

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI BERETTA

**Sugli autovalori per le equazioni differenziali
lineari omogenee del quarto ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 8 (1937), p. 47-82

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__47_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__47_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGLI AUTOVALORI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL QUARTO ORDINE

di LUIGI BERETTA a Firenze *

Sunto. — L' A. studia gli integrali dell' equazione :

$$[\vartheta(x)y'(x)]''' + \lambda[A(x)y(x)]'' + \lambda[B(x)y(x)]' + \lambda C(x)y(x) = 0$$

non identicamente nulli, che si annullano in quattro punti distinti prescritti, e assegna dei casi in cui è assicurata l'esistenza di almeno un valore oppure di infiniti valori del parametro λ , cui corrispondono integrali soddisfacenti la condizione dichiarata.

Scopo del presente lavoro è lo studio dell'esistenza di autovalori per un'equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine, cui corrispondono integrali dell'equazione che si annullano in quattro punti prefissati.

Il problema dell'esistenza di autovalori per le equazioni differenziali è stato già risolto in alcuni casi. G. SANSONE ha provato l'esistenza di infiniti autovalori per le equazioni del terzo e quarto ordine se i coefficienti sono costanti, teorema che, con l'aggiunta di alcune condizioni, ha dimostrato valido per le equazioni di qualsiasi ordine ⁽¹⁾. Risultati analoghi sono stati

* Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Università di Firenze.

⁽¹⁾ Cfr. G. SANSONE: a) *Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti* [Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.; LXII; (1929)]; — b) *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti* [Ibidem; LXIV; (1931)]; — c) *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee a coefficienti costanti* [Rend. Circ. Matem. Palermo; T LV; (1931)].

ottenuti per le equazioni *autoaggiunte* ⁽²⁾; un nuovo metodo per lo studio del problema è stato poi trovato dal WINANTS ⁽³⁾. Infine nel caso dell'equazione del terzo ordine:

$$[\mathfrak{D}(x)y'(x)]'' + \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B(x)y(x) = 0,$$

G. SANSONE ha trovato casi in cui vi è almeno un autovalore e casi in cui ve ne sono infiniti e tutti reali ⁽⁴⁾.

In questo lavoro *si studia l'equazione*:

$$[\mathfrak{D}(x)y'(x)]''' + \lambda[A(x)y(x)]'' + \lambda[B(x)y(x)]' + \lambda C(x)y(x) = 0;$$

nella prima parte *si trasforma il problema degli autovalori di questa equazione* [valori di λ cui corrispondono integrali che si annullano in quattro punti prefissati] *nel problema degli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie e se ne studia il nucleo*; nella seconda parte *si trovano due casi di equazioni del tipo proposto che ammettono almeno un autovalore*; nella terza parte *si trova una classe di equazioni del tipo proposto che ammettono infiniti autovalori e tutti reali*.

PRIMA PARTE

Trasformazione del problema degli autovalori dell'equazione differenziale

$$(1) [\mathfrak{D}(x)y'(x)]''' + \lambda[A(x)y(x)]'' + \lambda[B(x)y(x)]' + \lambda C(x)y(x) = 0,$$

⁽²⁾ Cfr. G. MAMMANA - *Autovalori ed autosoluzioni per la più generale equazione differenziale ordinaria* [Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa XV (Sc. fis. e nat.), 1927].

⁽³⁾ Cfr. M. WINANTS - *Sur l'équation de Fredholm généralisée* - [Bulletin des Sciences Mathématiques; 1930, T. LIV, p. 209; p. 284].

⁽⁴⁾ Cfr. G. SANSONE - *Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine* [Questi Rendiconti: I (1930) e III (1932)].

nel problema degli autovalori dell'equazione integrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt,$$

e studio del nucleo $K(x, t)$.

§ 1. - L' EQUAZIONE (1) NON È IN GENERALE AUTOAGGIUNTA.

Siccome il problema dell'esistenza di autovalori per le equazioni *autoaggiunte* è già stato risolto in senso affermativo da G. MAMMANA, ci dobbiamo innanzitutto assicurare che nei casi da noi studiati non si tratta, in generale, di equazioni autoaggiunte. Ma ciò è facile a provarsi; infatti la più generale equazione autoaggiunta del quarto ordine deve avere la forma:

$$(2) \quad [\alpha(x)y''(x)]'' + [\beta(x)y'(x)]' + \gamma(x)y(x) = 0.$$

Scrivendo che la (1) deve essere identica alla (2) abbiamo, svolgendo le derivazioni:

$$\vartheta(x) = \text{costante}, \quad B(x) = -A'(x),$$

che *rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti perchè la (1) sia autoaggiunta.*

§ 2. - EQUAZIONE INTEGRALE CUI SODDISFANO LE SOLUZIONI DELL' EQUAZIONE (1) NULLE IN a, c, d, b .

Nella (1) supponiamo $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $B'(x)$, $C(x)$ funzioni continue della x in (α, β) , $\vartheta(x) > 0$ in (α, β) , λ costante, e siano a, b, c, d , con $a < c < d < b$ quattro punti di (α, β) ; vogliamo studiare se esistono valori speciali di λ (autovalori), per i quali la (1) ammette un integrale $y(x)$ non identicamente nullo, che si annulli nei quattro punti fissati a, b, c, d .

