

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CIMMINO

Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 11 (1940), p. 28-89

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__28_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__28_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUL PROBLEMA GENERALIZZATO DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI POISSON

di GIANFRANCO CIMMINO a Bologna.

Le idee contenute in una mia precedente memoria sul problema generalizzato di DIRICHLET ⁽¹⁾ sono suscettibili di essere sviluppate e precisate in varie direzioni. Presento qui un primo saggio di tali possibili sviluppi, limitandomi allo studio del problema di DIRICHLET per l'equazione di POISSON in n variabili.

I procedimenti di cui mi valgo non si allontanano nelle linee generali da quelli della citata memoria. È tuttavia da notare che il problema viene posto, nella presente ricerca (n. 1), in modo da eliminare alcune restrizioni relative ai dati del problema stesso. Così il campo A , nel quale si deve definire la soluzione dell'equazione alle derivate parziali, è qui un insieme aperto, che, anche nel caso particolare $n = 2$, non si riduce necessariamente ad avere la frontiera composta da curve semplici chiuse rettificabili di JORDAN ⁽²⁾. I domini $D^{(k)}$ invadenti il campo A (necessari alla definizione di convergenza in media verso valori dati alla frontiera, per una funzione definita in A) costituiscono una successione numerabile, e non un sistema dipendente da un parametro variabile in un intervallo. Le frontiere dei domini $D^{(k)}$ possono presentare delle singolarità: per esempio, non è necessario che esistano sempre, e siano variabili con continuità, le normali a tali frontiere.

⁽¹⁾ G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di DIRICHLET*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. LXI (1937), pp. 177-221.

⁽²⁾ Si pensi, per esempio, al caso che il campo A sia costituito dai punti interni a un'ellisse e non situati sul segmento focale.

Non sarebbe impossibile una formulazione ancor più generale delle ipotesi occorrenti per il nostro metodo di trattazione del problema; ma poichè questa maggiore generalità tornerebbe a scapito della chiarezza e della semplicità, mi sono contentato, nell'enunciare (n. 2) le condizioni che suppongo sempre verificate, di lasciarne qualcheduna sovrabbondante. Così, ho preferito considerare a parte (n. 14) il caso che il campo A sia illimitato, perchè avrebbe complicato eccessivamente le ipotesi il formularle in maniera da comprendere in esse tanto il caso di un campo limitato che quello di un campo illimitato. Del resto da alcuni esempi che ho svolti in ultimo (n. 13) si può già rilevare quale varietà di casi sia consentita dalle nostre ipotesi; segnalerò, fra l'altro, il fatto che il campo A può essere privo di punti esterni ⁽³⁾. Ciò ha importanza anche perchè esempi di questo genere restano esclusi dalle ipotesi occorrenti nelle teorie sul problema discontinuo di DIRICHLET, che si basano sui potenziali generalizzati di doppio strato ⁽⁴⁾.

Osserviamo pure che l'estensione dal caso di due a quello di n variabili, per quanto non presenti sostanziali difficoltà, non costituisce un aumento di generalità privo d'interesse. Infatti la proprietà di media (n. 5) e altre formole connesse con essa (n. 6) mettono in evidenza il fatto che, in certi risultati, l'ordine di sommabilità di alcune funzioni si deve supporre legato da relazioni di disuguaglianza al numero n delle variabili. Si veda, per esempio, l'enunciato del teorema d'inversione della proprietà

(3) Si vedano, a tale proposito, i lavori di C. MIRANDA, *Il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET in un campo privo di punti esterni*, Rend. della R. Acc. di Scienze fis. e mat. di Napoli, s. 3^a, Vol. XXXVIII (1932), pp. 50-53, *Il problema di DIRICHLET in campi dello spazio privi di punti esterni*, Annali di Mat., s. 4^a, t. XII (1934), pp. 1-11.

(4) G. C. EVANS, *Discontinuous boundary value problems of the first kind for POISSON'S equation*, American Journal of Mathematics, vol. LI (1929), pp. 1-18; G. C. EVANS and E. R. C. MILES, *Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems*, Amer. Journ. of Math., vol. LII (1931), pp. 493-516; altre notizie bibliografiche su lavori più recenti in questo ordine d'idee si trovano in G. C. EVANS, *Complements of potential theory II*, Amer. Journ. of Math., vol. LV (1933), pp. 29-49; *Modern methods of analysis in potential theory*, Bulletin of the Amer. Math. Society, vol. XLIII (1937), pp. 481-502.

di media (n. 7): secondo tale teorema, si può sostituire all'equazione di Poisson $\Delta u = f$ la relativa proprietà di media, soltanto nell'ipotesi che la funzione $|f|^q$ sia sommabile per un valore di $q > \frac{n}{2}$, ipotesi necessaria perchè abbia senso la formula di media stessa ⁽⁵⁾; ma poi, di più, se si vuole che l'equazione $\Delta u = f$ sussista anche soltanto a meno dei punti di un insieme di misura nulla, bisogna supporre che $|f|^q$ sia sommabile per un valore di $q > n$.

Di siffatte restrizioni sull'ordine di sommabilità della f non appare traccia nel teorema di unicità (n. 4), il quale è indipendente dalla proprietà di media e si basa soltanto su una identità fondamentale (n. 3), che avevo già data, nella memoria citata in ⁽¹⁾, per il caso di due e di tre variabili.

Invece, nel teorema di convergenza (n. 8), la dimostrazione del quale è stata qui semplificata e si appoggia al tempo stesso sulla proprietà di media e sull'identità fondamentale, si rispecchiano di nuovo le ipotesi del ricordato teorema d'inversione della proprietà di media.

Il teorema di esistenza (n. 12) si ottiene, come nella memoria citata in ⁽¹⁾, dalla fusione dei risultati del teorema di convergenza e di un teorema di chiusura (n. 11), la cui dimostrazione, nelle più ampie ipotesi attuali, richiede alcune considerazioni in più (n. 9) e l'aggiunta di certe condizioni (n. 10), che peraltro appaiono insite nella natura del problema.

La ragione per cui non ho trattato qui, più generalmente, il caso di una qualsiasi equazione lineare di tipo ellittico del 2° ordine è che, per questo tipo di equazioni, non ritengo possano ottenersi, coi semplici mezzi di cui mi sono servito, risultati così ben definiti come nel caso particolare dell'equazione di Poisson: per esempio, facendo uso della proprietà di media da me stabilita per le equazioni generali di tipo ellittico ⁽⁶⁾, non

⁽⁵⁾ Anche G. C. EVANS ha riconosciuta l'opportunità di sostituire l'equazione di Poisson con un'altra condizione, che si riduce in particolare a quell'equazione, se il secondo membro presenta una sufficiente regolarità; si veda in proposito la prima delle memorie citate nella nota precedente.

⁽⁶⁾ G. CIMMINO, *Su una proprietà di media relativa alle equazioni*

appare agevole dare, in forma altrettanto esplicita e sotto ipotesi equivalenti, gli analoghi degli enunciati qui contenuti nei numeri 5, 6, 7.

Ad ogni modo, la possibilità, già mostrata nella memoria citata in ⁽¹⁾ — sia pure con risultati ancora incompleti e in ipotesi più restrittive —, di applicare anche alle equazioni generali di tipo ellittico il nostro metodo di trattazione per il problema generalizzato di DIRICHLET contribuisce a dare importanza a questo metodo e lascia il campo aperto a nuove ricerche secondo tale indirizzo.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Sia dato, nello spazio a $n \geq 2$ dimensioni $x_1, x_2, \dots, x_n$, un insieme aperto, limitato, connesso ⁽⁷⁾ A , la cui frontiera, che indicheremo con FA , consti di un numero finito $m + 1 \geq 1$ di insiemi chiusi connessi $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$; di questi, se $m \geq 0$, supporremo che i $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ siano interni a Γ_0 , nel senso che ogni insieme connesso illimitato avente almeno un punto in comune con uno dei $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ debba necessariamente avere anche almeno un punto in comune con Γ_0 ⁽⁸⁾. Chiameremo pertanto Γ_0 il contorno esterno di A , e, se $m > 0$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ i contorni interni di A .

Sia data poi una successione di domini ⁽⁹⁾ $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots$

lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine, Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, s. IV, vol. I (1937), pp. 304-309.

⁽⁷⁾ Dicendo che un insieme chiuso è connesso, intendiamo che esso non sia somma di due insiemi chiusi privi di punti comuni; dicendo poi che un insieme qualsiasi E è connesso, intendiamo che, comunque si prendano due punti in E , sia sempre possibile assegnare un insieme chiuso connesso che li contenga e che sia tutto contenuto in E .

⁽⁸⁾ Non è dunque necessario supporre qui che Γ_0 divida l'intero spazio in due regioni soltanto, una interna e l'altra esterna a Γ_0 , aventi entrambe Γ_0 per completa frontiera.

⁽⁹⁾ Sull'esempio di M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Catania (1923), Vol. I, p. 65, si adopera qui la parola dominio, per indicare un insieme chiuso, tale che ogni suo punto frontiera sia punto d'accumulazione di punti interni.

contenuti in A , ciascuno $D^{(k)}$ dei quali sia costituito tutto da punti interni al successivo $D^{(k+1)}$ e abbia la frontiera $FD^{(k)}$ composta da $m+1$ varietà semplici chiuse a $n-1$ dimensioni $\Gamma_0^{(k)}, \Gamma_1^{(k)}, \dots, \Gamma_m^{(k)}$ rappresentabili mediante equazioni parametriche

$$(1) \quad x_i = x_i^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

tali che: 1°) i domini base $T_0, T_1, \dots, T_m$ delle $\Gamma_0^{(k)}, \Gamma_1^{(k)}, \dots, \Gamma_m^{(k)}$ ordinatamente siano limitati e indipendenti da k , abbiano le rispettive frontiere composte a loro volta da un numero finito di insiemi chiusi connessi (contorni) e siano due a due privi di punti comuni ⁽¹⁰⁾, 2°) le funzioni $x_i^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ siano uniformemente lipschitziane in ciascuno T_h dei detti domini, costanti su ogni contorno componente la frontiera FT_h di ciascuno di essi ⁽¹¹⁾ e inoltre, per due punti distinti $s'_1, s'_2, \dots, s'_{n-1}$ ed $s''_1, s''_2, \dots, s''_{n-1}$ del dominio somma

$$(2) \quad T = T_0 + T_1 + \dots + T_m,$$

non appartenenti entrambi a uno stesso contorno componente la frontiera di uno dei T_h , non sia mai $x_i(s'_1, s'_2, \dots, s'_{n-1}) = x_i(s''_1, s''_2, \dots, s''_{n-1})$ simultaneamente per tutti i valori di $i = 1, 2, \dots, n$.

Supporremo che $FD^{(k)}$ approssimi uniformemente FA , per $k \rightarrow \infty$, nel senso che, per ogni fissato valore di $h = 0, 1, \dots, m$, il massimo della distanza di un punto del contorno $\Gamma_h^{(k)}$ di $D^{(k)}$ dal corrispondente contorno Γ_h di A sia infinitesimo, per $k \rightarrow \infty$.

Ciò posto, fissato un numero $p \geq 1$ e una successione di funzioni $\Pi^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ continue e positive in T , data una

⁽¹⁰⁾ L'ipotesi che $T_0, T_1, \dots, T_m$ siano due a due privi di punti comuni non è, naturalmente, essenziale: essa serve soltanto a formulare più comodamente le altre condizioni e alcuni degli enunciati che seguono.

⁽¹¹⁾ Anche l'ipotesi che le $x_i^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1})$ siano costanti su ogni contorno componente la frontiera di ciascuno dei T_h serve soltanto a semplificare la formulazione dei successivi enunciati, ma non è essenziale, potendosi sostituire con altra qualsiasi, dalla quale sia del pari garantito che le varietà $\Gamma_0^{(k)}, \dots, \Gamma_m^{(k)}$ riescano chiuse.

funzione $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ di p -ma potenza sommabile ⁽¹²⁾ in T , diremo che una funzione $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definita in A converge in media (di ordine p , rispetto alla successione di funzioni peso $\Pi^{(k)}$, alla successione di domini $D^{(k)}$ e alle rappresentazioni parametriche (1)) verso i valori $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ su FA , o anche brevemente che la u assume in media i valori φ su FA , quando è

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \Pi^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) |u(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - \varphi(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})|^p ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1} = 0,$$

dove le $x_i^{(k)}$ indicano le funzioni di $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ definite da (1).

Ciò premesso, il problema di cui si occuperemo è il seguente:

Problema generalizzato di DIRICHLET. Date le due funzioni $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, di p -ma potenza sommabile in T , e $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, di q -ma potenza sommabile in A , con $p \geq 1$, $q \geq 1$, determinare una funzione $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue ⁽¹³⁾ in A , la quale verifichi quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$ e assuma in media i valori φ su FA .

Il problema così posto appare dipendente, attraverso la (3), dalle successioni delle funzioni peso $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \dots$ e dei domini $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots$, nonchè dalle rappresentazioni parametriche (1). Vedremo tuttavia (n. 12, in fine) che la soluzione, di cui dimostreremo l'esistenza, non dipende da tali elementi del problema, purchè per essi siano verificate alcune ipotesi generali, che passiamo ora a indicare.

⁽¹²⁾ Cioè tale che $|\varphi|^p$ sia una funzione sommabile.

⁽¹³⁾ Con definizione sostanzialmente equivalente a quella di L. TONELLI, *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations*, Acta Mathematica, t. 53 (1929), pp. 325-346 (cfr. anche l'appendice della memoria di G. C. EVANS, *Complements of potential theory*, già citata in (*)), diremo che una funzione continua è assolutamente continua in un insieme aperto A , se 1°) essa è dotata quasi dappertutto in A di derivate parziali prime, e queste riescono funzioni sommabili in A , 2°) per ogni dominio rettangolare R contenuto in A , risulta, in conformità del teorema di FUBINI sugli integrali

2. IPOTESI FONDAMENTALI.

Per ogni quantità positiva ϵ , diciamo I_δ l'insieme descritto dal punto $s_1, \dots, s_{n-1}, t$ nello spazio a n dimensioni, quando $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ descrive il dominio T definito da (2) e t l'intervallo aperto $0 < t < \delta$.

Supporremo che per un certo $\delta > 0$, nell'insieme I_δ si possano definire n funzioni $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) con le seguenti proprietà ⁽¹⁴⁾:

a) esista una successione di valori $t_1, t_2, \dots$, decrescente e convergente a zero, tale che sia

$$(4) \quad x_i^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t_k), \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 1, 2, \dots);$$

b) le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ siano continue in I_δ e, per ogni fissato valore di t , costanti su ogni contorno di ciascuno dei domini base $T_0, T_1, \dots, T_m$;

c) in ciascuna delle infinite porzioni $I_\delta^{(k)}$ di I_δ , che si ottengono facendo variare t separatamente negli intervalli aperti $t_k < t < t_{k+1}$, per $k = 1, 2, \dots$, le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ siano

multipli

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_n = \int_{FR} u dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

sicchè le $\int_{FR} u dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$ costituiscono n funzioni additive assolutamente continue di dominio rettangolare, e esse possono prolungarsi in funzioni additive assolutamente continue d'insieme misurabile E , che coincidono con le $\int_E \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_n$ rispettivamente. Onde sussisterà per le

funzioni assolutamente continue il lemma di GREEN sulla riduzione di un integrale n -plo ad integrale $(n-1)$ plo di frontiera.

⁽¹⁴⁾ Si confronti la maggiore generalità delle ipotesi del testo rispetto a quelle enunciate nel § 2 della memoria citata in ⁽¹⁾. Avvertiamo peraltro che l'ipotesi ivi indicata con c) è superflua anche in quella trattazione, nella quale la nota ⁽²⁴⁾ segnala il solo punto, in cui essa dovrebbe essere invocata, ma in cui effettivamente non occorre tuttavia applicarla.

dotate di derivate parziali dei primi due ordini continue, le quali, per ogni fissato valore di t , siano costanti su ogni contorno di ciascuno dei domini base $T_0, T_1, \dots, T_n$, e inoltre la matrice

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial x_1}{\partial s_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial s_1}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{array} \right\|$$

abbia sempre caratteristica $n-1$ e il determinante funzionale

$$(6) \quad \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s_1, \dots, s_{n-1}, t)}$$

sia sempre positivo;

d) per $t \rightarrow 0$, le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ convergano uniformemente in T verso certe funzioni ⁽¹⁵⁾ (continue), che indicheremo con $x_i(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$.

