $\xi_1 \leq x \leq \xi$ sarà, per la (2),

$$\sum_1^n \omega_i \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\} u'_i(x) \leq \varphi(x),$$

da cui si deduce

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \sum_1^n \omega_i \{u_1(x), \dots, u_n(x)\} u'_i(x) dx \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \varphi(x) dx,$$

ossia, dato che in $\xi_1 \leq x \leq \xi$ le $u_i(x)$ sono assolutamente continue,

$$\int_c \sum_{i=1}^n \omega_i(u_1, \dots, u_n) du_i \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \varphi(x) dx,$$

dove c indica l'arco di curva rettificabile di equazioni $u_1 = u_1(x), \dots, u_n = u_n(x)$ per $\xi_1 \leq x \leq \xi$. Ma c congiunge un punto della ipersuperficie (7) con un punto della ipersuperficie (8); e quindi ci troviamo in contraddizione con la (6).

2. Se le funzioni $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ sono definite nel dominio

$$a \leq x \leq \bar{x}, \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq \beta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

vale allora, evidentemente, un criterio di unicità analogo a quello del n. 1 e relativo agli integrali $y_1(x), \dots, y_n(x); Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ del sistema (1) definiti nell'intervallo $a \leq x \leq \bar{x}$ e uscenti dal punto $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Basterà, invece della (2), supporre verificata, nell'intervallo $a \leq x \leq \bar{x}$ e per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), (x, Y_1(x), \dots, Y_n(x))$, la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^n \omega_i[y_1(x) - Y_1(x), \dots, y_n(x) - Y_n(x)] \{f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) - f_i(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x))\} \geq \varphi_1(x),$$

dove le ω_i hanno il significato chiarito nel n. 1 e la $\varphi_1(x)$ è definita in $a \leq x \leq \bar{x}$ e sommabile in ogni intervallo del tipo $a \leq x \leq \bar{x} - h$ ($a < \bar{x} - h < \bar{x}$), ed ammettere inoltre che, fissato a piacere il numero positivo ϵ , si possano determinare i due numeri $\delta \geq 0$ e $\delta_1 > 0$ in modo tale che sia

$$a < \bar{x} - \delta, \quad \delta_1 < \epsilon$$

e che si abbia

$$\{[y_1(x) - Y_1(x)]^p + \dots + [y_n(x) - Y_n(x)]^p\}^\alpha < \delta_1, \quad (\bar{x} - \delta \leq x \leq \bar{x});$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x) dx < \int_c \sum_{i=1}^n \omega_i(u_1, \dots, u_n) du_i,$$

per ogni coppia di punti a_1, a_2 ($a_1 > a_2$) dell'intervallo $a \leq x < \bar{x} - \delta$ e per ogni arco di curva continua e rettificabile c soddisfacente alle condizioni enunciate nel numero precedente.

3. Se si cerca di soddisfare alle ipotesi del n. 1 con funzioni del tipo

$$\omega_i(u_1, \dots, u_n) = \frac{u_i^{p-1}}{\omega[(u_1^p + \dots + u_n^p)^\alpha]},$$

con ω positiva per valori positivi dell'argomento, allora la condizione (6) si trasforma nella

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) dx < \frac{1}{p} \int_{\delta^{1/\alpha}}^{\varepsilon^{1/\alpha}} \frac{dv}{\omega(v^\alpha)}, \quad (\bar{x} + \delta < a_1 < a_2 \leq b);$$

ed in tal modo si ottiene un criterio che contiene, come caso particolare, quello dimostrato da L. GIULIANO ⁽⁸⁾.

OSSERVAZIONE. Se le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ sono definite nel dominio

$$a \leq x \leq b, \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq \beta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dai teoremi dei n. 1 e 2 si deduce agevolmente un criterio d'unicità, per gli integrali del sistema (1) uscenti dal punto

⁽⁸⁾ Loc. cit. (7). Il criterio di tale A. si ottiene ponendo $p = 2, \alpha = 1$ e supponendo inoltre $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_1}^{\varepsilon} \frac{dv}{\omega(v)} = +\infty$ e che esista finito il

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \int_{x_1}^b \varphi(x) dx.$$

$(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$, $(a < \bar{x} < b)$, supponendo soddisfatta una opportuna disuguaglianza del tipo

$$\sum_1^n \frac{|y_i - Y_i|^{q-1}}{\omega \left[\left\{ \sum_1^n |y_r - Y_r|^q \right\}^\alpha \right]} |f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)| \leq \varphi(x),$$

dove α e q sono *entrambi* numeri reali positivi ^(*).

(*) Cfr. la mia Memoria citata in (1), pp. 244-252.

(Pervenuto in Redazione il 24 aprile 1940 - XVIII)