Se $y(x)$ soddisfa la (1) soddisfa anche il sistema

$$(1') \quad [\vartheta(x) y'(x)]' + u(x) = 0$$

$$(1'') \quad u''(x) = \lambda [A(x) y(x)]'' + \lambda [B(x) y(x)]' + \lambda C(x) y(x),$$

e viceversa. Le soluzioni della (1') che si annullano nei punti a, b sono date tutte dall'espressione

$$(2) \quad y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

dove con $G(x, \xi)$ abbiamo indicato la così detta funzione di GREEN relativa all'equazione

$$[\vartheta(x) y'(x)]' = 0,$$

che sappiamo esser così definita [per x e ξ variabili in a, b]

$$(3) \quad \begin{cases} \text{per } x \leq \xi & G(x, \xi) = \frac{\psi(b, \xi) \psi(x, a)}{\psi(b, a)}, \\ \text{per } x \geq \xi & G(x, \xi) = \frac{\psi(\xi, a) \psi(b, x)}{\psi(b, a)}, \end{cases}$$

ove con $\phi(m, l)$ [m, l variabili in (a, b)] indichiamo la funzione

$$\phi(m, l) = \int_l^m \frac{dx}{\vartheta(x)}.$$

Dalla (1'') si ha poi

$$\begin{aligned} u(x) = & \lambda A(x) y(x) + \lambda \int_a^x B(x) y(x) dx + \\ & + \lambda \int_a^x (x-t) C(t) y(t) dt + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

$[c_1, c_2 \text{ costanti}]$, e sostituendo nella (2):

$$\begin{aligned} y(x) = & c_1 \int_a^b G(x, \xi) \xi d\xi + c_2 \int_a^b G(x, \xi) d\xi + \\ & + \lambda \int_a^b G(x, \xi) A(\xi) y(\xi) d\xi + \lambda \int_a^b G(x, \xi) d\xi \int_a^\xi B(t) y(t) dt + \\ & + \lambda \int_a^b G(x, \xi) d\xi \int_a^\xi (\xi - t) C(t) y(t) dt. \end{aligned}$$

Dissociando i termini nell'ultimo integrale e applicando agli ultimi tre termini dell'espressione così ottenuta la formula di DIRICHLET, si ottiene

$$\begin{aligned} y(x) = & c_1 \int_a^b G(x, \xi) \xi d\xi + c_2 \int_a^b G(x, \xi) d\xi + \\ & + \lambda \int_a^b G(x, t) A(t) y'(t) dt + \lambda \int_a^b B(t) y(t) dt \int_t^b G(x, \xi) d\xi + \\ & + \lambda \int_a^b C(t) y(t) dt \int_t^b G(x, \xi) \xi d\xi - \lambda \int_a^b C(t) y(t) t dt \int_t^b G(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

E ponendo

$$(4') \quad \int_t^b G(x, \xi) d\xi = H(x, t)$$

$$(4'') \quad \int_t^b G(x, \xi) \xi d\xi = H_1(x, t),$$

si ha

$$(5) \quad y(x) = c_1 H_1(x, a) + c_2 H(x, a) + \lambda \int_a^b F(x, t) y(t) dt,$$

dove è

$$(6) \quad \begin{aligned} F(x, t) = & A(t) G(x, t) + [B(t) - t C(t)] H(x, t) + \\ & + C(t) H_1(x, t). \end{aligned}$$

La (5) ci dà tutte e sole le soluzioni dell'equazione (1) che si annullano in a e b . Imponendo ora a $y(x)$ di annullarsi in c e d abbiamo il sistema:

$$(7) \quad \begin{cases} c_1 H_1(c, a) + c_2 H(c, a) = -\lambda \int_a^b F(c, t) y(t) dt \\ c_1 H_1(d, a) + c_2 H(d, a) = -\lambda \int_a^b F(d, t) y(t) dt. \end{cases}$$

Il determinante del sistema:

$$\Delta = H_1(c, a) H(d, a) - H_1(d, a) H(c, a)$$

è diverso da zero, altrimenti avrebbe soluzione il sistema omogeneo (che si ottiene per $\lambda = 0$), e quindi l'equazione

$$(8) \quad [\vartheta(x) y'(x)]''' = 0,$$

(che si ottiene dalla (1) facendo $\lambda = 0$), avrebbe una soluzione che si annulla in quattro punti; ma ciò è assurdo [infatti dalla (8) segue che $\vartheta(x) y'(x)$ è un polinomio di grado non superiore al secondo, quindi $y'(x)$ si può annullare in due punti al massimo e $y(x)$ non può annullarsi in quattro punti].

Risolviendo il sistema (7) rispetto a c_1 e c_2 , e sostituendo nella (5) abbiamo che le soluzioni della (1) che si annullano

nei quattro punti a, b, c, d sono date tutte e sole dall'espressione

$$\begin{aligned}
 (9) \quad y(x) = & \lambda \int_a^b F(x, t) y(t) dt + \lambda \frac{H(c, a) H_1(x, a)}{\Delta} \int_a^b F(d, t) y(t) dt - \\
 & - \lambda \frac{H(d, a) H_1(x, a)}{\Delta} \int_a^b F(c, t) y(t) dt + \\
 & + \lambda \frac{H(x, a) H_1(d, a)}{\Delta} \int_a^b F(c, t) y(t) dt - \\
 & - \lambda \frac{H(x, a) H_1(c, a)}{\Delta} \int_a^b F(d, t) y(t) dt .
 \end{aligned}$$