In base a c) risulta che, nell'interno di ciascuno degli infiniti insiemi $I_g^{(k)}$, le n equazioni

$$(7) \quad x_i = x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si possono univocamente risolvere rispetto alle $s_1, \dots, s_{n-1}, t$. La funzione $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$, che viene così ad ottenersi e che risulta definita, per la condizione b) e per (4), nell'insieme dei punti interni a D_{k+1} ed esterni a D_k , cioè in $D_{k+1} - FD_{k+1} - D_k$, sarà dotata in tale insieme, per c), di derivate parziali dei primi due ordini continue.

⁽¹⁵⁾ Si noti che, a differenza di quanto si è supposto in 2°) n. 1 per le $x_i^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1})$, non è escluso che le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1})$ possano riprendere tutte simultaneamente lo stesso valore per due punti distinti $(s'_1, \dots, s'_{n-1})$, $(s''_1, \dots, s''_{n-1})$ di T non appartenenti entrambi a uno stesso contorno componente la frontiera di uno dei T_k ; così, per esempio, per $n=3$, l'insieme A potrebbe essere quello che si ottiene togliendo dall'interno di una sfera un disco circolare, laddove questo disco verrebbe considerato come limite di una superficie chiusa che lo circonda. Si incontrerà più avanti un esempio simile (II del n. 13).

Per ogni fissato valore $\bar{t}$ di t nell'intervallo aperto $t_k < t < t_{k+1}$, le (7) rappresentano la completa frontiera di un dominio, che indicheremo con $D(\bar{t})$, contenuto nell'interno di D_{k+1} e contenente nel suo interno D_k ; tale frontiera può rappresentarsi anche con l'equazione

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{t}.$$

La funzione $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$, in base ad $a)$ e $b)$ risulta continua anche su FD_k e su FD_{k+1} , riducendosi ivi rispettivamente ai valori costanti t_k e t_{k+1} ; essa è quindi una funzione continua nell'insieme formato da tutti i punti di A , che non sono interni a D_1 , e inoltre, per $d)$, si riduce a zero su FA .

In ciascuno dei suddetti infiniti insiemi $I_{\mathfrak{g}}^{(k)}$ dello spazio $s_1, \dots, s_{n-1}, t$ (i quali, secondo quanto precede, hanno per immagini, nello spazio $x_1, x_2, \dots, x_n$, in base alle (7), ordinatamente gli insiemi aperti $D_{k+1} - FD_{k+1} - D_k$), consideriamo la funzione $\alpha(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ definita da

$$(8) \quad \alpha = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} \bigg/ \sum_{i=1}^n X_i^{(t)^2},$$

dove con $X_i^{(t)}$ indichiamo il complemento algebrico di $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ nel determinante (6); poichè si è supposto che codesto determinante fosse sempre positivo, tale sarà anche α .

Supponiamo ancora che in $I_{\mathfrak{g}}$ si possa definire una funzione $\Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ con le seguenti proprietà:

$\alpha')$ per i valori t_k della successione di cui in $a)$, sia

$$\Pi^{(k)}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = \Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t_k), \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$b')$ la $\Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ sia continua, quasi dappertutto positiva e limitata superiormente in $I_{\mathfrak{g}}$, e, per ogni fissato valore di t , sia costante su ogni contorno di ciascuno dei domini base $T_0, T_1, \dots, T_m$;

$c')$ in ognuno degl'insiemi $I_{\mathfrak{g}}^{(k)}$ di cui in $c)$, la $\Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ sia dotata di derivate parziali prime continue e, per

ogni fissato valore di t , costanti su ogni contorno di ciascuno dei domini stessi;

d') la funzione $\Pi\alpha$, dove α è definita da (8), coincida in $D_{k+1} - FD_{k+1} - D_k$ con una funzione $(\Pi\alpha)_k$, definita in tutto $D_{k+1} - FD_{k+1}$, ivi continua, dotata di derivate parziali prime assolutamente continue e limitata superiormente da una quantità indipendente da k ⁽¹⁶⁾.

3. IDENTITÀ FONDAMENTALE.

Preso per t un valore positivo, minore di δ e diverso da tutti i t_k ($k = 1, 2, \dots$), consideriamo il determinante (6), indicando con $X_i^{(s_h)}$ il complemento algebrico di $\frac{\partial x_i}{\partial s_h}$ e con $X_i^{(t)}$, come si è già detto, quello di $\frac{\partial x_i}{\partial t}$, onde sarà

$$\sum_{i=1}^n X_i^{(t)} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s_1, \dots, s_{n-1}, t)}, \quad \sum_{i=1}^n X_i^{(s_h)} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n X_i^{(t)} \frac{\partial x_i}{\partial s_h} = 0, \\ (h = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n X_i^{(s_h)} \frac{\partial x_i}{\partial s_h} = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k \\ \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s_1, \dots, s_{n-1}, t)}, & \text{se } h = k, \end{cases} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\sum_{h=1}^{n-1} X_i^{(s_h)} \frac{\partial x_j}{\partial s_h} + X_i^{(t)} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s_1, \dots, s_{n-1}, t)}, & \text{se } i = j, \end{cases} \\ (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Dalle n identità

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial t}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_h} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n-1), \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial t}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = 1,$$

⁽¹⁶⁾ Circa la possibilità di rendere verificate tutte le ipotesi enunciate, e inoltre quelle che verranno introdotte successivamente (n. 4 e n. 10) si veda più avanti il n. 13.

in base all'ultima delle (9), si trae

$$(11) \quad X_i^{(t)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} \cdot \frac{\partial t}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

tanto le $X_i^{(t)}$ che le $\frac{\partial t}{\partial x_i}$ sono proporzionali ai coseni direttori della normale alla frontiera del dominio $D(t)$ considerato nel n. precedente, e inoltre, poichè le $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ sono le componenti di un vettore volto verso l'interno di $D(t)$, mentre il prodotto scalare $\sum_{i=1}^n X_i^{(t)} \frac{\partial x_i}{\partial t}$, per la prima delle (9) e per c), è maggiore di zero, riconosciamo, più precisamente, che i coseni direttori della normale interna a $FD(t)$ sono dati da

$$(12) \quad \frac{X_i^{(t)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^{(t)^2}}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)..$$

Notiamo pure che, sempre per c), scelta t come si è detto in principio, esisteranno, e saranno continue, le derivate parziali prime e seconde delle $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$, e pertanto, come conseguenza dell'invertibilità dell'ordine di derivazione, si trae

$$(13) \quad \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\partial X_i^{(s_h)}}{\partial s_h} + \frac{\partial X_i^{(t)}}{\partial t} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Consideriamo ora le n quantità $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, che risultano dalla risoluzione del sistema di equazioni lineari

$$(14) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{h=1}^{n-1} \beta_h \frac{\partial x_i}{\partial s_h} + \alpha X_i^{(t)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nel quale il determinante dei coefficienti è $\sum_{i=1}^n X_i^{(t)^2}$, e quindi diverso da zero, poichè si è supposto che la matrice (5) abbia caratteristica $n - 1$.

Moltiplicando primo e secondo membro di (14) per $\frac{\partial t}{\partial x_i}$ e sommando per i da 1 ad n , ove si tenga conto delle (10), si ricava

$$(15) \quad \alpha \sum_{i=1}^n X_i^{(t)} \frac{\partial t}{\partial x_i} = 1,$$

onde si vede, in base a (11), che α è la stessa quantità (8) già considerata nel n. precedente; moltiplicando poi primo e secondo membro di (14) per $X_i^{(s_h)}$ e sommando per i da 1 ad n , ove si tenga conto delle (9), si trae

$$(16) \quad \beta_h \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} + \alpha \sum_{i=1}^n X_i^{(t)} X_i^{(s_h)} = 0, \quad (h=1, 2, \dots, n-1),$$

da cui si deduce ancora, in base a (11),

$$(17) \quad \beta_h = -\alpha \sum_{i=1}^n X_i^{(s_h)} \frac{\partial t}{\partial x_i}, \quad (h=1, 2, \dots, n-1).$$

Ciò posto, indicando con $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue in A , detta $\Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ una funzione che verifichi le condizioni $a')$, $b')$, $c')$, $d')$ formulate nel n. precedente, consideriamo l'integrale

$$(18) \quad I(t) = \int_T \Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t) \cdot |u(x_1, x_2, \dots, x_n)|^p ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1},$$

dove p è un numero ≥ 1 e dove alle $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'intendono sostituite le funzioni (7): esso costituisce, in virtù delle nostre ipotesi, una funzione di t continua per $0 < t < \delta$, che, fatta eccezione al più per i valori $t_1, t_2, \dots$ di t , è dotata inoltre anche di derivata prima continua. Per t compreso in uno degli infiniti intervalli aperti $t_k < t < t_{k+1}$, calcoliamo codesta derivata: tenendo presenti le (14), troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \int_T \frac{\partial \Pi}{\partial t} |u|^p ds_1 \dots ds_{n-1} + p \int_T \Pi \frac{|u|^p}{u} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \beta_h \frac{\partial x_i}{\partial s_h} + \right. \\
&+ \left. \alpha X_i^{(s)} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = \int_T \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} |u|^p + p \Pi \frac{|u|^p}{u} \sum_{h=1}^{n-1} \beta_h \frac{\partial u}{\partial s_h} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} + \\
&+ p \sum_{i=1}^n \int_T \Pi \alpha \frac{|u|^p}{u} \frac{\partial u}{\partial x_i} X_i^{(s)} ds_1 \dots ds_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dei due integrali all'ultimo membro possiamo trasformare il primo, osservando che

$$\begin{aligned}
(19) \quad & \int_T \frac{\partial}{\partial s_h} (\beta_h \Pi |u|^p) ds_1 \dots ds_{n-1} = \\
&= \int_T \left(p \Pi \frac{|u|^p}{u} \beta_h \frac{\partial u}{\partial s_h} + |u|^p \frac{\partial (\Pi \beta_h)}{\partial s_h} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0, \quad (h=1, 2, \dots, n-1),
\end{aligned}$$

e il secondo, mutandolo in un integrale esteso a $D(t)$, laddove è da tener presente che a $\Pi \alpha$ si può sostituire, per d' , $(\Pi \alpha)_k$ e che i coseni direttori della normale esterna a $FD(t)$ sono, per quanto si è detto, le quantità (12) cambiate di segno. Ricaviamo così per $\frac{dI}{dt}$ l'espressione seguente

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \int_T \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\partial (\Pi \beta_h)}{\partial s_h} \right) |u|^p ds_1 \dots ds_{n-1} - \\
&- p \sum_{i=1}^n \int_{D(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\Pi \alpha)_k \frac{|u|^p}{u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_1 \dots dx_n,
\end{aligned}$$

cioè ancora, per (15) e (17),

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi \alpha \sum_{i=1}^n X_i^{(s)} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial s_h} \left(\Pi \alpha \sum_{i=1}^n X_i^{(s_h)} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \\
&\cdot |u|^p ds_1 \dots ds_{n-1} - p \sum_{i=1}^n \int_{D(t)} \left[(\Pi \alpha)_k \left\{ \frac{|u|^p}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. (p-1) \frac{|u|^p}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} + \frac{\partial (\Pi \alpha)_k}{\partial x_i} \frac{|u|^p}{u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

Di qui, in base alla (13) e mediante un'integrazione per parti, risulta poi

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= \int_T \sum_{i=1}^n \left[X_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + X_i^{(s_h)} \frac{\partial}{\partial s_h} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) \right] \cdot |u|^p ds_1 \dots ds_{n-1} + \\
 (20) \quad &- \int_{D(t)} \left[p(\Pi \alpha)_k \left\{ \frac{|u|^p}{u} \Delta u + (p-1) \frac{|u|^p}{u^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - |u|^p \Delta(\Pi \alpha)_k \right] dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \int_T |u|^p \frac{\partial(\Pi \alpha)_k}{\partial x_i} X_i^{(i)} ds_1 \dots ds_{n-1};
 \end{aligned}$$

ma l'espressione che moltiplica $|u|^p$ nel primo integrale al secondo membro si può scrivere anche, ricordando l'ultima delle (9),

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) \left(X_i^{(i)} \frac{\partial x_j}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n-1} X_i^{(s_h)} \frac{\partial x_j}{\partial s_h} \right) = \\
 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)},
 \end{aligned}$$

onde infine, sostituendo ancora $\Pi \alpha$ a $(\Pi \alpha)_k$ nell'ultimo termine al secondo membro di (20) e ponendovi in luogo di $X_i^{(i)}$ l'espressione data da (11), si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= \int_T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(\Pi \alpha)}{\partial x_i} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right] \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} |u|^p ds_1 \dots ds_{n-1} + \\
 (21) \quad &- \int_{D(t)} \left[p(\Pi \alpha)_k \left\{ \frac{\Delta u}{u} + (p-1) \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \Delta(\Pi \alpha)_k \right] \cdot |u|^p dx_1 \dots dx_n.
 \end{aligned}$$

Questa è l'identità fondamentale, sulla quale poggiano essenzialmente gli sviluppi che seguono.

4. TEOREMA DI UNICITÀ.

I. - Se sono verificate le ipotesi $a), b), c), d), a'), b'), c', d')$ del n. 2 e se inoltre, per ogni $k = 1, 2, \dots$,

$1^o)$ è, quasi dappertutto in $D_{k+1} - FD_{k+1}$,

$$(22) \quad \Delta(\Pi\alpha)_k \leq 0,$$

$2^o)$ vi è un numero M , indipendente da k , tale che in $I_8^{(k)}$ risulti

$$(23) \quad \frac{1}{\Pi} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Pi \alpha \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(\Pi\alpha)}{\partial x_i} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right] \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} \leq M,$$

non potrà esistere più di una soluzione $u(x_1, \dots, x_n)$ del problema generalizzato di DIRICHLET (n. 1).

Infatti, da (21), (22), (23) discende immediatamente la disuguaglianza

$$(24) \quad \frac{dI}{dt} \leq M I - p \int_{D(t)} (\Pi\alpha)_k \Delta u \frac{|u|^p}{u} dx_1 \dots dx_n.$$

Ora, se $u(x_1, \dots, x_n)$ è la differenza fra due soluzioni del problema posto nel n. 1, essa sarà continua, con derivate parziali prime assolutamente continue, verificherà quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = 0$, e verificherà inoltre la condizione al contorno

$$(25) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \Pi^{(k)} |u(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})|^p ds_1 \dots ds_{n-1} = 0.$$

La (24), nella quale viene quindi a mancare l'ultimo termine al secondo membro, si riduce allora equivalente all'altra disuguaglianza

$$\frac{d}{dt} (e^{-Mt} I(t)) \leq 0;$$

e poichè questa deve sussistere per tutti i valori di t nell'intervallo $0 < t \leq t_1$, con eccezione al più per la successione di valori $t_1, t_2, \dots$ (nei quali la derivata potrebbe anche non esistere), si conclude che $e^{-Mt} I(t)$ deve essere non decrescente al decrescere di t , e quindi, essendo sempre non negativa, deve tendere a una quantità positiva, o a $+\infty$, per $t \rightarrow 0$, a meno che $I(t)$ non si riduca identicamente a zero. Ma allora vediamo che appunto quest'ultimo caso deve necessariamente presentarsi, giacchè la (25) esprime il fatto (v. le condizioni a), a') nel n. 2) che $I(t_k)$ è infinitesima, al pari di t_k , per $k \rightarrow \infty$.

Dall'annullarsi identicamente di $I(t)$ per $t < t_1$, discende, per b'), che $u(x_1, \dots, x_n)$ è quasi dappertutto uguale a zero in $A - D_1$, e quindi anche, essendo continua, identicamente nulla ivi, onde risulta manifesto che essa è addirittura identicamente nulla in tutto A , in virtù del teorema della media di GAUSS per le funzioni armoniche, ove si tenga presente il fatto ⁽¹⁷⁾ che, per dimostrare tale teorema, basta supporre che l'equazione $\Delta u = 0$ sia verificata quasi dappertutto, riuscendo le derivate parziali prime della u assolutamente continue, secondo quanto segue anche, in particolare, dalle considerazioni del n. seguente.

5. PROPRIETÀ DI MEDIA.

Siano $u(x_1, \dots, x_n)$, $v(x_1, \dots, x_n)$ due funzioni continue e dotate di derivate parziali prime assolutamente continue in A , e sia D un dominio contenuto in A , la frontiera del quale possieda in ogni punto una ben determinata normale interna n e venga rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$(26) \quad x_i = x_i(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove supporremo che le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1})$ siano uniformemente lipschitziane nel dominio base T . Sussiste allora la seguente *formola di reciprocità*

⁽¹⁷⁾ Basta trasformare col lemma di GREEN (v. la nota ⁽¹³⁾) l'integrale del Δu esteso a un dominio sferico in un integrale di frontiera.

tenza sommabile in A , con $q > \frac{n}{2}$, $n \geq 3$, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , sussiste la formola ⁽¹⁸⁾

$$(29) \quad u(P) = \frac{n}{\omega r^n} \int_{S(P, r)} \left[u(Q) - \frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{PQ}^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{PQ}^2}{2r^2} \right) \Delta u(Q) \right] dQ,$$

dove dQ indica l'elemento di volume ⁽¹⁹⁾.