Posto

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} K(x, t) = & F(x, t) + \frac{H(x, a) H_1(d, a) - H(d, a) H_1(x, a)}{H_1(c, a) H(d, a) - H_1(d, a) H(c, a)} F(c, t) + \\ & + \frac{H(c, a) H_1(x, a) - H(x, a) H_1(c, a)}{H_1(c, a) H(d, a) - H_1(d, a) H(c, a)} F(d, t) , \end{aligned} \right.$$

la (9) diventa

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt .$$

Poniamo ora

$$(11) \quad \varphi(x) = \psi(x, a) = \int_a^x \frac{d\xi}{\mathfrak{P}(\xi)} ,$$

$$(12) \quad h(x, t) = 2 \varphi(b) [H(x, a) H_1(t, a) - H_1(x, a) H(t, a)] .$$

Se ora nella (10) moltiplichiamo tutti i termini per

$$h(c, d) = 2 \varphi(b) [H(c, a) H_1(d, a) - H_1(c, a) H(d, a)] ,$$

il nucleo $K(x, t)$ risulta così definito, nel quadrato Q di lato $(b - a)$,

$$(13) \quad h(c, d) K(x, t) = h(c, d) F(x, t) - h(x, d) F(c, t) - \\ - h(c, x) F(d, t).$$

Siccome il ragionamento è invertibile, abbiamo dimostrato il teorema :

Le soluzioni dell'equazione differenziale (1) che si annullano nei quattro punti prefissati a, b, c, d sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione integrale lineare omogenea di seconda specie

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt,$$

il cui nucleo $K(x, t)$ resta definito dalla (13).

§ 3. - ESPRESSIONE INTEGRALE DELLE FUNZIONI $h(x, t)$, $F(x, t)$ COLLE QUALI È DEFINITO IL NUCLEO $K(x, t)$.

Poniamo [v. anche (11) del § 2]:

$$(1) \quad \varphi(x) = \int_a^x \frac{d\xi}{\vartheta(\xi)}, \quad \omega_1(x) = \int_x^b \frac{\xi d\xi}{\vartheta(\xi)}, \quad \omega_2(x) = \int_x^b \frac{\xi^2 d\xi}{\vartheta(\xi)}.$$

Allora le (3) del § 2 danno :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq \xi \quad \varphi(b) G(x, \xi) = \varphi(x) [\varphi(b) - \varphi(\xi)] = \int_a^x \frac{ds}{\vartheta(s)} \int_{\xi}^b \frac{dv}{\vartheta(v)} \\ x \geq \xi \quad \varphi(b) G(x, \xi) = \varphi(\xi) [\varphi(b) - \varphi(x)] = \int_a^{\xi} \frac{ds}{\vartheta(s)} \int_x^b \frac{dv}{\vartheta(v)}. \end{array} \right.$$

Si ha poi, per $x \leq t$, per la (4)' del § 2,

$$\begin{aligned}
 \varphi(b) H(x, t) &= \int_t^b \varphi(b) G(x, \xi) d\xi = \varphi(x) \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)] d\xi = \\
 &= \varphi(x) \varphi(b) (b - t) - \varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi) d\xi = \\
 &= \varphi(x) \varphi(b) (b - t) - \varphi(x) [\xi \varphi(\xi)]_t^b + \varphi(x) \int_t^b \frac{\xi}{\vartheta(\xi)} d\xi = \\
 &= \varphi(x) \left[t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \int_t^b \frac{\xi}{\vartheta(\xi)} d\xi \right],
 \end{aligned}$$

e per la (1)

$$x \leq t \quad \varphi(b) H(x, t) = \varphi(x) [t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \omega_1(t)].$$

Operando in modo analogo per $x \geq t$ troviamo:

$$x \geq t \quad \varphi(b) H(x, t) = [\varphi(x) - \varphi(b)] [t \varphi(t) + \omega_1(t)] + \varphi(b) \omega_1(x).$$

Sostituendo di nuovo le (1) nelle ultime due relazioni trovate abbiamo

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x \leq t \quad \varphi(b) H(x, t) &= \int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{v-t}{\vartheta(v)} ds dv \\ x \geq t \quad \varphi(b) H(x, t) &= \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{s-t}{\vartheta(v)} ds dv + \\ &+ \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{s-v}{\vartheta(v)} ds dv. \end{aligned} \right.$$

Si ha poi, per la (4'') del § 2, per $x \leq t$,

$$\begin{aligned}
 \varphi(b) H_1(x, t) &= \int_t^b \varphi(b) G(x, \xi) \xi d\xi = \varphi(x) \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)] \xi d\xi = \\
 &= \frac{1}{2} (b^2 - t^2) \varphi(x) \varphi(b) - \varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi) \xi d\xi = \\
 &= \frac{1}{2} (b^2 - t^2) \varphi(x) \varphi(b) - \frac{1}{2} \varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi) d(\xi^2) = \\
 &= \frac{1}{2} (b^2 - t^2) \varphi(x) \varphi(b) - \frac{1}{2} \varphi(x) \left[\varphi(\xi) \xi^2 \right]_{\xi=t}^{\xi=b} + \frac{1}{2} \varphi(x) \int_t^b \frac{\xi^2}{\vartheta(\xi)} d\xi,
 \end{aligned}$$

e per la (1)

$$x \leq t \quad 2 \varphi(b) H_1(x, t) = \varphi(x) [t^2 \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \omega_2(t)].$$

Analogamente si trova

$$x \geq t \quad 2 \varphi(b) H_1(x, t) = [\varphi(x) - \varphi(b)] [t^2 \varphi(t) + \omega_2(t)] + \varphi(b) \omega_2(x).$$

Sostituendo di nuovo le (1) nelle due ultime relazioni trovate abbiamo

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x \leq t \quad 2 \varphi(b) H_1(x, t) &= \int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{v^2 - t^2}{\vartheta(v)} ds dv \\ x \geq t \quad 2 \varphi(b) H_1(x, t) &= \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{s^2 - t^2}{\vartheta(v)} ds dv + \\ &+ \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{s^2 - v^2}{\vartheta(v)} ds dv. \end{aligned} \right.$$

Per la (6) del § 2 era

$$F(x, t) = A(t) G(x, t) + B(t) H(x, t) + C(t) [H_1(x, t) - t H(x, t)],$$

da cui sostituendo le (2), (3), (4) ora trovate si ha:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq t \quad \varphi(b) F(x, t) = A(t) \int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(v)} ds dv + \\ \quad + B(t) \int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{v-t}{\vartheta(v)} ds dv + \\ \quad + \frac{1}{2} C(t) \int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{(v-t)^2}{\vartheta(v)} ds dv; \\ \\ x \geq t \quad \varphi(b) F(x, t) = A(t) \int_a^t \frac{1}{\vartheta(s)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} ds dv + \\ \quad + B(t) \left[\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{s-t}{\vartheta(v)} ds dv + \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{s-v}{\vartheta(v)} ds dv \right] + \\ \quad + \frac{1}{2} C(t) \left[\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{(t-s)^2}{\vartheta(v)} ds dv + \right. \\ \quad \left. + \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{(s-t)^2 - (v-t)^2}{\vartheta(v)} ds dv \right]. \end{array} \right.$$

Dalla (12) del § 2 si ricava

$$\begin{aligned} \varphi(b) h(x, t) &= [2 \varphi(b) H_1(t, a)] [\varphi(b) H(x, a)] - \\ &- [2 \varphi(b) H_1(x, a)] [\varphi(b) H(t, a)] = \\ &= \int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{s^2 - v^2}{\vartheta(v)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{\xi - \alpha}{\vartheta(\alpha)} ds dv d\xi d\alpha - \\ &- \int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{s^2 - v^2}{\vartheta(v)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{\xi - \alpha}{\vartheta(\alpha)} ds dv d\xi d\alpha. \end{aligned}$$

Spezziamo gli integrali tra x e b in integrali tra x e t e integrali tra t e b : i termini dati dall'integrazione fra t e b si elidono fra di loro, si ha quindi

$$\begin{aligned}\varphi(b) h(x, t) &= \int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(s^2 - v^2)(\xi - x)}{\vartheta(z)} ds dv d\xi dx - \\ &\quad - \int_x^t \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(s^2 - v^2)(\xi - x)}{\vartheta(z)} ds dv d\xi dx = \\ &= \int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(s^2 - v^2)(\xi - x) - (\xi^2 - v^2)(s - x)}{\vartheta(z)} ds dv d\xi dx ;\end{aligned}$$

possiamo scambiare, nella funzione integranda, v con x , poichè, essendo le relative integrazioni estese ad intervalli uguali, l'integrale non cambia; facendo ciò solo nel secondo termine la funzione integranda del numeratore diventa $(s^2 - v^2)(\xi - x) - (\xi^2 - x^2)(s - v) = (s - v)(\xi - x)(s - \xi) + (s - v)(\xi - x)(v - x) = (s - \xi)(s - v)(\xi - v) + (v - x)(s - v)(s - x)$.

Osserviamo ora che se una funzione di due variabili cambia solo di segno scambiando fra di loro queste variabili, l'integrale doppio della funzione rispetto a queste due variabili esteso a un quadrato avente per diagonale la diagonale principale è nullo; ossia, se è

$$\Phi(x, t) = -\Phi(t, x),$$

e consideriamo l'integrale

$$I = \int_{r_1}^{r_2} dx \int_{s_1}^{s_2} \Phi(x, t) dt ;$$

si ha :

$$a) \text{ se } (r_1, r_2) \text{ e } (s_1, s_2) \text{ coincidono, è } I = 0 ,$$

b) se (r_1, r_2) e (s_1, s_2) non hanno punti a comune, si può aggiungere a uno di essi l'altro, lasciando questo invariato ⁽⁵⁾.

c) se (r_1, r_2) e (s_1, s_2) sono tali che il primo comprende il secondo, questo si può togliere al primo ⁽⁶⁾.

Le regole *a)*, *b)*, *c)*, saranno spesso applicate nel seguito: per ora dalla *a)* segue subito che

$$\int_i^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(v-x)(s-v)(s-x)}{\vartheta(z)} ds dv d\xi dz = 0.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \varphi(b) h(x, t) &= \\ &= \int_i^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(s-\xi)(s-v)(\xi-v)}{\vartheta(z)} ds dv d\xi dz, \end{aligned}$$

e dividendo ambo i membri per $\varphi(b) = \int_a^b \frac{dz}{\vartheta(z)}$, e applicando

la regola *c)* prima alle integrazioni rispetto a s e a v e poi alle integrazioni rispetto a v e ξ , si ha:

$$(6) \quad h(x, t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^i \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^b \frac{(s-\xi)(s-v)(\xi-v)}{\vartheta(s)} dv d\xi ds.$$

$$(5) \text{ Es.: Se } a < c < d, \quad \int_a^c dx \int_c^d \Phi(x, t) dt = \int_a^d dx \int_c^d \Phi(x, t) dt.$$

(6) È l'inversa della precedente; es. se $a < c < d$,

$$\int_a^d dx \int_c^d \Phi(x, t) dt = \int_a^c dx \int_c^d \Phi(x, t) dt.$$

Nelle (I) le funzioni h e F si intendono definite rispettivamente dalla (6) e dalla (5) del § 3; l'espressione del nucleo

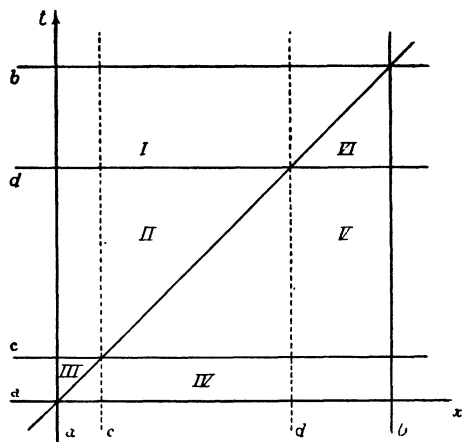


Fig. 1

riesce quindi assai complicata; però alle (I) si possono sostituire le seguenti formule più espressive e perfettamente equivalenti:

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} h(c, d) K_1(x, t) = \alpha_1(x, d) \tau(b, t) \\ h(c, d) K_2(x, t) = \alpha_1(x, d) \tau(b, t) - \alpha_1(x, b) \tau(d, t) \\ h(c, d) K_3(x, t) = \alpha_4(a, c) \tau(x, t) - \alpha_4(x, c) \tau(a, t) \\ h(c, d) K_4(x, t) = -\alpha_4(x, c) \tau(a, t) \\ h(c, d) K_5(x, t) = \alpha_4(x, a) \tau(c, t) - \alpha_4(x, c) \tau(a, t) \\ h(c, d) K_6(x, t) = \alpha_1(x, d) \tau(b, t) - \alpha_1(b, d) \tau(x, t), \end{array} \right.$$

dove è

$$(1) \quad h(x, t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(z)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(z - u) du dz d\xi$$

$$(2) \quad \alpha_1(x, t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (u - z) du dz d\xi$$

$$(3) \quad \alpha_4(x, t) = \int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(z)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (z - u) du dz d\xi$$

$$(4) \quad \tau(x, t) = \int_t^x \frac{1}{\vartheta(v)} \left\{ \frac{1}{2} C(t) (t - v)^2 - B(t) (t - v) + A(t) \right\} dv,$$

e vale la relazione :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(x, d) \tau(b, t) - \alpha_1(x, b) \tau(d, t) + \alpha_4(x, c) \tau(a, t) - \\ - \alpha_4(x, a) \tau(c, t) - h(c, d) \tau(x, t) = 0. \end{array} \right.$$

La verifica che le (II) sono equivalenti alle (I) si fa moltiplicando ciascuna delle relazioni (I) e la sua corrispondente in (II) per

$$\varphi(b) = \int_a^b \frac{d\xi}{\vartheta(\xi)},$$

uguagliando poi i secondi membri corrispondenti così ottenuti : si hanno allora tante relazioni fra integrali quintupli che è facile verificare con operazioni elementari, e in base alle regole c) e d) del § 3.

§ 5. - SEGNO DELLE FUNZIONI $h(x, t)$, $\alpha_1(x, t)$, $\alpha_4(x, t)$
NEL QUADRATO Q .

Dalla (1) del § 4 segue subito, [essendo $\vartheta(x) > 0$ in (a, b)],

per $a < x < t < b$ $h(x, t) > 0$.

Per $a < t < x < b$ [v. regola c) del § 3]:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= - \int_a^x \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (z - u) du dz d\xi = \\ &= - \int_a^t \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (z - u) du dz d\xi < 0, \end{aligned}$$

e infine

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x < t & h(x, t) > 0 \\ x > t & h(x, t) < 0 \end{array} \right. \quad \text{nel quadrato } Q.$$

Ricordiamo la (2) del § 4

$$\alpha_1(x, t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (u - z) du dz d\xi.$$

Per $x < t$ possono presentarsi tre casi:

$$a < x < t < c, \quad a < x < c < t, \quad c < x < t.$$

Per la regola c) del § 4 abbiamo: nel primo caso

$$\alpha_1(x, t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(u)} (\xi - u) (\xi - z) (u - z) du dz d\xi < 0,$$

nel secondo:

$$\alpha_1(x, t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_c^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (u - z) du dz d\xi > 0$$

nel terzo :

$$\alpha_1(x, t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_c^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u) (\xi - z) (u - z) du dz d\xi < 0.$$

Osservando che :

$$\alpha_1(t, x) = -\alpha_1(x, t),$$

il segno di $\alpha_1(x, t)$ risulta dato dalla seguente tavola, nel quadrato Q :

$a < x < t < c$	$\alpha_1(x, t) < 0$
$a < x < c < t$	$\alpha_1(x, t) > 0$
$c < x < t$	$\alpha_1(x, t) < 0$
$a < t < x < c$	$\alpha_1(x, t) > 0$
$a < t < c < x$	$\alpha_1(x, t) < 0$
$c < t < x$	$\alpha_1(x, t) > 0$

Il segno di $\alpha_4(x, t)$ si studia in modo perfettamente analogo, arrivando ai risultati della seguente tavola :

$x < t < d$	$\alpha_4(x, t) > 0$
$x < d < t < b$	$\alpha_4(x, t) < 0$
$d < x < t < b$	$\alpha_4(x, t) > 0$
$t < x < d$	$\alpha_4(x, t) < 0$
$t < d < x < b$	$\alpha_4(x, t) > 0$
$d < t < x < b$	$\alpha_4(x, t) < 0$

I risultati trovati si vedono meglio nelle seguenti figure, che d'ora innanzi dovranno sempre esser tenute presenti :