Infatti, dato un dominio sferico $S(P_0, r)$ contenuto in A e fissata a piacere una quantità positiva $\epsilon < r$, applichiamo la (27), prendendo come dominio D quello che si ottiene privando $S(P_0, r)$ dei punti interni a $S(P_0, \epsilon)$ e come funzione $v(P)$ la funzione armonica $r^{2-n} - \overline{P_0 P}^{2-n}$, indi passiamo al limite per $\epsilon \rightarrow 0$ nella relazione così ottenuta. Ne risulta

$$\begin{aligned} & \int_0^r \int_{\omega} (r^{2-n} - \rho^{2-n}) \Delta u(x_1, \dots, x_n) \rho^{n-1} d\rho d\omega + \\ & + (n-2) \int_{\omega} [u(x_1, \dots, x_n)]_{\rho=r} d\omega = (n-2) \int_{\omega} u(x_1^0, \dots, x_n^0) d\omega, \end{aligned}$$

dove alle $x_1, \dots, x_n$ s'intendono sostituiti i secondi membri delle (28). È quindi

⁽¹⁸⁾ Per $n = 2$, alla (29) del testo va sostituita la formola

$$u(P) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{S(P, r)} \left[u(Q) - \frac{r^2}{2} \left(\log \frac{r}{\overline{PQ}} - \frac{r^2 - \overline{PQ}^2}{2r^2} \right) \Delta u(Q) \right] dQ.$$

⁽¹⁹⁾ La formola è ben nota. Si veda, p. es., la seconda parte del trattato R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin (1937), p. 257. Essa è caso particolare di quella che si trova in G. CIMMINO, loc. cit. in ⁽⁶⁾, per $n = 2$.

$$(30) \quad u(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} [u(x_1, \dots, x_n)]_{\rho=r} d\omega + \\ + \frac{1}{(n-2)\omega} \int_0^r \int_{\omega} (r^{2-n} - \rho^{2-n}) \Delta u(x_1, \dots, x_n) \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

Poichè, nel caso particolare che la u sia armonica, questa formula si riduce a quella esprime il teorema della media di GAUSS, diremo, anche in generale, che essa esprime una *proprietà di media* della funzione u rispetto all'operatore a derivate parziali Δ .

È subito visto che la (30) equivale alla (29). Infatti, se $S(P_0, r_0)$ è un dominio sferico contenuto in A , la (30) sussiste per ogni $r \leq r_0$; moltiplichiamo primo e secondo membro per $r^{n-1} dr$, integrando poi fra 0 ed r_0 e dividendo infine per $\frac{r_0^n}{n}$: otteniamo così

$$u(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{n}{\omega r_0^n} \int_{S(P_0, r_0)} u(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - \\ - \frac{n}{(n-2)\omega r_0^n} \int_{S(P_0, r_0)} \left(\frac{r_0^n - \rho^n}{n} \rho - \frac{r_0^2 - \rho^2}{2} \rho^{n-1} \right) \frac{\Delta u(x_1, \dots, x_n)}{\rho^{n-1}} dx_1 \dots dx_n = \\ = \frac{n}{\omega r_0^n} \int_{S(P_0, r_0)} \left[u(x_1, \dots, x_n) - \frac{r_0^2}{n} \left(\frac{r_0^{n-2} - \rho^{n-2}}{(n-2)\rho^{n-2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r_0^2 - \rho^2}{2r_0^2} \right) \right] \Delta u(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

dove ρ indica la distanza dal punto $P_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_n^0)$ al punto $Q \equiv (x_1, \dots, x_n)$ d'integrazione. Salvo una diversità di notazioni, la formula così trovata coincide con la (29) da dimostrare.

Giova notare esplicitamente che l'ipotesi del teorema, che Δu sia di q -ma potenza sommabile, con $q > \frac{n}{2}$, serve a giustificare il passaggio al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ eseguito poc'anzi, assicurando anche l'esistenza dell'integrale $\int_{S(P, r)} \overline{PQ}^{2-n} \Delta u(Q) dQ$, e quindi quella dell'integrale al secondo membro di (29). Infatti,

dalla disuguaglianza $q > \frac{n}{2}$ segue l'altra $\frac{q}{q-1} < \frac{n}{n-2}$, da cui risulta che $\overline{PQ}^{2-n}$ è di $\frac{q}{q-1}$ -ma potenza sommabile in $S(P, r)$, onde $\overline{PQ}^{2-n} \Delta u(Q)$ riesce sommabile, come prodotto di due funzioni, una di q -ma, l'altra di $\frac{q}{q-1}$ -ma potenza sommabile.

6. FORMOLE CONNESSE CON LA PROPRIETÀ DI MEDIA.

III. - Se u è una funzione continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue e se Δu è di q -ma potenza sommabile in A , con $q > n$, allora, per ogni direzione $\mathbf{d}$ e per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , sussisterà la formola ⁽²⁰⁾

$$(31) \quad Du(P) = \frac{n}{\omega r^n} \left[r^{n-1} \int_{\omega} [u(Q)]_{\rho=r} \cos(\overline{PQ}, \mathbf{d}) d\omega - \right. \\ \left. - \int_{S(P, r)} \frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} \Delta u(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{d}) dQ \right],$$

dove il simbolo D sta a indicare derivazione secondo la direzione $\mathbf{d}$ e dove s'intende che le coordinate $x_1^0, \dots, x_n^0$ di P e quelle $x_1, \dots, x_n$ di Q siano legate alle $\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ dalle formole (28).

Infatti, è anzitutto

$$D \int_{S(P, r)} u(Q) dQ = \int_0^r \int_{\omega} Du(x_1, \dots, x_n) \rho^{n-1} d\rho d\omega = \int_{S(P, r)} Du(Q) dQ,$$

dove la derivazione sotto al segno d'integrale è eseguita rispetto al punto P , le cui coordinate $x_1^0, \dots, x_n^0$ sono presenti per il tramite delle $x_1, \dots, x_n$ secondo le (28), e quindi può anche

⁽²⁰⁾ La formola vale anche nel caso $n=2$, come si riconosce, con lievi modificazioni nel ragionamento, partendo dalla formola data nella nota ⁽¹⁸⁾, anzichè dalla (29).

indifferentemente pensarsi come eseguita rispetto al punto $Q \equiv (x_1, \dots, x_n)$.

Pertanto, valendoci della (29), troviamo

$$\begin{aligned}
 Du(P_0) &= \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \frac{u(P_1) - u(P_0)}{\overline{P_0 P_1}} = \frac{n}{\omega r^n} \left[\int_{S(P_0, r)} Du(Q) dQ - \right. \\
 (32) \quad & - \frac{r^2}{n} \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \frac{1}{\overline{P_0 P_1}} \left(\int_{S(P_1, r)} - \int_{S(P_0, r)} \right) \left(\frac{r^{n-2} - \overline{P_1 Q}^{n-2}}{(n-2) \overline{P_1 Q}^{n-2}} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{r^2 - \overline{P_1 Q}^2}{2r^2} \right) \Delta u(Q) dQ + \frac{r^2}{n} \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \int_{S(P_0, r)} \frac{1}{\overline{P_0 P_1}} \left(\frac{r^{n-2}}{(n-2) \overline{P_1 Q}^{n-2}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{r^{n-2}}{(n-2) \overline{P_0 Q}^{n-2}} + \frac{\overline{P_1 Q}^2}{2r^2} - \frac{\overline{P_0 Q}^2}{2r^2} \right) \Delta u(Q) dQ \right],
 \end{aligned}$$

dove s'intende che P_1 deve tendere a P_0 secondo la direzione assegnata $\vec{d}$.

Non appena la distanza $\overline{P_0 P_1}$, nel suo tendere a zero, sarà diventata minore di $2r$, i due domini sferici $S(P_0, r)$, $S(P_1, r)$ avranno una parte comune $S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)$, sicchè nel secondo membro di (32) si potrà scrivere

$$(33) \quad \int_{S(P_1, r)} - \int_{S(P_0, r)} = \int_{S(P_1, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)} - \int_{S(P_0, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)}.$$

Non appena poi sarà $\overline{P_0 P_1} < r$, la distanza $\overline{P_1 Q}$ resterà compresa fra $r - \overline{P_0 P_1}$ ed $r + \overline{P_0 P_1}$, al variare di Q in $S(P_0, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)$ e in $S(P_1, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)$, e di conseguenza risulterà

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\overline{P_0 P_1}} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{P_1 Q}^{n-2}}{(n-2) \overline{P_1 Q}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{P_1 Q}^2}{2r^2} \right) \leq \\
 & \leq \frac{r^{n-2} - (r - \overline{P_0 P_1})^{n-2}}{(n-2) \overline{P_0 P_1} (r - \overline{P_0 P_1})^{n-2}} - \frac{r^2 - (r + \overline{P_0 P_1})^2}{2r^2 \overline{P_0 P_1}},
 \end{aligned}$$

onde è chiaro che il primo membro della disuguaglianza si man-

terrà limitato per $P_1 \rightarrow P_0$. Pertanto, dato che le misure degli insiemi $S(P_0, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)$ ed $S(P_1, r) - S(P_0, r) \cdot S(P_1, r)$ tendono a zero per $P_1 \rightarrow P_0$ e data la sommabilità di Δu , appare manifesto che il primo dei due limiti fra [] in (32) vale zero. Il secondo, poi, si ottiene semplicemente col passaggio al limite sotto al segno d'integrale, e il suo valore è subito trovato, ove si tenga presente che la derivata di $\frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{\overline{PQ}^2}{2r^2} \right)$ rispetto a P nella direzione d è $\frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} \cos(\overline{PQ}, d)$.

Da tutto ciò, ove si trasformi inoltre l' $\int_{S(P_0, r)} Du(Q) dQ$ in un integrale esteso alla frontiera di $S(P_0, r)$, risulta senz'altro la (31), salvo il mutamento di P_0 in P .

Si noti che l'ipotesi del teorema, che Δu sia di q -ma potenza sommabile, con $q > n$, serve a giustificare il passaggio al limite sotto al segno d'integrale eseguito poc' anzi, assicurando anche l'esistenza dell' $\int_{S(P, r)} \overline{PQ}^{1-n} dQ$, e quindi quella dell' $\int_{S(P, r)}$ al secondo membro di (31). Infatti, dalla disuguaglianza $q > n$ segue l'altra $\frac{q}{q-1} < \frac{n}{n-1}$, da cui risulta che $\overline{PQ}^{1-n}$ è di $\frac{q}{q-1}$ -ma potenza ^e sommabile in $S(P, r)$.

IV. - *Nelle ipotesi del teorema III sulla funzione u , se inoltre il Δu esiste ⁽²¹⁾ nel punto P di A e se, per due certe costanti positive H, h e per Q quasi dappertutto in un dominio sferico $S(P, \bar{r})$ di centro P , riesce verificata la condizione di HÖLDER*

$$|\Delta u(Q) - \Delta u(P)| < H \cdot \overline{PQ}^h,$$

allora nel punto P esisteranno tutte le derivate seconde della u e, per ogni coppia di direzioni (eventualmente coincidenti)

(21) Se, cioè, esistono, nel senso ordinario, le derivate parziali seconde della u rispetto a ciascuna variabile separatamente.

$\mathbf{d}, \mathbf{d}'$, qualunque sia il dominio sferico $S(P, r)$ di centro P , contenuto in A , sussisterà la formola

$$(34) \quad \begin{aligned} DD'u(P) = & \frac{n}{\omega r^n} \left[r^{n-1} \int_{\omega} [D'u(Q)]_{\rho=r} \cos(\overline{PQ}, \mathbf{d}) d\omega + \right. \\ & + \int_{S(P, r)} \left(\frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^n} \cos(\mathbf{d}, \mathbf{d}') - \right. \\ & \left. \left. - \frac{r^n \cos(\overline{PQ}, \mathbf{d}) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{d}')}{\overline{PQ}^n} \right) (\Delta u(Q) - \Delta u(P)) dQ \right], \end{aligned}$$

dove $DD'u(P)$ indica la derivata seconda di $u(P)$ secondo le due direzioni $\mathbf{d}, \mathbf{d}'$, e dove s'intende sempre che le coordinate $x_1^0, \dots, x_n^0$ di P e quelle $x_1, \dots, x_n$ di Q siano legate alle $\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ dalle formole (28).

Partiamo infatti dalla formola (31). Dei due termini fra [] al secondo membro di essa, il primo dipende dalle coordinate $x_1^0, \dots, x_n^0$ del punto P soltanto per il tramite della $u(Q)$, giacchè le coordinate di Q sono date dalle (28), mentre $\cos(\overline{PQ}, \mathbf{d})$ non dipende dalle $x_1^0, \dots, x_n^0$, ma solo dalle $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$. Il detto termine, pertanto, con la derivazione rappresentata dal simbolo D' dà luogo al primo dei due integrali al secondo membro di (34).

Consideriamo, d'altra parte, il rapporto incrementale relativo al secondo dei due termini fra [] al secondo membro di (31); poichè risulta

$$\int_{S(P_0, r)} \frac{r^n - \overline{P_0Q}^n}{n \overline{P_0Q}^{n-1}} \cos(\overline{P_0Q}, \mathbf{d}) dQ = \int_{S(P_1, r)} \frac{r^n - \overline{P_1Q}^n}{n \overline{P_1Q}^{n-1}} \cos(\overline{P_1Q}, \mathbf{d}) dQ,$$

esso potrà scriversi

$$(35) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\overline{P_0P_1}} \left(\int_{S(P_1, r)} - \int_{S(P_0, r)} \right) \frac{r^n - \overline{P_1Q}^n}{n \overline{P_1Q}^{n-1}} (\Delta u(Q) - \Delta u(P_0)) \cos(\overline{P_1Q}, \mathbf{d}) dQ + \\ & + \int_{S(P_0, r)} \frac{1}{\overline{P_0P_1}} \left(\frac{r^n - \overline{P_1Q}^n}{n \overline{P_1Q}^{n-1}} \cos(\overline{P_1Q}, \mathbf{d}) - \right. \\ & \left. - \frac{r^n - \overline{P_0Q}^n}{n \overline{P_0Q}^{n-1}} \cos(\overline{P_0Q}, \mathbf{d}) \right) (\Delta u(Q) - \Delta u(P_0)) dQ. \end{aligned}$$

Facciamo ora tendere P_1 a $P_0 \equiv P$ secondo la direzione d' : servendoci della (33) e ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente, riconosciamo che è

$$\lim_{P_1 \rightarrow P_0} \frac{1}{\overline{P_0 P_1}} \left(\int_{S(P_1, r)} - \int_{S(P_0, r)} \right) \frac{r^n - \overline{P_1 Q}^n}{n \overline{P_1 Q}^{n-1}} (\Delta u(Q) - \Delta u(P_0)) \cos(\overline{P_1 Q}, d) dQ = 0.$$

Quanto al limite dell'altro integrale che figura in (35), esso si trova col passaggio al limite sotto al segno, osservando che la derivata di $\frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} \cos(\overline{PQ}, d)$ rispetto a P nella direzione d' è $-\frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^n} \cos(d, d') + \frac{r^n \cos(\overline{PQ}, d) \cos(\overline{PQ}, d')}{\overline{PQ}^n}$. E da ciò risulta immediatamente la (34), salvo il mutamento di P_0 in P .

Si noti che l'ipotesi del teorema, che Δu verifichi una condizione di HÖLDER in P , serve a giustificare il passaggio al limite sotto al segno d'integrale eseguito poc'anzi, assicurando anche la convergenza dell'integrale $\int_{S(P, r)} \overline{PQ}^{-n} (\Delta u(Q) - \Delta u(P)) dQ$, e quindi quella dell' $\int_{S(P, r)}$ al secondo membro di (34).