Segno di $\alpha_1(x, t)$ ⁽⁷⁾

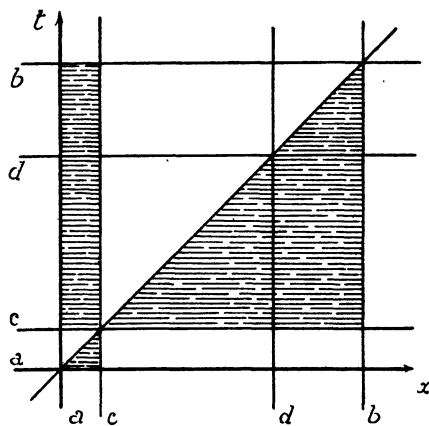


Fig. 2

Segno di $\alpha_4(x, t)$ ⁽⁷⁾

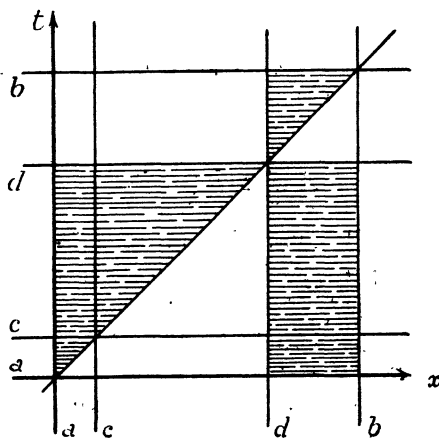


Fig. 3

⁽⁷⁾ Nella parte tratteggiata la funzione è positiva; nella parte bianca è negativa.

SECONDA PARTE

Due casi in cui esiste almeno un autovalore.

§ 6. - TEOREMA.

Data l'equazione: ⁽⁸⁾

$$(1) \quad [\mathfrak{D}(x) y'(x)]''' + \lambda C(x) y(x) = 0,$$

con le ipotesi $\mathfrak{D}'''(x), C(x)$ continue in (α, β) , $\mathfrak{D}(x) > 0$ in (α, β) , λ costante; e dati in (α, β) quattro punti a, b, c, d , $[a < c < d < b]$ qualsiasi; se avviene che la funzione $(x - c)(x - d)C(x)$, senza essere identicamente nulla non cambia di segno in (a, b) , allora esiste almeno un autovalore [valore speciale di λ] per il quale la (1) ammette un integrale $y(x)$ non identicamente nullo che si annulla nei quattro punti fissati a, b, c, d .

Basterà dimostrare che ammette almeno un autovalore l'equazione

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

che corrisponde alla (1) con il procedimento del § 2, il cui nucleo $K(x, t)$ soddisfa alle relazioni trovate nei paragrafi precedenti, ove si faccia

$$(2) \quad A(x) \equiv B(x) \equiv 0,$$

e si tenga conto della nuova ipotesi sulla funzione $C(x)$. Ricordiamo il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione integrale lineare omogenea di seconda specie non ammetta alcun autovalore è che tutte le tracce, a partire dalla terza, siano nulle* ⁽⁹⁾. Noi dimostreremo che nelle nostre ipotesi tutte le tracce sono diverse da zero, e allora il teorema sarà

⁽⁸⁾ In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

⁽⁹⁾ Cfr. E. GOURSAT; *Cours d'Analyse Mathématique*; (4^a ed.) T. III p. 428 [Paris, Gauthier-Villars].

dimostrato. L'ipotesi fatta sulla funzione $C(x)$ porta che si deve verificare uno dei due casi seguenti:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C(t) > 0 & \text{per } a < t < c \\ C(t) < 0 & \text{» } c < t < d \\ C(t) > 0 & \text{» } d < t < b, \end{array} \right.$$

oppure

$$(3)' \quad \left\{ \begin{array}{ll} C(t) < 0 & \text{per } a < t < c \\ C(t) > 0 & \text{» } c < t < d \\ C(t) < 0 & \text{» } d < t < b. \end{array} \right.$$

Supponiamo che si verifichi il caso (3) [la dimostrazione per il caso (3)' è perfettamente analoga]; e studiamo quale segno assume allora il nucleo $K(x, t)$ nel quadrato di lato $b - a$. Per la prima delle (II) del § 4, tenuto conto che ora è:

$$\tau(b, t) = C(t) \int_t^b (t - v)^2 dv$$

[per la (4) del § 4, sostituendovi la (2) di questo §] e che, per la (3), $C(t)$ è positiva nella zona del nucleo $K_1(x, t)$ [v. fig. 1] e inoltre che è $h(c, d) > 0$, [v. (1) del § 5], abbiamo infine che $K_1(x, t)$ ha il segno di $\alpha_1(x, d)$, e quindi, per la fig. 2,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_1(x, t) > 0 & \text{per } a < x < c \\ K_1(x, t) < 0 & \text{» } c < x < d \\ K_1(x, t) > 0 & \text{» } d < x < b. \end{array} \right.$$

Analogamente si trova

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_4(x, t) > 0 & \text{per } a < x < c \\ K_4(x, t) < 0 & \text{» } c < x < d \\ K_4(x, t) > 0 & \text{» } d < x < b. \end{array} \right.$$

Ricordiamo ora che è [v. (II) del § 4]: $h(c, d) K_3(x, t) = \alpha_4(a, c) \tau(x, t) - \alpha_4(x, c) \tau(a, t)$, con $a < x < t < c$, [v. fig. 1],

$C(t) > 0$ [per la (3)], e $h(c, d) > 0$; perciò $K_2(x, t)$ ha il segno dell'espressione [cfr. (3) e (4) del § 4]:

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(x)} \int_c^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) (\xi - x) \\
 & \quad (x - u) (t - v)^2 du dx d\xi dv - \\
 & - \int_a^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(x)} \int_c^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^a \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) (\xi - x) \\
 & \quad (x - u) (t - v)^2 du dx d\xi dv = \\
 & = \int_a^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(x)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) (\xi - x) \\
 & \quad (x - u) (t - v)^2 du dx d\xi dv + \\
 & + \int_a^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(x)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) \left\{ (\xi - x) (x - u) (t - v)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - (\xi - v) (v - u) (t - x)^2 \right\} du dx d\xi dv.
 \end{aligned}$$

Essendo per ipotesi $\vartheta(x) > 0$ per $a < x < b$, il primo integrale risulta positivo; inoltre, poichè si trova:

$$\begin{aligned}
 & (\xi - x) (x - u) (t - v)^2 - (\xi - v) (v - u) (t - x)^2 = \\
 & = (v - x) \left\{ (\xi - x) (t - x) (u - t) + (u - x) (t - x) (\xi - t) + \right. \\
 & \quad \left. + (x - v) [(\xi - x) (u - x) - (t - x)^2] \right\},
 \end{aligned}$$

è facile verificare che anche il secondo integrale è positivo. Si ha quindi:

$$(III) \quad K_2(x, t) > 0.$$

Analogamente si trova

$$(VI) \quad K_6(x, t) > 0.$$

Per il nucleo $K_2(x, t)$ bisogna distinguere due casi: $x < c$, e $x > c$; con procedimenti analoghi ai precedenti si trova allora:

$$(II) \quad \begin{cases} K_2(x, t) < 0 & \text{per } x < c \\ K_2(x, t) > 0 & \text{» } x > c, \end{cases}$$

e infine:

$$(V) \quad \begin{cases} K_5(x, t) > 0 & \text{per } x < d \\ K_5(x, t) < 0 & \text{» } x > d. \end{cases}$$

Per le (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) il segno del nucleo $K(x, t)$ resta determinato come mostra la figura seguente:

Segno di $K(x, t)$ ⁽¹⁰⁾

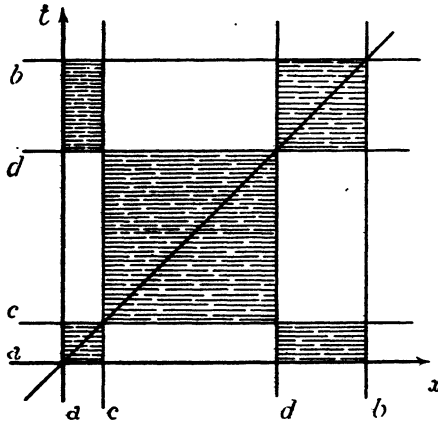


Fig. 4

Dimostriamo ora che, nell'ipotesi che $K(x, t)$ abbia il segno indicato nella figura precedente, tutte le tracce del nucleo sono

⁽¹⁰⁾ Nella parte tratteggiata $K(x, t)$ è positivo, nella parte bianca è negativo.

positive, ossia:

$$An = \int_a^b \dots \int_a^b K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1) ds_1 \dots ds_n > 0,$$

qualunque sia n ; noi dimostreremo anzi che è

$$(4) \quad K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \dots K(s_{n-1}, s_n) K(s_n, s_1) > 0,$$

comunque varino $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n$ nel quadrato di lato $b - a$, eccettuati i punti a, b, c, d [per i quali il primo membro della (4) è nullo, essendo $K(a, t) \equiv K(b, t) \equiv K(c, t) \equiv K(d, t) \equiv 0$ ⁽¹¹⁾]. Per $n = 1$ la (4) diventa $K(s_1, s_1) > 0$, che è verificata facilmente nella fig. 4. Supponiamo dunque $n > 1$. Vogliamo allora dimostrare che il prodotto

$$P = K(s_{i-1}, s_i) K(s_i, s_{i+1})$$

non varia di segno se, restando fissi s_{i-1} e s_{i+1} , s_i varia in (a, b) . Infatti possono presentarsi i seguenti casi:

s_{i-1}	s_{i+1}	$a < s_i < c$	$c < s_i < d$	$d < s_i < b$
$a < s_{i-1} < c$	$a < s_{i+1} < c$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$a < s_{i-1} < c$	$c < s_{i+1} < d$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$c < s_{i-1} < d$	$a < s_{i+1} < c$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$a < s_{i-1} < c$	$d < s_{i+1} < b$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$d < s_{i-1} < b$	$a < s_{i+1} < c$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$c < s_{i-1} < d$	$c < s_{i+1} < d$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$c < s_{i-1} < d$	$d < s_{i+1} < b$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$d < s_{i-1} < b$	$c < s_{i+1} < d$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$d < s_{i-1} < b$	$d < s_{i+1} < b$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$

⁽¹¹⁾ Cfr. (II) del § 4 e regola α del § 3.

Ne segue che per determinare il segno del primo membro della (4) possiamo supporre, per es.:

$$a < s_2, s_3, \dots, s_n < c.$$

E siccome in questa ipotesi è

$$K(s_{i+1}, s_{i+2}) > 0,$$

ci resta da far vedere che è positivo il prodotto

$$K(s_1, s_2) K(s_n, s_1),$$

con
$$a < s_2 < c, \quad a < s_n < c.$$

Si posson dare tre casi:

$$a < s_1 < c, \quad c < s_1 < d, \quad d < s_1 < b.$$

Si verifica subito, consultando la figura, che in questi tre casi è

$$K(s_1, s_2) K(s_n, s_1) > 0.$$

§ 7. - COROLLARIO.

Data l'equazione ⁽¹²⁾

$$(1) \quad [\vartheta(x) y'(x)]''' + \lambda [A(x) y(x)]'' + \lambda [B(x) y(x)]' + \\ + \lambda [C_1(x) + \varepsilon C_2(x)] y(x) = 0$$

con le ipotesi: $\vartheta'''(x), A''(x), B'(x), C_1(x), C_2(x)$ continue in (α, β) , $\vartheta(x) > 0$ in (α, β) , λ ed ε costanti; e dati in (α, β) quattro punti a, b, c, d , $[a < c < d < b]$ qualsiasi; se avviene che la funzione $(x - c)(x - d)C_2(x)$, senza essere identicamente

⁽¹²⁾ In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

nulla, non assume valori di segno opposto in (a, b) , allora, salvo al più tre valori della costante ε , esiste almeno un autovalore [valore speciale di λ] per il quale la (1) ammette un integrale $y(x)$ non identicamente nullo, che si annulla nei quattro punti fissati a, b, c, d .