7. INVERSIONE DELLA PROPRIETÀ DI MEDIA. ⁽²²⁾.

V. — Siano u ed f due funzioni sommabili in A e supponiamo che, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A ,

⁽²²⁾ Questa inversione della proprietà di media si trova anche, in ipotesi assai più restrittive e con risultati meno completi, nel trattato citato in ⁽¹⁹⁾, per quanto riguarda l'equazione di Poisson, e nella mia memoria citata in ⁽⁹⁾, per quanto riguarda l'equazione generale di tipo ellittico. Il primo tentativo di inversione della proprietà di media con un minimo di ipotesi sulla funzione u , limitatamente al caso delle funzioni armoniche in due variabili, è stato compiuto da E. E. LEVI, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, s. V, t. 18 (1909), pp. 10-15.

risulti, essendo $n \geq 3$ ⁽²³⁾,

$$(36) \quad u(P) = \frac{n}{\omega r^n} \int_{S(P, r)} \left[u(Q) - \frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{PQ}^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{PQ}^2}{2r^2} \right) f(Q) \right] dQ.$$

Dico allora che: 1°) se la f è di q -ma potenza sommabile, con $q > \frac{n}{2}$, la u verificherà una condizione di HÖLDER, di esponente uguale al minore dei due numeri $1 - \frac{1}{q}$ e $2 - \frac{n}{q}$, uniformemente in ogni dominio D contenuto in A ; 2°) se la f è di q -ma potenza sommabile, con $q > n$, la u sarà dotata di derivate parziali prime verificanti una condizione di HÖLDER, di esponente $1 - \frac{n}{q}$, uniformemente in ogni dominio D contenuto in A , e l'equazione $\Delta u = f$ varrà quasi dappertutto in A ; 3°) se, di più, la f è definita nel punto P di A e se, per due certe costanti positive H , h e per Q quasi dappertutto in un dominio sferico $S(P, \bar{r})$ di centro P , riesce verificata la condizione di HÖLDER

$$|f(Q) - f(P)| < H \cdot \overline{PQ}^h,$$

tutte le derivate seconde della u in P esisteranno, e sarà $\Delta u(P) = f(P)$.

Assegnato come si voglia il dominio D in A , fissiamo anzitutto un dominio $\bar{D}$ pure contenuto in A e che a sua volta contenga D nel suo interno, indi un numero $\bar{r}$ tale che ogni dominio sferico di raggio $\bar{r}$, col centro in D , sia contenuto in $\bar{D}$.

Ciò posto, prendiamo a piacere in D due punti P_0, P_1 , la cui distanza $\overline{P_0 P_1}$ sia minore di 1 e di $\frac{2\bar{r}}{3}$, e cominciamo con l'osservazione che, posto $\varepsilon = 1$, o $\varepsilon = 2$, secondochè $q > n$, o

⁽²³⁾ Il teorema vale anche nel caso $n = 2$, ove si sostituisca alla (36) del testo la formola che si ottiene da quella data in ⁽¹⁸⁾, sostituendovi $f(Q)$ a $\Delta u(Q)$.

$q > \frac{n}{2}$, sussisteranno manifestamente, di seguito, le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{S(P_1, \bar{r})} f(Q) \frac{dQ}{P_1 Q^{n-\varepsilon}} - \int_{S(P_0, \bar{r})} f(Q) \frac{dQ}{P_0 Q^{n-\varepsilon}} \right| = \left| \int_{S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} + \int_{S(P_1, \bar{r}) - S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}) - S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} \right\} f(Q) \frac{dQ}{P_1 Q^{n-\varepsilon}} + \\
 & \quad - \left\{ \int_{S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} + \int_{S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{S(P_0, \bar{r}) - S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}) - S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} \right\} f(Q) \frac{dQ}{P_0 Q^{n-\varepsilon}} \leq \\
 & \leq \sum_{i,j=0,1} \int_{S(P_i, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} |f(Q)| \frac{dQ}{P_j Q^{n-\varepsilon}} + \\
 & \quad + \sum_{i=0,1} \int_{S(P_i, \bar{r}) - S(P_0, \bar{r}) \cdot S(P_1, \bar{r})} |f(Q)| \frac{dQ}{P_i Q^{n-\varepsilon}} + \\
 (37) \quad & \quad + \int_{S(P_0, \bar{r}) \cdot S(P_1, \bar{r}) - S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}) - S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} \left| \frac{1}{P_1 Q^{n-\varepsilon}} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{P_0 Q^{n-\varepsilon}} \right| \cdot |f(Q)| dQ \leq 2 \sum_{i=0,1} \int_{S(P_i, \frac{3}{2} \overline{P_0 P_1})} |f(Q)| \frac{dQ}{P_i Q^{n-\varepsilon}} + \\
 & \quad + \sum_{i=0,1} \int_{S(P_i, \bar{r}) - S(P_i, \bar{r} - \overline{P_0 P_1})} |f(Q)| \frac{dQ}{P_i Q^{n-\varepsilon}} + \\
 & \quad + \int_{S(P_0, \bar{r}) \cdot S(P_1, \bar{r}) - S(P_0, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}) - S(P_1, \frac{1}{2} \overline{P_0 P_1})} \overline{P_0 P_1} \sum_{k=1}^{n-\varepsilon} \frac{1}{P_0 Q^k} \times \\
 & \quad \times \frac{1}{P_1 Q^{n-\frac{k}{2}+1}} |f(Q)| dQ \leq \omega^{\frac{q-1}{q}} \left[4 \left(\int_0^{\frac{3}{2} \overline{P_0 P_1}} \rho^{-(n-\varepsilon) \frac{q}{q-1} + n-1} d\rho \right)^{\frac{q-1}{q}} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left(\int_{\bar{r} - \overline{P_0 P_1}}^{\bar{r}} \rho^{-(n-\varepsilon) \frac{q}{q-1} + n-1} d\rho \right)^{\frac{q-1}{q}} + \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{P_0 P_1} \sum_{k=1}^{n-\varepsilon} \left(\int_{\frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}}^{\bar{r}} \rho^{-k \frac{2q}{q-1} + n-1} d\rho \right)^{\frac{q-1}{2q}} \left(\int_{\frac{1}{2} \overline{P_0 P_1}}^{\bar{r}} \rho^{-(n-k-\varepsilon+1) \frac{2q}{q-1} + n-1} d\rho \right)^{\frac{q-1}{2q}} \Big] \times \\
& \times \left(\int_{\bar{D}} |f(Q)|^q dQ \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \cdot \overline{P_0 P_1}^{\varepsilon - \frac{n}{q}} + M_2 \cdot \overline{P_0 P_1},
\end{aligned}$$

dove M_1, M_2 indicano delle quantità indipendenti da P_0, P_1 .

Se è $q > \frac{n}{2}$, applicando la (37) con $\varepsilon = 2$, è chiaro che l' $\int_{S(P, \bar{r})} \left(\frac{\bar{r}^{n-2} - \overline{PQ}^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{\bar{r}^2 - \overline{PQ}^2}{2 \bar{r}^2} \right) f(Q) dQ$ si può scindere nella somma di due termini verificanti uniformemente in D l'uno una condizione di HÖLDER di esponente $1 - \frac{1}{q}$ e l'altro una condizione di HÖLDER di esponente uguale al minore dei due numeri $1, 2 - \frac{n}{q}$.

D'altra parte, essendo la u sommabile, l' $\int_{S(P, \bar{r})} u(Q) dQ$ riesce una funzione di P continua in D , sicchè la (36) porta intanto di conseguenza la continuità della $u(P)$ in D , cioè in un qualsiasi dominio contenuto in A . Essendo quindi la $u(P)$ anche limitata in $\bar{D}$, è subito visto, in applicazione della (33), che l' $\int_{S(P, \bar{r})} u(Q) dQ$ verifica addirittura una condizione di LIPSCHITZ uniformemente in D , e con ciò, per (36), resta provata la prima affermazione del teorema.

Poniamoci ora nell'ipotesi $q > n$, e ricordiamo anzitutto che, in tal caso, secondo quanto abbiamo visto nel dimostrare il teor. III del n. precedente, dalla (36) segue la formola (31), dove adesso, invece di Δu , si ha f ; trasformiamo quest'ultima formola, moltiplicando primo e secondo membro per r^n e integrando rispetto a r da 0 a $\bar{r}$. Ricaviamo così

$$Du(P) = \frac{n(n+1)}{\omega \bar{r}^{n+1}} \left(\int_{S(P, \bar{r})} u(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) - \right. \\ \left. - \int_0^{\bar{r}} d\rho \int_{S(P, \rho)} \frac{\rho^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} f(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ \right).$$

Ma, dopo quanto abbiamo premesso, e in particolare applicando la (37) con $\varepsilon = 1$, è ormai chiaro che l'integrale

$$\int_{S(P, \bar{r})} u(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ$$

verifica una condizione di LIPSCHITZ, mentre l'integrale

$$\int_{S(P, \rho)} \frac{\rho^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} f(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ$$

verifica una condizione di HÖLDER di esponente $1 - \frac{n}{q}$ uniformemente in D , sicchè resta provato che anche $Du(P)$ verifica la stessa condizione di HÖLDER.

Poichè dunque, in particolare, $Du(P)$ è assolutamente continua in D , onde le derivate parziali seconde di u esistono quasi dappertutto e sono funzioni sommabili in ogni insieme chiuso contenuto in A , applichiamo alla u la (27), prendendo come funzione v la costante 1 e come dominio D il dominio sferico $S(P, \rho)$, dove P sia un punto di D e ρ sia minore della quantità $\bar{r}$ già dianzi considerata. Ciò fornisce

$$(38) \quad \int_{S(P, \rho)} \Delta u(Q) dQ = \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \rho} \rho^{n-1} d\omega.$$

Dividiamo primo e secondo membro per ρ^{n-1} , indi integriamo rispetto a ρ da 0 ad r , essendo r un'altra quantità minore di $\bar{r}$; otteniamo così

$$\int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} \int_{S(P, \rho)} \Delta u(Q) dQ = \int_{\omega} [u]_{\rho=r} d\omega - \omega u(P),$$

onde infine, moltiplicando primo e secondo membro per r^{n-1} e integrando rispetto a r da 0 ad $\bar{r}$, si trae

$$\int_0^{\bar{r}} r^{n-1} dr \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} \int_{S(P, \rho)} \Delta u(Q) dQ = \int_{S(P, \bar{r})} u(Q) dQ - \frac{\omega r^n}{n} u(P).$$

D'altra parte, un facile calcolo prova che è

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{r}} r^{n-1} dr \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} \int_{S(P, \rho)} f(Q) dQ = \\ &= \frac{\bar{r}^2}{n} \int_{S(P, \bar{r})} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{PQ}^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{PQ}^2}{2 \bar{r}^2} \right) f(Q) dQ; \end{aligned}$$

e questa relazione, sottratta dalla precedente, ove si tenga conto della (36) scritta per $r = \bar{r}$, fornisce

$$\int_0^{\bar{r}} r^{n-1} dr \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} \int_{S(P, \rho)} [\Delta u(Q) - f(Q)] dQ = 0.$$

Data l'arbitrarietà con cui possono fissarsi D ed $\bar{r}$, risulta dunque che Δu coincide quasi dappertutto in A con f , cioè resta completata la dimostrazione relativa alla seconda affermazione del teorema.

Supponiamo infine che, essendo ancora $q > n$, la f verifichi inoltre una condizione di HÖLDER nel punto P , nel senso specificato nell'enunciato del teorema. Allora, secondo quanto abbiamo visto nel dimostrare il teor. IV del n. precedente, dalla (31), dove adesso va scritto $f(Q)$ invece di $\Delta u(Q)$, segue la (34), dove va fatta la medesima sostituzione; applichiamo questa formula, prendendo le due direzioni $\bar{a}$, $\bar{a}'$ coincidenti con quella dell'asse x_i , onde risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x_i^2} &= \frac{n}{\omega r^n} \left\{ r^{n-1} \int_{\omega} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial x_i} \right]_{\rho=r} \cos(\overline{PQ}, x_i) d\omega + \right. \\ &+ \left. \int_{S(P, r)} \left(\frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^n} - \frac{r^n \cos^2(\overline{PQ}, x_i)}{\overline{PQ}^n} \right) (f(Q) - f(P)) dQ \right\}. \end{aligned}$$

Se sommiamo rispetto a i da 1 ad n tenendo conto di (38), troviamo dunque

$$\Delta u(P) = \frac{n}{\omega r^n} \int_{S(P,r)} [\Delta u(Q) - (f(Q) - f(P))] dQ,$$

cioè, essendo $f(Q)$ quasi dappertutto uguale a $\Delta u(Q)$ per quanto già si è dimostrato, concludiamo, come volevasi, che $\Delta u(P) = f(P)$.

8. TEOREMA DI CONVERGENZA.

VI. - *Siano verificate le ipotesi del teorema di unicità (n. 4) e sia $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v)}, \dots$ una successione di funzioni definite in A , ivi dotate di derivate parziali prime assolutamente continue; ciascuna $u^{(v)}$ assuma in media su FA (v. n. 1) certi valori $\varphi^{(v)}$, costituenti una funzione di p -ma potenza sommabile in T , con $p > 1$; inoltre le $\Delta u^{(v)}$ siano funzioni di q -ma potenza sommabile e le $u^{(v)}$ di q' -ma potenza sommabile in A , con $q > \frac{n}{2}$, $q' > 1$, $q' \geq q \frac{p-1}{q-1}$. Dico che, se esistono due funzioni $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ ed $f(x_1, \dots, x_n)$ rispettivamente di p -ma potenza sommabile in T e di q -ma potenza sommabile in A , tali che sia*

$$(39) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_T |\varphi^{(v)} - \varphi|^p ds_1 \dots ds_{n-1} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_A |\Delta u^{(v)} - f|^q dx_1 \dots dx_n = 0,$$

le $u^{(v)}$ convergeranno, uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A , verso una funzione u di q' -ma potenza sommabile in A , assumente in media su FA i valori φ e verificante, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , la (36) ⁽²⁴⁾. Se poi, in particolare, è $q > n$, allora anche le derivate parziali prime della $u^{(v)}$ convergeranno, uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A , verso le corrispondenti de-

⁽²⁴⁾ Nel caso $n = 2$, invece della (36) va posta la formola che si ottiene da quella data in ⁽¹⁹⁾, sostituendovi $f(Q)$ a $\Delta u(Q)$, e si ha quindi anche qualche insignificante modifica nella dimostrazione.

rivate della u , e sarà verificata quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$.

Cominciamo con l'introdurre provvisoriamente l'ulteriore ipotesi che gli $\int_A |u^{(v)}|^q dx_1 \dots dx_n$ siano superiormente limitati da una quantità indipendente da v .

Sappiamo (n. 5, teor. II) che, per ogni v , qualunque sia il dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , risulta

$$(40) \quad u^{(v)}(P) = \frac{n}{\omega r^n} \int_{S(P, r)} \left[u^{(v)}(Q) - \right. \\ \left. - \frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{PQ}^{n-2}}{(n-2) \overline{PQ}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{PQ}^2}{2r^2} \right) \Delta u^{(v)}(Q) \right] dQ.$$

Fissiamo un dominio D contenuto in A e un altro dominio $\bar{D}$ pure contenuto in A , che contenga a sua volta D nel suo interno; indicata poi con $\bar{r}$ una quantità tale che ogni dominio sferico $S(P, \bar{r})$ di raggio $\bar{r}$ e col centro in D sia contenuto in $\bar{D}$, applichiamo la (40) per due punti P_0, P_1 di D e per $r = \bar{r}$.

Dico che esisteranno due quantità positive H, h , indipendenti da P_0, P_1 in D e da v , per le quali, non appena la distanza $\overline{P_0 P_1}$ sia inferiore a una certa costante, risulterà verificata la condizione di HÖLDER

$$(41) \quad |u^{(v)}(P_1) - u^{(v)}(P_0)| < H \cdot \overline{P_0 P_1}^h;$$

ciò si riconosce, ove si applichi, da una parte, la (37) con $\Delta u^{(v)}$ in luogo di f , tenendo presente il fatto che l'integrale $\int_{\bar{D}} |\Delta u^{(v)}|^q dx_1 \dots dx_n$ è limitato superiormente da una quantità indipendente da v , per la seconda delle (39), e ove, d'altra parte, si osservi che, se $\overline{P_0 P_1} < \bar{r}$, risulta evidentemente, per ogni numero $q' > 1$,

$$\begin{aligned}
\left| \left(\int_{S(P_1, \bar{r})} - \int_{S(P_0, \bar{r})} \right) u^{(v)}(Q) dQ \right| &= \left| \left(\int_{S(P_1, \bar{r}) - S(P_0, \bar{r}) \cdot S(P_1, \bar{r})} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{S(P_0, \bar{r}) - S(P_0, \bar{r}) \cdot S(P_1, \bar{r})} \right) u^{(v)}(Q) dQ \right| \leq \\
&\leq \left(\int_{\bar{D}} |u^{(v)}(Q)|^{q'} dQ \right)^{\frac{1}{q'}} \left[\left(\int_{S(P_1, \bar{r}) - S(P_1, \bar{r}) - \overline{P_0 P_1}} dQ \right)^{\frac{q'-1}{q'}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{S(P_0, \bar{r}) - S(P_0, \bar{r}) - \overline{P_0 P_1}} dQ \right)^{\frac{q'-1}{q'}} \right],
\end{aligned}$$

onde segue che l' $\int_{S(P, \bar{r})} u^{(v)}(Q) dQ$ verifica una condizione di HÖLDER di esponente $1 - \frac{1}{q'}$ (e analogamente l' $\int_{S(P, \bar{r})} \Delta u^{(v)}(Q) dQ$ verifica una condizione di HÖLDER di esponente $1 - \frac{1}{q}$), con coefficiente indipendente da P_0 , P_1 e da v . Sicchè varrà, come si è affermato, la (41), dove h sarà il minore dei tre numeri $1 - \frac{1}{q}$, $2 - \frac{n}{q}$, $1 - \frac{1}{q'}$.

Da ciò risulta, in particolare, che le $u^{(v)}(P)$ sono equicontinue - e in maniera simile si riconosce che esse sono pure equilimitate - in ogni dominio D contenuto in A .

Indicheremo allora, di qui in avanti, con $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v)}, \dots$ non più la successione di prima, ma una sottosuccessione di essa, la quale (come può sempre ottenersi, facendo ricorso al procedimento diagonale) riesca uniformemente convergente in ogni insieme chiuso contenuto in A : sia $u(P)$ la relativa funzione limite.

Ciò posto, applichiamo la (21), e quindi la (24), con $u^{(v)} - u^{(\mu)}$ in luogo di u ; fatta la posizione

$$J^{(\mu, v)}(t) = \int_T \Pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t) |u^{(\mu)} - u^{(v)}|^p ds_1 \dots ds_{n-1},$$

dove dunque nelle $u^{(\mu)}$, $u^{(v)}$ alle $x_1, \dots, x_n$ s'intendono sostituite le funzioni (7), otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (e^{-Mt} J^{(\mu, \nu)}(t)) \leq \\ & \leq -p e^{-Mt} \int_{\tilde{D}(t)} (\Pi \alpha)_k (\Delta u^{(\mu)} - \Delta u^{(\nu)}) \frac{|u^{(\mu)} - u^{(\nu)}|^p}{u^{(\mu)} - u^{(\nu)}} dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

onde, integrando rispetto a t da t_{k+h} a t_k e moltiplicando primo e secondo membro per e^{Mt_k} , deduciamo

$$\begin{aligned} (42) \quad & J^{(\mu, \nu)}(t_k) \leq e^{M(t_k - t_{k+h})} J^{(\mu, \nu)}(t_{k+h}) - \\ & - p \int_{t_{k+h}}^{t_k} e^{M(t_k - t)} dt \int_{\tilde{D}(t)} (\Pi \alpha)_k (\Delta u^{(\mu)} - \Delta u^{(\nu)}) \frac{|u^{(\mu)} - u^{(\nu)}|^p}{u^{(\mu)} - u^{(\nu)}} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

In conseguenza di ciò, come ora mostreremo, dato un numero η positivo arbitrario, è possibile trovare un indice dipendente soltanto da η , e non da k , tale che, per ogni coppia di indici μ, ν maggiori di esso, sia $J^{(\mu, \nu)}(t_k) \leq \eta$.

Infatti, detto M' un numero, il quale superi tanto Π che i $(\Pi \alpha)_k$ (ν . ipotesi b' , d') del n. 2), sussisterà, in primo luogo, la disuguaglianza

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tilde{D}(t)} (\Pi \alpha)_k (\Delta u^{(\mu)} - \Delta u^{(\nu)}) \frac{|u^{(\mu)} - u^{(\nu)}|^p}{u^{(\mu)} - u^{(\nu)}} dx_1 \dots dx_n \right| \leq \\ & \leq M' \left(\int_1 |\Delta u^{(\mu)} - \Delta u^{(\nu)}|^q dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_1 |u^{(\mu)} - u^{(\nu)}|^{\frac{p-1}{q-1}} dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{q-1}{q}}, \end{aligned}$$

dove, dei due integrali al secondo membro, i quali sono indipendenti da t e da k , il primo tende a zero per $\mu, \nu \rightarrow \infty$, in virtù della seconda delle (39), mentre il secondo, essendosi supposto $q \frac{p-1}{q-1} \leq q'$, resta limitato, in base all'ipotesi provvisoriamente ammessa in principio della dimostrazione.

D'altra parte, in base a una nota disuguaglianza, risulterà pure

$$[J^{(\mu, \nu)}(t_{k+h})]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_T \Pi^{(k+h)} |u^{(\mu)}(x_1^{(k+h)}, \dots, x_n^{(k+h)}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi^{(\mu)}|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \Big]^\frac{1}{p} + M'^\frac{1}{p} \left[\int_T |\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\nu)}|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right]^\frac{1}{p} + \\
& + \left[\int_T \Pi^{(k+h)} |u^{(\nu)}(x_1^{(k+h)}, \dots, x_n^{(k+h)}) - \varphi^{(\nu)}|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right]^\frac{1}{p},
\end{aligned}$$

dove, al secondo membro, il secondo termine non dipende da k , nè da h , e tende a zero per $\mu, \nu \rightarrow \infty$, in virtù della prima delle (39), mentre il primo e il terzo termine tendono a zero per $h \rightarrow \infty$, in virtù dell'ipotesi che i valori $\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)}$ siano assunti in media su FA dalle funzioni $u^{(\mu)}, u^{(\nu)}$ rispettivamente.

Ma la (42) sussiste qualunque sia h , e quindi anche al limite per $h \rightarrow \infty$, sicchè, in base alle considerazioni svolte ed eseguendo questo passaggio al limite, dalla (42) si ottiene un'altra disuguaglianza, nella quale $J^{(\mu, \nu)}(t_k)$ risulta maggiorato da una quantità indipendente da k e infinitesima per $\mu, \nu \rightarrow \infty$, come appunto avevamo affermato.

Dimostrato questo punto, facendo poi tendere μ all'infinito, si deduce pure che la disuguaglianza

$$(43) \int_T \Pi^{(k)} |u^{(\nu)}(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - u(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \leq \eta$$

sussisterà, non appena l'indice ν superi una certa quantità dipendente soltanto da η e non da k .

Partendo allora dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned}
& \left(\int_T \Pi^{(k)} |u(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - \varphi|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^\frac{1}{p} \leq \\
& \leq \left(\int_T \Pi^{(k)} |u(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - u^{(\nu)}(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^\frac{1}{p} + \\
& + \left(\int_T \Pi^{(k)} |u^{(\nu)}(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - \varphi^{(\nu)}|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^\frac{1}{p} + \\
& + \left(\int_T \Pi^{(k)} |\varphi^{(\nu)} - \varphi|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^\frac{1}{p},
\end{aligned}$$

in base al fatto che $u^{(\nu)}$ assume in media i valori $\varphi^{(\nu)}$ su FA ,

dalla prima delle (39) e dalla (43) si trae

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \Pi^{(k)} |u(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - \varphi|^p ds_1 \dots ds_{n-1} = 0,$$

onde risulta intanto provata l'affermazione del teorema, secondo la quale la funzione limite u deve assumere in media i valori φ su FA .

Dalla (40) e dalla seconda delle (39) deduciamo poi che $u(P)$ verifica, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , la (36); infatti, il secondo membro di (40) tende, per $\nu \rightarrow \infty$, al secondo membro di (36), dato che le $u^{(\nu)}$ convergono alla u uniformemente in ogni dominio contenuto in A , e che sussiste la disuguaglianza

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S(P, r)} \left(\frac{r^{n-2} - \overline{P} \overline{P}^{n-2}}{(n-2) \overline{P} \overline{Q}^{n-2}} - \frac{r^2 - \overline{P} \overline{Q}^2}{2r^2} \right) (\Delta u^{(\nu)}(Q) - f(Q)) dQ \right| \leq \\ & \leq \left[\omega \int_0^r \left(\frac{r^{n-2} - \rho^{n-2}}{(n-2) \rho^{n-2}} \right)^{\frac{q}{q-1}} \rho^{n-1} d\rho \right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_A |\Delta u^{(\nu)} - f|^q dQ \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

dove l' $\int_0^r$ ha senso, giacchè, in virtù dell'ipotesi $q > \frac{n}{2}$, riesce

$$n-1 - \frac{q}{q-1} (n-2) > -1.$$

Mostriamo ora come l'ipotesi fatta in principio della dimostrazione, in aggiunta a quelle dell'enunciato, non implichi una effettiva restrizione, giacchè il supporre che essa non sia verificata, e cioè che gli $\int_A |u^{(\nu)}|^{q'} dx_1 \dots dx_n$ non siano limitati superiormente al variare di ν , condurrebbe ad un assurdo.

Infatti, indichiamo ancora con $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(\nu)}, \dots$ una successione, estratta da quella così indicata nell'enunciato del teorema, e per la quale, se è possibile, sia

$$(44) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_A |u^{(\nu)}|^{q'} dx_1 \dots dx_n = \infty.$$

Definiamo allora in A e in T due nuove successioni di funzioni $w^{(v)}$, $\phi^{(v)}$ rispettivamente, mediante le posizioni

$$w^{(v)}(P) = u^{(v)}(P) : \int_A |u^{(v)}(Q)|^{q'} dQ,$$

$$\phi^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1}) = \varphi^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1}) : \int_A |u^{(v)}(Q)|^{q'} dQ;$$

da (39) discende

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_A |\phi^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1})|^p ds_1 \dots ds_{n-1} = 0,$$

(45)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_A |\Delta w^{(v)}(Q)|^q dQ = 0, \quad \int_A |w^{(v)}(Q)|^{q'} dQ = 1,$$

mentre ciascuna $w^{(v)}$ assumerà in media su FA i corrispondenti valori $\phi^{(v)}$.

Si può allora ripetere il ragionamento svolto nella prima parte della nostra dimostrazione, applicandolo ora alla successione delle $w^{(v)}$; ne risulta la convergenza uniforme in ogni insieme chiuso contenuto in A di una successione estratta da quella delle $w^{(v)}$ verso una funzione w verificante, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , la

$$(46) \quad w(P) = \frac{n}{\omega r^n} \int_{S(P, r)} w(Q) dQ$$

e assumente in media il valore zero su FA .

Ma la (46) esprime il fatto che $w(P)$ è una funzione armonica in A , onde, per il teorema di unicità (n. 4), essa dovrà essere identicamente nulla, ciò che contraddice la terza delle (45).

Essendo dunque tutti gli $\int_A |u^{(v)}|^{q'} dQ$ inferiori a una quantità indipendente da v , sarà pure inferiore alla stessa quantità

l' $\int_D |u|^{q'} dQ$, qualunque sia il dominio D contenuto in A , sicchè la

funzione $|u|^{q'}$, essendo sempre positiva, riuscirà sommabile in A .

Resta ancora a provare che non soltanto una opportuna sottosuccessione della data successione $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$ converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A , ma che la successione assegnata medesima è convergente in tal modo.

Anche ciò è una facile conseguenza del teorema del n. 4, dato che, per quanto abbiamo visto, ogni successione estratta dalla data deve contenere una sottosuccessione uniformemente convergente in ogni dominio contenuto in A verso una soluzione del problema generalizzato di DIRICHLET, mentre, per il teorema ricordato, questo problema non può ammettere due soluzioni distinte.

Supponiamo infine che sia $q > n$. In tal caso, poichè, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , sussiste la (36), sappiamo (teor. III) che di conseguenza sussisterà anche la

$$(47) \quad \begin{aligned} Du(P) = & \frac{n}{\omega r^n} \left[r^{n-1} \int_{\omega} [u(Q)]_{\rho=r} \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) d\omega - \right. \\ & \left. - \int_{S(P, r)} \frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} f(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ \right]; \end{aligned}$$

d'altra parte, per ogni valore di ν , sarà pure verificata la (31), ove si ponga $u^{(\nu)}$ in luogo di u , cioè

$$\begin{aligned} Du^{(\nu)}(P) = & \frac{n}{\omega r^n} \left[r^{n-1} \int_{\omega} [u^{(\nu)}(Q)]_{\rho=r} \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) d\omega - \right. \\ & \left. - \int_{S(P, r)} \frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} \Delta u^{(\nu)}(Q) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ \right]. \end{aligned}$$

E dalle ultime due relazioni discende che la $Du^{(\nu)}$ converge, uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A , verso Du , dato che le $u^{(\nu)}$ convergono in tal modo alla u e che

sussiste la disuguaglianza

$$\left| \int_{S(P, r)} \frac{r^n - \overline{PQ}^n}{n \overline{PQ}^{n-1}} (\Delta u^{(v)}(Q) - f(Q)) \cos(\overline{PQ}, \mathbf{a}) dQ \right| \leq \\ \leq \left[\omega \int_0^r \left(\frac{r^n - \rho^n}{n \rho^{n-1}} \right)^{\frac{q}{q-1}} \rho^{n-1} d\rho \right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_A |\Delta u^{(v)} - f|^q dQ \right)^{\frac{1}{q}},$$

dove l' $\int_0^r$ ha senso, giacchè, in virtù dell'ipotesi $q > n$, riesce

$$n-1 - \frac{q(n-1)}{q-1} > -1.$$

Inoltre, come abbiamo visto (teor. V, 2°), dalla (47) segue che la u verifica quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$.

9. PRELIMINARI PER IL TEOREMA DI CHIUSURA.

Fissato in A un punto P_0 e dato un numero r positivo arbitrario, consideriamo, per ogni intero positivo v , la funzione $u^{(v)}$ del punto P definita in tutto lo spazio da

$$(48) \quad u^{(v)}(P; P_0, r) = g_v(\overline{P_0 P}) = \\ = \begin{cases} \int_{\frac{P_0 P}{r}}^r \left[\left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v} - 1 \right] \frac{d\rho}{\rho^{n-1}}, & \text{per } \overline{P_0 P} \leq r, \\ 0, & \text{per } \overline{P_0 P} \geq r; \end{cases}$$

essa è continua e dotata di derivate parziali prime continue in tutto lo spazio, mentre le sue derivate parziali seconde presentano una discontinuità in P_0 , nonchè attraverso la frontiera del dominio sferico $S(P_0, r)$, restando tuttavia limitate ⁽²⁵⁾.

⁽²⁵⁾ La considerazione delle funzioni $g_v(\overline{P_0 P})$ definite dalla (48) del testo si trova già, per il caso particolare $n=2$, in G. CIMMINO, *Sulle equa-*

Infatti, per $\overline{P_0 P} < r$, indicando con D, D' derivazioni rispetto al punto P nelle due direzioni arbitrariamente fissate $\mathbf{d}, \mathbf{d}'$, si trova

$$\begin{aligned} Du^{(v)} &= g'_v \cdot \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}) = - \left[\left(\frac{2 \overline{P_0 P}^n}{r^n} - 1 \right)^{2v} - 1 \right] \frac{\cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d})}{\overline{P_0 P}^{n-1}}, \\ DD' u^{(v)} &= g''_v \cdot \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}) \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}') + \\ &+ g'_v \cdot \frac{\cos(\mathbf{d}, \mathbf{d}') - \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}) \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}')}{\overline{P_0 P}} = \\ &= \left[\left(\frac{2 \overline{P_0 P}^n}{r^n} - 1 \right)^{2v} - 1 \right] \frac{n \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}) \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}') - \cos(\mathbf{d}, \mathbf{d}')}{\overline{P_0 P}^n} - \\ &- \left(\frac{2 \overline{P_0 P}^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} \cdot \frac{4v n \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}) \cos(\overline{P_0 P}, \mathbf{d}')}{r^n}. \end{aligned}$$

zioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. VII (1938), pp. 73-96, dove le funzioni stesse, posto $\rho = P_0 P_1$, vengono indicate con $g_v(\rho^2)$; per una svista, è ivi erroneamente affermato a pag. 79 che la derivata seconda di g_v si annulla per $\rho = 2$, mentre invece, in realtà, essa vale $\frac{-v}{\pi r^4}$. Colgo l'occasione per mostrare come tale svista non infirmi per nulla i risultati della detta memoria. Basta osservare che la funzione $u_n^{(v)}(x, y, h)$, ottenuta dalla $u^{(v)}(x, y)$ modificandola nella corona ellittica $r^2 \leq \rho^2 \leq r^2 + h$, col porla ivi uguale a $\frac{-v}{2\pi r^4} \left(\frac{-\rho^2 + r^2 + h}{h} \right)^n (\rho^2 - r^2)^2$, approssima uniformemente la $u^{(v)}(x, y)$ per $n \rightarrow \infty$, ed è dotata di derivate parziali prime e seconde rispetto a x e y , continue ed equilimitate, le quali, a loro volta, approssimano le corrispondenti derivate della $u^{(v)}(x, y)$. Dal fatto che la formola (12) a pag. 79 della memoria in esame sussiste per $u_n^{(v)}(x, y, h)$, qualunque siano n abbastanza grande e h abbastanza prossimo a zero, discende allora, mediante un passaggio al limite per $n \rightarrow \infty$ (con h fissato) sotto al segno d'integrale, che essa sussiste anche per la $u^{(v)}(x, y)$. Anche nella memoria citata in ⁽¹⁾, a pag. 213, è ripetuta l'erronea affermazione suddetta, circa la derivata seconda della g_v per $\rho^2 = r^2$, ma la svista rimane del pari senza conseguenze in virtù delle considerazioni ora svolte.

Ciò posto, passiamo a dimostrare il seguente lemma :

VII. - Se $f(P)$ è una funzione sommabile in A , posto $f(P) \equiv 0$ in tutti i punti P non appartenenti ad A , sarà, per P_0 quasi dappertutto in A e fatta eccezione al più pei valori r di un insieme lineare di misura nulla,

$$(49) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_A f(Q) \Delta u^{(v)}(Q; P_0, r) dQ = \frac{\omega}{n} f(P_0) - \frac{1}{n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} d\omega$$

dove s'intende che le coordinate $x_1^0, \dots, x_n^0$ di P_0 e quelle $x_1, \dots, x_n$ di Q siano legate alle $\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ dalle formole (38).

Infatti, è anzitutto

$$\begin{aligned} & \Delta u^{(v)}(P; P_0, r) = \\ & = \begin{cases} g_v'' + \frac{n-1}{P_0 \bar{P}} g_v' = \frac{-4vn}{r^n} \left(\frac{2\bar{P}_0 \bar{P}^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1}, & \text{per } \bar{P}_0 \bar{P} < r, \\ 0, & \text{per } \bar{P}_0 \bar{P} > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Se facciamo quindi, per ρ compreso fra 0 ed r , le posizioni

$$(50) \quad \alpha(\rho; P_0) = \int_0^\rho \int_{\omega} f(Q) \rho^{n-1} d\rho d\omega, \quad \beta(\rho; P_0) = \int_\rho^r \int_{\omega} f(Q) \rho^{n-1} d\rho d\omega,$$

risulterà evidentemente

$$\begin{aligned} & \int_A f(Q) \Delta u^{(v)}(Q; P_0, r) dQ = \int_{S(P_0, r)} f(Q) \Delta u^{(v)}(Q; P_0, r) dQ = \\ (51) \quad & = -\frac{4vn}{r^n} \int_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho + \frac{4vn}{r^n} \int_{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r}^r \frac{\partial \beta}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{4vn}{r^n} \alpha \cdot \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} \right]_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r} + \left[\frac{4vn}{r^n} \beta \cdot \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} \right]_{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r}^r + \\
&+ \frac{4vn}{r^n} \int_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r} \alpha \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho - \frac{4vn}{r^n} \int_{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r}^r \beta \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho,
\end{aligned}$$

laddove, come si vede, la parte integrata all'ultimo membro è zero.

Teniamo presente, ora, che, essendo $f(P)$ sommabile in A , risulterà, con eccezione al più per i punti P_0 di un insieme di misura nulla in A e per i valori r di un insieme lineare di misura nulla,

$$(52) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha(\rho; P_0)}{\rho^n} = \frac{\omega}{n} f(P_0), \quad \lim_{\rho \rightarrow r} \frac{\beta(\rho; P_0)}{r^n - \rho^n} = \frac{1}{n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} r^{n-1} d\omega.$$

Dato allora un numero ϵ positivo arbitrario e supposto che P_0 ed r non appartengano a quegli insiemi di misura nulla, nei quali, come si è detto, potrebbero non sussistere le (52), determiniamo una quantità positiva $\eta < 2^{-\frac{1}{n}} r$, tale che, preso ρ nell'intervallo $0 < \rho < \eta$, o nell'intervallo $r - \eta < \rho < r$, il rapporto $\frac{\alpha}{\rho^n}$, e corrispondentemente $\frac{\beta}{r^n - \rho^n}$, differisca in valore assoluto dal rispettivo limite, indicato in (52), per meno di ϵ .

Ciò posto, scriviamo l'ultimo membro della (51) come segue

$$\begin{aligned}
(53) \quad & \frac{4vn}{r^n} \left(\int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r} \right) \left\{ \frac{\alpha}{\rho^n} - \frac{\omega}{n} f(P_0) \right\} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho + \\
& + \frac{4vn}{r^n} \frac{\omega}{n} f(P_0) \int_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2v-1} d\rho + \frac{4vn}{r^n} \left(\int_{\frac{1}{2} \frac{1}{n} r}^{r-\eta} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{r-\eta}^r \left\{ \frac{\beta}{r^n - \rho^n} - \frac{1}{n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} r^{n-1} d\omega \right\} (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho + \\
& + \frac{4\nu}{r^n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} r^{n-1} d\omega \int_{\frac{1}{2} \frac{1}{r^n}}^r (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho.
\end{aligned}$$

Poichè nell'intervallo $\eta \leq \rho \leq r - \eta$ sussiste uniformemente la relazione di limite

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} = 0$$

e poichè la funzione $\left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1}$ è crescente, e quindi la $\frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1}$ è non negativa nell'intervallo $0 \leq \rho \leq r$, abbiamo

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \int_{\eta}^{\frac{1}{2} \frac{1}{r^n}} \left\{ \frac{\alpha}{\rho^n} - \frac{\omega}{n} f(P_0) \right\} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho = 0,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \int_{\frac{1}{2} \frac{1}{r^n}}^{r-\eta} \left\{ \frac{\beta}{r^n - \rho^n} - \frac{1}{n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} r^{n-1} d\omega \right\} (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho = 0,$$

(54)

$$\begin{aligned}
& \left| \nu \int_0^{\eta} \left\{ \frac{\alpha}{\rho^n} - \frac{\omega}{n} f(P_0) \right\} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho \right| < \varepsilon \nu \int_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{r^n}} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho, \\
& \left| \nu \int_{r-\eta}^r \left\{ \frac{\beta}{r^n - \rho^n} - \frac{1}{n} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} r^{n-1} d\omega \right\} (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho \right| < \\
& < \varepsilon \nu \int_{\frac{1}{2} \frac{1}{r^n}}^r (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho.
\end{aligned}$$

D'altra parte, è

$$\begin{aligned} \nu \int_0^{2^{-\frac{1}{n}}r} \rho^n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho &= \left[\nu \rho^n \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} - \frac{r^n}{4} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu} \right]_0^{2^{-\frac{1}{n}}r} = \frac{r^n}{4}, \\ \nu \int_{2^{-\frac{1}{n}}r}^r (r^n - \rho^n) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} d\rho &= \left[\nu r^n \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} - \right. \\ &\quad \left. - \nu \rho^n \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu-1} + \frac{r^n}{4} \left(\frac{2\rho^n}{r^n} - 1 \right)^{2\nu} \right]_{2^{-\frac{1}{n}}r}^r = \frac{r^n}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto, dalla (51), ove se ne scriva il secondo membro nella forma (53) prendendo ν abbastanza grande affinchè si riducano in valor assoluto minori di ϵ le due espressioni sotto al segno di limite in (54), si deduce che l' $\int_A f(Q) \Delta u^{(\nu)}(Q; P_0, r) dQ$

differisce dal secondo membro di (49) in valore assoluto per meno di 4ϵ . E ciò, per l'arbitrarietà di ϵ , prova l'assunto.

Vogliamo ora stabilire una proposizione analoga alla precedente e relativa ai punti P_0 di FA , anzichè a quelli di A . Diremo che in un punto P_0 di FA l'insieme A ha una densità $\delta(P_0)$, se il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A \cdot S(P_0, r)} dQ : \int_{S(P_0, r)} dQ$$

esiste ed è uguale a $\delta(P_0)$. Ciò posto, ecco il lemma annunciato :

VIII. - Se P_0 è un punto di FA , in cui A ha la densità $\delta(P_0)$, se $f(P)$ è una funzione sommabile in A e se $f(P)$ tende a un limite determinato e finito, che chiameremo $f(P_0)$, per $P \rightarrow P_0$ nell'insieme che si ottiene da A togliendone eventualmente i punti di un opportuno insieme di misura nulla, posto $f(P) \equiv 0$ in tutti i punti P non appartenenti ad A , sarà, fatta eccezione al più pei valori r di un insieme lineare di misura nulla,

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \lim_{v \rightarrow \infty} \int_A f(Q) \Delta u^{(v)}(Q; P_0, r) dQ = \\
 & = \frac{\omega}{n} \delta(P_0) f(P_0) - \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} d\omega.
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è perfettamente identica a quella del teor. VII; soltanto, la funzione $\alpha(\rho; P_0)$ definita dalla prima delle (50) verificherà ora la seguente relazione di limite

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha(\rho; P_0)}{\rho^n} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{A \cdot S(P_0, \rho)} f(Q) dQ}{\int_{A \cdot S(P_0, \rho)} dQ} \cdot \frac{\int_{A \cdot S(P_0, \rho)} dQ}{\int_{S(P_0, \rho)} dQ} \\
 &= \frac{\int_{S(P_0, \rho)} dQ}{\rho^n} = \frac{\omega}{n} \delta(P_0) f(P_0),
 \end{aligned}$$

anzichè quella indicata in (52).

10. ULTERIORI IPOTESI PER I TEOREMI DI CHIUSURA E DI ESISTENZA.

Per la dimostrazione dei teoremi di chiusura e di esistenza a cui perverremo fra poco, ci occorreranno, oltre a quelle precedentemente formulate (n. 2), alcune altre ipotesi di natura molto generale. Supporremo anzitutto che:

e) sia dappertutto denso su FA l'insieme dei punti P_0 in cui esiste, ed è minore di 1, o la densità di A , oppure quella di un insieme aperto contenuto in A , la cui frontiera sia formata esclusivamente da una porzione di FA e, per un certo valore di r , da una porzione di $FS(P_0, r)$.

Così, per esempio, la condizione e) sarà soddisfatta, se A è l'insieme che si ottiene togliendo da quello dei punti $x_1, \dots, x_n$ interni al dominio sferico $S(0, 2)$ quello dei punti aventi la $x_n = 0$ e una distanza da 0 non superiore ad 1, sebbene questi ultimi siano tutti punti di FA , in cui la densità di A è 1.

Invece, la condizione e) non sarà soddisfatta, se A è l'insieme che si ottiene togliendo da quello dei punti $x_1, \dots, x_n$ interni al dominio sferico $S(0, 2)$ quello dei punti aventi le $x_{n-1} = x_n = 0$ e una distanza da 0 non superiore ad 1.

Avremo poi da considerare degl'integrali del tipo

$$(56) \quad G_\lambda(P_0) = \int_T \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_0 \bar{P}^\lambda} = \int_T \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{\left[\sum_{i=1}^n \{x_i(s_1, \dots, s_{n-1}) - x_i^0\}^2 \right]^{\frac{\lambda}{2}}}$$

dove λ indica un numero positivo.

Quando il punto P_0 , di coordinate x_i^0 , si mantiene in A , oppure esterno ad A , $G_\lambda(P_0)$ è una funzione continua, anzi addirittura analitica, di P_0 . Orbene, a noi interessa che $G(P_0, \lambda)$, almeno per un valore di $\lambda > n-2$, resti continua anche quando P_0 attraversa la frontiera di A . Supporremo a tal uopo che:

f) per un certo valore $\lambda > n-2$, e per ogni punto P_1 di FA , dato un numero $\epsilon > 0$ arbitrario e detto $T(P_1, \delta)$ l'insieme dei punti $(s_1, \dots, s_{n-1})$ di T tali che il punto $x_i(s_1, \dots, s_{n-1})$ di FA abbia da P_1 una distanza minore di δ , risulti, non appena si prenda δ inferiore a un'opportuna quantità δ_ϵ , e qualunque sia P_0 ,

$$(57) \quad \int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{\left[\sum_{i=1}^n \{x_i(s_1, \dots, s_{n-1}) - x_i^0\}^2 \right]^{\frac{\lambda}{2}}} < \epsilon.$$

In base a quest'ipotesi, è facile vedere che:

IX. — La funzione $G_\lambda(P_0)$ definita da (56) è continua in tutto lo spazio, per ogni valore di λ che sia minore di una certa quantità $\lambda_0 > n-2$.

In primo luogo, infatti, come già abbiamo osservato, è manifesta la continuità di $G_\lambda(P_0)$, qualunque sia λ , nei punti P_0 non appartenenti a FA . Supponiamo poi che valga l'ipotesi f) e, fissato ad arbitrio un punto P_1 su FA , prendiamo, per un dato ϵ , una quantità positiva $\delta < \delta_\epsilon$. È chiaro che, se P_0 è

abbastanza prossimo a P_1 , sarà

$$\left| \int_{T - T(P_1, \delta)} \left(\frac{1}{P_1 P^\lambda} - \frac{1}{P_0 P^\lambda} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} \right| < \varepsilon;$$

e poichè, d'altra parte, la (57) vale qualunque sia P_0 , in particolare anche per $P_0 \equiv P_1$, riuscirà pure

$$\begin{aligned} \left| \int_{T(P_1, \delta)} \left(\frac{1}{P_1 P^\lambda} - \frac{1}{P_0 P^\lambda} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} \right| &\leq \int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_1 P^\lambda} + \\ &+ \int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_0 P^\lambda} < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

onde si conclude che, per tutti i punti P_0 aventi da P_1 una distanza sufficientemente prossima a zero, risulta $|G_\lambda(P_1) - G_\lambda(P_0)| < 3\varepsilon$, ciò che, per l'arbitrarietà di ε , prova la continuità di $G_\lambda(P_0)$ nel punto P_1 di FA .

Notiamo infine che, per $\delta < 1$, il primo membro di (57) decresce evidentemente col decrescere di λ , sicchè, se la condizione enunciata in f) sussiste per un certo valore di λ , essa sussisterà a più forte ragione per un valore più piccolo di λ . E ciò prova l'esistenza della quantità λ_0 , di cui è parola nell'enunciato del teorema.

X. - Se $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ è una funzione di $p/p-1$ -ma potenza sommabile in T , l'integrale

$$\int_T \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_0 P^{n-2}}$$

è una funzione di P_0 continua in tutto lo spazio, purchè p sia abbastanza prossimo all'unità ($p > 1$).

Ciò risulta da un ragionamento simile a quello della precedente dimostrazione. Infatti, se P_1 è un punto di FA , presa, per un dato ε , un quantità positiva $\delta < \delta_\varepsilon$ è detto ancora $T(P_1, \delta)$ l'insieme così indicato in f), sarà

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{T(P_1, \delta)} \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \left(\frac{1}{P_0 P^{n-2}} - \frac{1}{P_1 P^{n-2}} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} \right| \leq \\
& \leq \left(\int_T |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_1 P^{p(n-2)}} \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{P_0 P^{p(n-2)}} \right)^{\frac{1}{p}} \right],
\end{aligned}$$

dove gl'integrali fra [] al secondo membro risulteranno minori di ε , purchè p sia tale che risulti $p(n-2) < \lambda_0$.

Ci occorrerà da ultimo ancora l'ipotesi che:

g) l'insieme delle funzioni

$$(58) \quad u(s_1, \dots, s_{n-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x_1^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1})),$$

che si ottengono in corrispondenza di tutte le funzioni $u(x_1, \dots, x_n)$ continue e dotate di derivate parziali prime uniformemente lipschitziane in A , tali che la successione $u(x_1^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1}))$, ($k = 1, 2, \dots$) riesca uniformemente limitata e convergente in T , sia *chiuso*, cioè tale che una funzione $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ sommabile in T non possa verificare, per tutte le funzioni $u(s_1, \dots, s_{n-1})$ del detto insieme la relazione di ortogonalità

$$\int_T \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) u(s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0,$$

senza essere quasi dappertutto uguale a zero in T .

L'ipotesi g) non sarebbe, per esempio, verificata, se le funzioni $x_i(s_1, \dots, s_{n-1})$, per $i = 1, 2, \dots, n$, fossero tutte costanti su un insieme di misura non nulla contenuto in T .

11. TEOREMA DI CHIUSURA.

Per ogni coppia p, q di numeri maggiori dell'unità, indicheremo con Σ_{pq} lo spazio funzionale formato dalle coppie

$\{\varphi(s_1, \dots, s_{n-1}), f(x_1, \dots, x_n)\}$, con φ ed f rispettivamente di p -ma e di q -ma potenza sommabile in T e in A , laddove assumeremo come *norma* della $\{\varphi, f\}$ la

$$(59) \quad |\varphi, f| = \left(\int_T |\varphi|^p ds_1 \dots ds_{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |f|^q dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chiameremo poi Σ^* quel sottospazio di Σ_{pq} , che è costituito da tutte le coppie $\{u(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta u\}$, dove $u(x_1, \dots, x_n)$ sia una funzione verificante le condizioni specificate nell'ipotesi $g)$ del n. precedente, che assuma su FA i valori $u(s_1, \dots, s_{n-1})$, secondo la relazione di limite (58), onde i valori $u(s_1, \dots, s_{n-1})$ saranno anche assunti in media, nel senso specificato nel n. 1, dalla u su FA .

XI. - *Supposto che $\{\varphi, f\}$ sia un punto di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}, \frac{q}{q-1}}$, tale che, per ogni punto di Σ^* , riesca*

$$(60) \quad \int_T \varphi u ds_1 \dots ds_{n-1} + \int_A f \Delta u dx_1 \dots dx_n = 0,$$

dico che, almeno per p abbastanza prossimo all'unità, φ ed f dovranno annullarsi quasi dappertutto in T e in A rispettivamente.

Infatti, in primo luogo, osserviamo che tutte le funzioni $u^{(\nu)}(P; P_0, r)$ definite da (48), qualunque siano l'intero positivo ν , il punto P_0 e il numero positivo r , sono, secondo quanto abbiamo visto nel n. 9, continue e dotate di derivate parziali prime uniformemente lipschitziane in ogni insieme limitato dello spazio $x_1, \dots, x_n$. Pertanto, per ognuna delle $u^{(\nu)}(P; P_0, r)$, la coppia $\{u^{(\nu)}(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta u^{(\nu)}\}$ sarà un punto di Σ^* .

Ora, dalla (60), ove si sostituisca $u^{(\nu)}(P; P_0, r)$ ad u , scegliendo r in modo che l'insieme A risulti interno ad $S(P_0, r)$, qualunque sia P_0 in A , e ove si passi poi al limite per $\nu \rightarrow \infty$, discende, in base al teor. VII, per P_0 quasi dappertutto in A ,

$$(61) \quad f(P_0) - \frac{n}{\omega} \int_T \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \cdot \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{P_0 P^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0,$$

dove le coordinate del punto P sono le $x_1(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n(s_1, \dots, s_{n-1})$.

Ne segue, in base al teor. X, che, almeno per p abbastanza prossimo all'unità, $f(P)$ coincide quasi dappertutto in A con una funzione continua in tutto lo spazio, che indicheremo con $\bar{f}(P)$, onde, pur sostituendo $\bar{f}(P)$ ad $f(P)$, sussisterà ancora la (60). Inoltre $\bar{f}(P)$ verifica la (61) in ogni punto P_0 di A , sicchè si vede che essa è una funzione armonica in A ; ciò si può dedurre, del resto, anche dalla (60) stessa, ove si sostituisca $\bar{f}$ ad f e $u^{(\nu)}(P; P_0, r)$ ad u , scegliendo r in modo che $S(P_0, r)$ risulti interno ad A , e ove si passi poi al limite per $\nu \rightarrow \infty$, perchè in tal modo si ricava, sempre in base al teor. VII,

$$\bar{f}(P_0) - \frac{1}{\omega} \int_{\omega} [\bar{f}(Q)]_{\rho=r} d\omega = 0,$$

cioè si trova che $\bar{f}(P)$ verifica la proprietà di media caratteristica delle funzioni armoniche.

Vogliamo ora provare che la $\bar{f}(P)$ si annulla identicamente su FA . In un punto P_1 di FA , nel quale A abbia una densità $\delta(P_1) < 1$, è chiaro che deve essere $\bar{f}(P_1) = 0$, perchè, se si applica la (60), ove si sostituisca $\bar{f}$ ad f e $u^{(\nu)}(P; P_0, r)$ ad u , scegliendo r in modo che A risulti interno a $S(P_0, r)$, ove si passi al limite, per $\nu \rightarrow \infty$, si ottiene, in base al teor. VIII,

$$(62) \quad \delta(P_1) \bar{f}(P_1) - \frac{n}{\omega} \int_T \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \cdot \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{P_1 P^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0.$$

D'altra parte, poichè la (61) sussiste, con $\bar{f}$ in luogo

di f , per ogni punto P_0 di A , e poichè la funzione $\bar{f}$ è continua anche su FA , si potrà passare al limite per $P_0 \rightarrow P_1$ in quella relazione, sostituendovi semplicemente P_1 a P_0 , onde, confrontando poi con (62), si deduce, come volevasi, $\bar{f}(P_1) = 0$.

Se invece è $\delta(P_1) = 1$, questo ragionamento non vale più. Se, in tal caso, supponiamo tuttavia che ogni dominio sferico $S(P_1, r)$ di centro P_1 e di raggio r sufficientemente prossimo a zero, contenga una porzione di FA , la quale divida in due o più parti, prive due a due di punti comuni, l'insieme $A \cdot S(P_1, r)$ una di queste parti avendo in P_1 una densità $\delta(P_1) < 1$, allora possiamo dimostrare che risulterà parimenti $\bar{f}(P_1) = 0$.

Infatti, secondo l'ipotesi ora enunciata, essendo R una certa quantità positiva, esisterà, per ogni $r \leq R$, un insieme A_r di punti di A interni a $S(P_1, r)$, per cui si avrà: 1°) che $A_r < A_{r'}$, ogni qualvolta $r < r'$, 2°) che la frontiera FA_r sarà composta esclusivamente da una porzione di FA e da una porzione di $FS(P_1, r)$, 3°) che A_r sarà dotato in P_1 di una densità $\delta(P_1) < 1$.

Fissato un numero r positivo e minore di R , facciamo variare P_0 soltanto in A_{R-r} , onde il dominio sferico $S(P_0, r)$ non conterrà mai punti esterni a $S(P_1, R)$. Definiamo poi una funzione $v^{(v)}(P; P_0, r)$ in A , ponendola uguale alla $u^{(v)}(P; P_0, r)$ definita da (48), nei punti P di $A_r \cdot S(P_0, r)$ e uguale a zero in tutti i rimanenti punti P di A . Evidentemente la $v^{(v)}$ è tale che la coppia $\{v^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta v^{(v)}\}$ riuscirà un punto di Σ^* . Se allora applichiamo la (60) con $\bar{f}$ in luogo di f e $v^{(v)}$ in luogo di u , e poi passiamo al limite per $v \rightarrow \infty$, ricaviamo

$$(63) \quad \bar{f}(P) - \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left[\bar{f}(Q) \right]_{Q \in A_r}^{\rho=r} d\omega -$$

$$- \frac{n}{\omega} \int_{T_r(P_0)} \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \cdot \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{\rho_0 \rho^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0,$$

dove con $T_r(P_0)$ abbiamo indicato quella porzione del dominio base T , in cui $v^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1})$ non è zero.

Dopo di che, il ragionamento si completa come nel caso

precedente: si ricava, cioè, la formula analoga alla (63), relativa al punto P_1 anzichè al punto P_0 ; questa differisce dalla (62), non soltanto perchè al posto di P_0 vi si trova P_1 , ma anche perchè, come primo termine, invece di $\bar{f}(P_1)$, vi figura $\delta(P_1)\bar{f}(P_1)$, onde il confronto con la relazione che si ottiene da (61) facendo tendere P_0 a P_1 conduce alla conclusione voluta $\bar{f}(P_1) = 0$.

Ciò posto, per la continuità della $\bar{f}$, è chiaro come l'ipotesi e) del n. 10 porti di conseguenza l'annullarsi identicamente della $\bar{f}$ su FA , e quindi anche (trattandosi, come si è visto, di una funzione armonica) in tutto A .

Allora vuol dire che la f è quasi dappertutto uguale a zero in A , onde dalla (60), per l'arbitrarietà di u e per l'ipotesi g) del n. 10, discende che anche la φ è quasi dappertutto uguale a zero in T .

12. TEOREMA DI ESISTENZA.

XII. — *Siano verificate le ipotesi del teorema di unicità (n. 4) e inoltre le ipotesi e), f), g) (n. 10), e siano $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ e $f(x_1, \dots, x_n)$ due funzioni rispettivamente di p -ma e di q -ma potenza sommabile in T e in A , con $p > 1$, $q > \frac{n}{2}$. Esiste allora una funzione $u(x_1, \dots, x_n)$, ed una sola, di q' -ma potenza sommabile in A , per ogni $q' > 1$, che assume in media i valori φ su FA , e che, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , verifica la (36). Se, in particolare, è $q > n$, la u sarà dotata di derivate parziali prime uniformemente hölderiane in ogni dominio D contenuto in A e verificherà quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$.*

Infatti, in base al teor. XI, possiamo affermare che, almeno per p abbastanza prossimo all'unità, lo spazio funzionale lineare Σ^* è denso in Σ_{pq} , cioè, mediante una successione di punti $\{u^{(v)}(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta u^{(v)}\}$ di Σ^* si può approssimare, secondo la metrica definita da (59), ogni punto $\{\varphi, f\}$ di Σ_{pq} .

Poichè la $u^{(v)}$ è limitata, e quindi anche di q' -ma potenza sommabile per ogni $q' > 1$, e assume in media i valori cui essa si riduce al contorno secondo un qualsiasi esponente (ordine

della convergenza in media) $p' > 1$, rispetto a successioni qualsivogliano di domini $D^{(k)}$, di rappresentazioni parametriche per le $FD^{(k)}$ e di funzioni peso $\Pi^{(k)}$, il teorema di convergenza (n. 8) ci assicura allora che la funzione limite $u(x_1, \dots, x_n)$ sarà di q' -ma potenza sommabile in A , per ogni $q' > 1$, e assumerà in media i valori φ , secondo un esponente p' abbastanza prossimo all'unità, comunque si fissino quei domini, quelle rappresentazioni parametriche e quelle funzioni peso, purchè, naturalmente, soddisfacenti alle ipotesi menzionate.

Si osservi che in ciò non occorre fare nessuna restrizione sull'ordine di sommabilità p della data funzione φ , perchè, se $|\varphi|^p$ è sommabile, tale sarà pure $|\varphi|^{p'}$, per ogni p' compreso fra 1 e p . Soltanto, la soluzione u da noi trovata assumerà in media i valori φ su FA , secondo un esponente, che in generale non sarà p , ma un numero minore p' , abbastanza prossimo all'unità.

È interessante porre in rilievo il fatto che il valore assunto in un punto $x_1, \dots, x_n$ arbitrariamente fissato in A , dalla soluzione u di cui abbiamo provata l'esistenza, riuscirà un funzionale lineare definito in Σ_{pq} , esso ammetterà dunque un'espressione del tipo

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_T \Gamma(x_1, \dots, x_n; s_1, \dots, s_{n-1}) \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} + \\ + \int_A H(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n) f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

dove, per fissati valori delle $x_1, \dots, x_n$, le Γ ed H , pensate come funzioni delle $s_1, \dots, s_{n-1}$ e delle $\xi_1, \dots, \xi_n$ rispettivamente, costituiranno un punto di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}, \frac{q}{q-1}}$.

Inoltre, per la dimostrata indipendenza della u dai $D^{(k)}$, dalle rappresentazioni parametriche delle $FD^{(k)}$ e dalle $\Pi^{(k)}$ subordinate alle nostre ipotesi fondamentali, l' $\int_E \Gamma(x_1, \dots, x_n; s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1}$, per ogni insieme misurabile E contenuto in T , sarà invariante rispetto ad ogni trasformazione dei parametri $s_1, \dots, s_{n-1}$ compatibile con le ipotesi medesime e la $H(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ dipenderà soltanto dall'insieme A .

13. ESEMPLI.

Dato l'insieme aperto A , la determinazione di un sistema di funzioni $x_i^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1})$, $\Pi^{(k)}(s_1, \dots, s_{n-1})$, tali che si possano rendere soddisfatte le ipotesi fondamentali del n. 2, quelle dei teoremi di unicità e di convergenza (n. 4) e quelle occorrenti per i teoremi di chiusura e di esistenza (n. 10), presenta un notevole grado di arbitrarietà. Per il caso di $n=2$, nella memoria citata in ⁽¹⁾, sono state già indicate diverse maniere di scegliere nel modo voluto le dette funzioni. Ci porremo ora nel caso $n=3$, e da ciò apparirà chiaro come possano trattarsi esempi analoghi anche per $n > 3$.

1) Supponiamo che la frontiera dell'insieme A 1°) consti di un numero finito $m+1 \geq 1$ di superficie semplici chiuse prive due a due di punti comuni, 2°) ammetta una rappresentazione parametrica di dominio base $T = T_0 + T_1 + \dots + T_m$ (con le convenzioni del n. 1)

$$x = \bar{x}(s_1, s_2), \quad y = \bar{y}(s_1, s_2), \quad z = \bar{z}(s_1, s_2),$$

dove le $\bar{x}(s_1, s_2)$, $\bar{y}(s_1, s_2)$, $\bar{z}(s_1, s_2)$ e le loro derivate parziali dei primi tre ordini siano continue in T e costanti su ogni contorno componente la frontiera di ciascun T_h , 3°) abbia in ogni punto curvature principali $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ variabili con continuità.

Per ogni punto xyz di A , sia $\tau(x, y, z)$ la distanza che esso ha dalla frontiera di A , e sia $\mu(\tau)$ una funzione di τ nulla per $\tau=0$, dotata di derivate dei primi due ordini continue, con derivata prima sempre positiva. Porremo $t = \mu(\tau)$ e indicheremo con $\tau = \lambda(t)$ la relativa funzione inversa. Rappresentando poi con $\xi(s_1, s_2)$, $\eta(s_1, s_2)$, $\zeta(s_1, s_2)$ i coseni direttori della normale interna su FA , definiamo le $x(s_1, s_2, t)$, $y(s_1, s_2, t)$, $z(s_1, s_2, t)$ come segue

$$\begin{aligned} x(s_1, s_2, t) &= \bar{x}(s_1, s_2) + \lambda(t) \xi(s_1, s_2), \\ y(s_1, s_2, t) &= \bar{y}(s_1, s_2) + \lambda(t) \eta(s_1, s_2), \\ z(s_1, s_2, t) &= \bar{z}(s_1, s_2) + \lambda(t) \zeta(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Detto $\frac{1}{\gamma}$ il massimo del valore assoluto delle curvature principali su FA , sia δ un numero tale che, per ogni t positivo $\leq \delta$, risulti $\tau = \lambda(t) < \gamma$, e quindi anche $\frac{\lambda(t)}{|R_1|} < 1$, $\frac{\lambda(t)}{|R_2|} < 1$. Presa una successione di valori t_k positivi, minori di δ , convergenti a zero ($k = 1, 2, \dots$), definiremo le $x^{(k)}(s_1, s_2)$, $y^{(k)}(s_1, s_2)$, $z^{(k)}(s_1, s_2)$ come le funzioni cui si riducono le $x(s_1, s_2, t)$, $y(s_1, s_2, t)$, $z(s_1, s_2, t)$ rispettivamente, per $t = t_k$.

Per la matrice (5) e il determinante (6), nel caso presente si trova, dando a E , F , G il significato abituale,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial s_1}, & \frac{\partial y}{\partial s_1}, & \frac{\partial z}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x}{\partial s_2}, & \frac{\partial y}{\partial s_2}, & \frac{\partial z}{\partial s_2} \end{array} \right\|^2 &= \left\| \begin{array}{ccc} \bar{x}_{s_1} + \lambda \xi_{s_1}, & \bar{y}_{s_1} + \lambda \eta_{s_1}, & \bar{z}_{s_1} + \lambda \zeta_{s_1} \\ \bar{x}_{s_2} + \lambda \xi_{s_2}, & \bar{y}_{s_2} + \lambda \eta_{s_2}, & \bar{z}_{s_2} + \lambda \zeta_{s_2} \end{array} \right\|^2 = \\ &= (EG - F^2) \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_2}\right)^2, \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s_1, s_2, t)} &= \begin{vmatrix} \bar{x}_{s_1} + \lambda \xi_{s_1}, & \bar{y}_{s_1} + \lambda \eta_{s_1}, & \bar{z}_{s_1} + \lambda \zeta_{s_1} \\ \bar{x}_{s_2} + \lambda \xi_{s_2}, & \bar{y}_{s_2} + \lambda \eta_{s_2}, & \bar{z}_{s_2} + \lambda \zeta_{s_2} \\ \lambda' \xi, & \lambda' \eta, & \lambda' \zeta \end{vmatrix} = \\ &= \lambda' \sqrt{EG - F^2} \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_2}\right). \end{aligned}$$

Pertanto è chiaro che sono verificate le condizioni $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ del n. 2.

Posto inoltre (indicando con α la quantità definita da (8))

$$\begin{aligned} \Pi(s_1, s_2, t) &= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lambda'} \sqrt{EG - F^2} \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda(t)}{R_2}\right), \\ \Pi^{(k)}(s_1, s_2) &= \Pi(s_1, s_2, t_k), \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

si vede pure che sono manifestamente verificate le condizioni $a')$, $b')$, $c')$, $d')$ del n. 2, nonchè la condizione 1°) del teorema

di unicità (n. 4), mentre il primo membro della (23) diventa

$$\lambda'^2 \Delta t = \frac{-\lambda''}{\lambda'} - \lambda' \cdot \left(\frac{1}{R_1 - \lambda} + \frac{1}{R_2 - \lambda} \right),$$

sicchè resta certo limitato superiormente, in base alle ipotesi fatte su $\lambda(t)$ e per il modo come abbiamo determinato l'estremo superiore δ dell'intorno destro dello zero, in cui deve variare t .

Passiamo ora alle condizioni del n. 10. La *e*) riesce evidentemente verificata, perchè in ogni punto di FA esiste il piano tangente, e quindi la densità di A vale $\frac{1}{2}$.

Sia poi $\bar{x}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, $\bar{y}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, $\bar{z}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ un fissato punto P_1 di FA ; detta δ una quantità positiva e λ una costante ⁽²⁶⁾ maggiore di uno, indichiamo con $T(P_1, \delta)$ l'insieme dei punti di D , al quale corrisponde quello di tutti i punti di FA aventi da P_1 una distanza minore di δ , e consideriamo, per un qualsiasi punto x_0, y_0, z_0 , l'integrale

$$\int_{T(P_1, \delta)} \frac{ds_1 ds_2}{\left[x(s_1, s_2) - x_0 \right]^2 + \left[y(s_1, s_2) - y_0 \right]^2 + \left[z(s_1, s_2) - z_0 \right]^2}^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Esso rappresenta una funzione di x_0, y_0, z_0 analitica in tutto lo spazio, fuorchè nei punti di FA aventi da P_1 una distanza $\leq \delta$, e nulla all'infinito; poichè questa funzione è positiva e ha un laplaciano sempre positivo, essa non può raggiungere il suo estremo superiore che sulla frontiera del suo campo di analicità. Ma quando x_0, y_0, z_0 tende a un punto $x(\sigma_1, \sigma_2)$, $y(\sigma_1, \sigma_2)$, $z(\sigma_1, \sigma_2)$ di FA avente da P_1 una distanza $\leq \delta$, la funzione integranda, per tutti i punti s_1, s_2 distinti da σ_1, σ_2 , tende, restando sempre positiva, a una funzione, che, per $\lambda < 2$, è integrabile; infatti dalle nostre ipotesi segue che $EG - F^2$ dev'essere inferiormente limitato da una quantità positiva, e quindi, almeno per δ abbastanza prossimo a zero, che il rapporto

⁽²⁶⁾ Da non confondersi con la funzione $\lambda(t)$ considerata più sopra.

$$\frac{(s_1 - \sigma_1)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2}{\{x(s_1, s_2) - x(\sigma_1, \sigma_2)\}^2 + \{y(s_1, s_2) - y(\sigma_1, \sigma_2)\}^2 + \{z(s_1, s_2) - z(\sigma_1, \sigma_2)\}^2}$$

dev'essere limitato superiormente. Dopo di che, è chiaro che è verificata pure l'ipotesi $f)$ del n. 10.

Infine, per riconoscere che vale anche la condizione $g)$ del n. 10, basta osservare che, preso ad arbitrio un cerchio $(s_1 - \sigma)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2 \leq \rho^2$, di raggio ρ minore del numero γ considerato poc' anzi, e contenuto in T , la funzione $u(x, y, z)$ che è uguale ad $\exp \frac{\tau^2}{(s_1 - \sigma_1)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2 + \tau^2 - \rho^2}$, nei punti x, y, z per cui $(s_1 - \sigma_1)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2 + \tau^2 < \rho^2$, $\tau > 0$, ed è uguale a zero in tutti i rimanenti punti di A , riesce dotata di derivate parziali prime e seconde continue in A e assume in media su FA i valori zero, per $(s_1 - \sigma_1)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2 > \rho^2$, e uno, per $(s_1 - \sigma_1)^2 + (s_2 - \sigma_2)^2 < \rho^2$.

II) Supponiamo che A sia l'insieme dei punti x, y, z , per cui $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$, $-\pi < z < \pi$.

Assumiamo come dominio $D^{(k)}$ quello delimitato dalla superficie di equazione $\sin x \sin y \sin z = t_k$, dove $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ sia una successione decrescente e convergente a zero di quantità minori di uno. Poniamo $t = \sin x \sin y \sin z$, per ogni valore $t < 1$, e rappresentiamo parametricamente la superficie che ha questa equazione nello spazio x, y, z , mediante le

$$x = \rho \frac{s_1 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad y = \rho \frac{s_2 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad z = \rho \cos \sqrt{s_1^2 + s_2^2},$$

$$0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2,$$

dove $\rho = \rho(s_1, s_2, t)$ rappresenti la funzione definita implicitamente dalla

$$\sin \left(\rho \frac{s_1 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \right) \sin \left(\rho \frac{s_2 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \right) \sin (\rho \cos \sqrt{s_1^2 + s_2^2}) = t.$$

Per la matrice (5) e il determinante (6) si trova allora

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial s_1}, \frac{\partial y}{\partial s_1}, \frac{\partial z}{\partial s_1} \right\|^2 = \rho^6 \frac{\sin^2 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_1^2 + s_2^2}.$$

$$\frac{\cos^2 x \sin^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \cos^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \sin^2 y \cos^2 z}{(x \cos x \sin y \sin z + y \sin x \cos y \sin z + z \sin x \sin y \cos z)^2},$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s_1, s_2, t)} = \rho^3 \frac{\sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

$$\frac{1}{x \cos x \sin y \sin z + y \sin x \cos y \sin z + z \sin x \sin y \cos z}.$$

Sono quindi verificate le condizioni $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ del n. 2, e inoltre, se, indicando con α la quantità definita da (8), poniamo

$$\Pi(s_1, s_2, t) = \frac{1}{\alpha} = \rho^3 \frac{\sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

$$\frac{\cos^2 x \sin^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \cos^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \sin^2 y \cos^2 z}{x \cos x \sin y \sin z + y \sin x \cos y \sin z + z \sin x \sin y \cos z},$$

$$\Pi^{(k)}(s_1, s_2) = \Pi(s_1, s_2, t_k), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

saranno pure verificate le condizioni $a')$, $b')$, $c')$, $d')$ del n. 2, nonchè la condizione 1^o del teorema di unicità (n. 4), mentre il primo membro della (23) diventerà

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Pi} \Delta t \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s_1, s_2, t)} = \\ & = \frac{-3 \sin x \sin y \sin z}{\cos^2 x \sin^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \cos^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \sin^2 y \cos^2 z}, \end{aligned}$$

e sarà quindi < 0 in tutto A .

Per riconoscere che sono verificate anche le condizioni $e)$, $f)$, $g)$ del n. 10, basta svolgere considerazioni perfettamente simili a quelle fatte a proposito dell'esempio precedente.

III) Supponiamo che A sia l'insieme costituito da tutti quei punti $x y z$ interni all'ellissoide $\frac{x^2}{a^2+1} + \frac{y^2}{b^2+1} + z^2 = 1$, per cui non è contemporaneamente $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, z = 0$.

Assumiamo come dominio $D^{(A)}$ quello delimitato dai due ellissoidi omofocali $\frac{x^2}{a^2+t_k^2} + \frac{y^2}{b^2+t_k^2} + \frac{z^2}{t_k^2} = 1, \frac{x^2}{a^2+(1-t_k)^2} + \frac{y^2}{b^2+(1-t_k)^2} + \frac{z^2}{(1-t_k)^2} = 1$, dove $t_1, t_2, \dots, t_h, \dots$ sia una successione decrescente e convergente a zero di quantità minori di $\frac{1}{2}$.

Poniamo, per t positivo e minore di $\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
 x(s_1, s_2, t) &= \begin{cases} \sqrt{a^2+t^2} \frac{s_1 \sin \sqrt{s_1^2+s_2^2}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}, & 0 \leq s_1^2+s_2^2 \leq \pi^2, \\ \sqrt{a^2+(1-t)^2} \frac{s_1 \sin \sqrt{s_1^2+s_2^2}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}, & (2\pi)^2 \leq s_1^2+s_2^2 \leq (3\pi)^2, \end{cases} \\
 y(s_1, s_2, t) &= \begin{cases} \sqrt{b^2+t^2} \frac{s_2 \sin \sqrt{s_1^2+s_2^2}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}, & 0 \leq s_1^2+s_2^2 \leq \pi^2, \\ \sqrt{b^2+(1-t)^2} \frac{s_2 \sin \sqrt{s_1^2+s_2^2}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}, & (2\pi)^2 \leq s_1^2+s_2^2 \leq (3\pi)^2, \end{cases} \\
 z(s_1, s_2, t) &= \begin{cases} t \cos \sqrt{s_1^2+s_2^2}, & 0 \leq s_1^2+s_2^2 \leq \pi^2, \\ -(1-t) \cos \sqrt{s_1^2+s_2^2}, & (2\pi)^2 \leq s_1^2+s_2^2 \leq (3\pi)^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Per la matrice (5) e il determinante (6) si trova

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial z}{\partial s_2} \end{array} \right\|^2 =$$

$$= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_1^2 + s_2^2} \left[\frac{t^2 (b^2 + t^2)}{a^2 + t^2} x^2 + \frac{t^2 (a^2 + t^2)}{b^2 + t^2} y^2 + \right. \\ \left. + \frac{(a^2 + t^2) (b^2 + t^2)}{t^2} z^2 \right], & 0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2, \\ \frac{\operatorname{sen}^2 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_1^2 + s_2^2} \left[\frac{(1-t)^2 \{b^2 + (1-t)^2\}}{a^2 + (1-t)^2} x^2 + \right. \\ \left. + \frac{(1-t)^2 \{a^2 + (1-t)^2\}}{b^2 + (1-t)^2} y^2 + \frac{\{a^2 + (1-t)^2\} \{b^2 + (1-t)^2\}}{(1-t)^2} z^2 \right], & (2\pi)^2 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq (3\pi)^2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s_1, s_2, t)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{a^2 + t^2} \sqrt{b^2 + t^2} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \left[\frac{t^2 (b^2 + t^2)}{a^2 + t^2} x^2 + \frac{t^2 (a^2 + t^2)}{b^2 + t^2} y^2 + \right. \\ \left. + \frac{(a^2 + t^2) (b^2 + t^2)}{t^2} z^2 \right], & 0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2, \\ \frac{\operatorname{sen} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{a^2 + (1-t)^2} \sqrt{b^2 + (1-t)^2} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \left[\frac{(1-t)^2 \{b^2 + (1-t)^2\}}{a^2 + (1-t)^2} x^2 + \right. \\ \left. + \frac{(1-t)^2 \{a^2 + (1-t)^2\}}{b^2 + (1-t)^2} y^2 + \frac{\{a^2 + (1-t)^2\} \{b^2 + (1-t)^2\}}{(1-t)^2} z^2 \right], & (2\pi)^2 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq (3\pi)^2. \end{cases}$$

Valgono quindi le $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ del n. 2, e inoltre, se, come negli esempi precedenti, poniamo

$$\Pi(s_1, s_2, t) = \frac{1}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + t^2} \sqrt{b^2 + t^2} \operatorname{sen} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, & 0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2, \\ \frac{\sqrt{a^2 + (1-t)^2} \sqrt{b^2 + (1-t)^2} \operatorname{sen} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, & (2\pi)^2 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq (3\pi)^2, \end{cases}$$

$$\Pi^{(k)}(s_1, s_2) = \Pi(s_1, s_2, t_k), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

varranno anche le $a')$, $b')$, $c')$, $d')$ del n. 2, nonchè 1°) del n. 4, mentre il primo membro della (23) diventa

$$\frac{1}{\Pi} \Delta t \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s_1, s_2, t)} = \begin{cases} t \left(\frac{1}{a^2 + t^2} + \frac{1}{b^2 + t^2} \right), & 0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2, \\ (1-t) \left(\frac{1}{a^2 + (1-t)^2} + \frac{1}{b^2 + (1-t)^2} \right), & (2\pi)^2 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq (3\pi)^2, \end{cases}$$

onde risulta verificata anche la condizione 2°) del n. 4.

Infine, per quanto riguarda le condizioni $e)$, $f)$, $g)$ del n. 10, sussistono anche qui considerazioni perfettamente simili a quelle svolte a proposito dell'esempio I.

14. SUL PROBLEMA DI DIRICHLET IN CAMPI ILLIMITATI.

Nella nostra trattazione del problema generalizzato di DIRICHLET non è affatto essenziale l'ipotesi che il campo A sia limitato. Modifichiamo, per esempio, l'ipotesi $d)$ del n. 2, supponendo che la convergenza uniforme delle $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ verso le $x_i(s_1, \dots, s_{n-1})$ abbia luogo soltanto in $T - T_0$, mentre in T_0 , invece, sia

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t))^2 = \infty.$$

Lievi varianti sono, in tal caso, da apportare soltanto nella dimostrazione del teor. XI. Precisamente, invece della formola (61), preso un dominio sferico $S(P_0, r)$ col centro P_0 in A e il raggio r scelto in modo che FA risulti contenuta in $S(P_0, r)$, si avrà, per $n \geq 3$,

$$(64) \quad \begin{aligned} & f(P_0) - \frac{1}{\omega} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} d\omega - \\ & - \frac{n}{\omega} \int_{T-T_0} \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{\rho_0 \rho^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Il fatto che $f(P)$ coincide quasi dappertutto in A con una funzione armonica $\bar{f}(P)$ nulla su FA risulta allo stesso modo

come nel caso di un campo limitato, sicchè, per ogni sfera all'esterno della quale la u sia armonica, riuscirà, com'è noto, per $n \geq 3$,

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega} [f(Q)]_{\rho=r} d\omega = \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_2,$$

con c_1, c_2 costanti. Inoltre, applicando la (60) con u costante, si trova

$$\int_T \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} = 0.$$

Pertanto, facendo tendere r all'infinito nella (64), si deduce

$$f(P_0) = c_2 + \frac{n}{(n-2)\omega} \int_{T-T_0} \varphi(s_1, \dots, s_{n-1}) \frac{1}{P_0 P^{n-2}} ds_1 \dots ds_{n-1},$$

onde si vede che la $\bar{f}(P_0)$ tende alla costante c_2 per $P_0 \rightarrow \infty$, e quindi, essendo armonica in A e identicamente nulla su FA , non può che annullarsi identicamente in tutto A .

Come esempio, consideriamo quello in cui l'insieme A sia costituito da tutti i punti dello spazio xyz , per cui non è contemporaneamente $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $z = 0$; tale esempio è notevole, in quanto presenta un caso, in cui A è privo di punti esterni ⁽²⁷⁾.

Le funzioni $x(s_1, s_2, t)$, $y(s_1, s_2, t)$, $z(s_1, s_2, t)$, $\Pi(s_1, s_2, t)$ si possono definire come nell'esempio III del n. precedente per $0 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq \pi^2$; invece, per $(2\pi)^2 \leq s_1^2 + s_2^2 \leq (3\pi)^2$, le definiremo come segue

$$x(s_1, s_2, t) = \frac{1}{t} \frac{s_1 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad y(s_1, s_2, t) = \frac{1}{t} \frac{s_2 \sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}},$$

$$z(s_1, s_2, t) = -\frac{1}{t} \cos \sqrt{s_1^2 + s_2^2}, \quad \Pi(s_1, s_2, t) = \frac{\sin \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

⁽²⁷⁾ Cfr. la nota ⁽³⁾.

Risulta allora

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial z}{\partial s_2} \end{array} \right\|^2 = \frac{1}{t^4} \frac{\operatorname{sen}^2 \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_1^2 + s_2^2},$$

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s_1, s_2, t)} = \frac{1}{t^4} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad \Pi = \frac{1}{\alpha}, \quad \Delta t = 0.$$

Pertanto si vede che riescono verificate tutte le condizioni volute.

(Pervenuto in Redazione il 22 marzo 1940-XVIII)