Infatti la ricerca delle soluzioni dell'equazione (1) che si annullano in quattro punti a, b, c, d , $[a < c < d < b]$ si riduce [cfr. § 2] a trovare le autosoluzioni dell'equazione integrale omogenea di seconda specie.

$$(2) \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt,$$

dove è

$$K(x, t) = K_1(x, t) + \varepsilon K_2(x, t),$$

dove $K_1(x, t)$ e $K_2(x, t)$ sono nuclei delle equazioni integrali analoghe alla (2) cui soddisfano rispettivamente le soluzioni $y(x)$ delle equazioni differenziali.

$$[\vartheta(x) y'(x)]''' + \lambda[A(x) y(x)]'' + \lambda[B(x) y(x)]' + \\ + \lambda C_1(x) y(x) = 0$$

$$[\vartheta(x) y'(x)]''' + \lambda C_2(x) y(x) = 0,$$

che si annullano nei punti prefissati a, b, c, d .

Indicando con $A_3, A_3^{(1)}, A_3^{(2)}$ le terze tracce dei nuclei $K(x, t), K_1(x, t), K_2(x, t)$, si ha, per il teorema precedente,

$$A_3^{(2)} > 0 \quad [\text{oppure } A_3^{(2)} < 0].$$

In ogni caso è

$$A_3^{(2)} \neq 0.$$

Ed essendo :

$$A_3 = A_3^{(1)} + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + A_3^{(2)} \varepsilon^3,$$

con c_1, c_2 costanti indipendenti da ε , ne segue che A_3 può annullarsi al più per tre valori di ε , l'equazione (2) ammette almeno un autovalore.

§ 8. - TEOREMA.

Data l'equazione: ⁽¹³⁾

$$(1) \quad [\vartheta(x) y'(x)]''' + \lambda [A(x) y(x)]'' + \lambda C(x) y(x) = 0,$$

con le ipotesi: $\vartheta'''(x), A''(x), C'(x)$ continue in (α, β) , $\vartheta(x) > 0$ in (α, β) , λ costante; e dati in (α, β) quattro punti a, b, c, d , $[a < c < d < b]$ qualsiasi; se avviene che le due funzioni: $A(x)$ e $(x-c)(x-d)C(x)$, senza essere identicamente nulle, hanno segno costante e fra loro uguale in (a, b) , allora esiste almeno un autovalore [valore speciale di λ], cui corrispondono soluzioni dell'equazione che si annullano nei quattro punti a, b, c, d prefissati.

Infatti, nelle nostre ipotesi, le funzioni $h(x, t), \alpha_1(x, t), \alpha_4(x, t)$ sono continue con derivate parziali prime continue nel quadrato Q di lato $b-a$ - come appare dalle loro espressioni integrali, [cfr. (1), (2), (3) del § 4] - inoltre, [per la nuova ⁽¹⁴⁾ ipotesi: $C'(x)$ continua], anche $\tau(x, t)$ viene ad essere continua con derivate parziali prime continue in Q [cfr. (4) del § 4] e quindi, come appare dalle (II) del § 4, il nucleo $K(x, t)$ - dell'equazione integrale corrispondente alla (1) con il procedimento del § 2 - è continuo con derivate parziali prime continue in Q .

⁽¹³⁾ In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

⁽¹⁴⁾ Fin qui avevamo semplicemente supposto $C(x)$ continua.

⁽¹⁵⁾ Cfr. T. LALESKO - *Introduction à la théorie des équations intégrales*. [Paris; A. Hermann; 1912], pagine 87-89.

Ne segue in particolare che il nucleo $K(x, t)$ è *lipschitziano* del primo ordine in Q . Ma se il nucleo di un'equazione integrale di seconda specie è lipschitziano [di un ordine qualsiasi], allora il genere di $D(\lambda)$ [determinante di FREDHOLM] è nullo ⁽¹⁵⁾, se quindi $D(\lambda)$ ha infiniti zeri è

$$D(\lambda) = \prod_n^{1 \dots \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right);$$

e se gli zeri di $D(\lambda)$ sono in numero finito, n :

$$D(\lambda) = \prod_i^{1 \dots n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right);$$

e se $D(\lambda)$ non ha zeri, ossia l'equazione omogenea non ha autovalori:

$$D(\lambda) \equiv 1.$$

Ma ricordiamo che è: ⁽¹⁶⁾

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1 \lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots + A_n \frac{\lambda^n}{n} + \dots\right)}$$

[dove A_n è l' n^{ma} traccia del nucleo]; perciò: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) non ammetta autovalori, è che siano nulle tutte le tracce del nucleo $K(x, t)$ corrispondente. Dimostriamo che nelle nostre ipotesi la prima traccia, ossia*

$$A_1 = \int_a^b K(x, x) dx$$

è diversa da zero, e allora il teorema sarà dimostrato. Le nostre ipotesi sono soddisfatte solo in questi due casi: che sia contem-

⁽¹⁶⁾ Cfr. E. GOURSAT — *Cours d'Analyse Mathématique*, [3^e édition; 1923] T. III, p. 374.

poraneamente :

$$(2) \quad A(x) > 0 \quad \text{per } a < x < b \quad \text{e} \quad \begin{cases} C(x) > 0 & \text{per } a < x < c \\ C(x) < 0 & \text{» } c < x < d \\ C(x) > 0 & \text{» } d < x < b, \end{cases}$$

oppure

$$(2)' \quad A(x) < 0 \quad \text{per } a < x < b \quad \text{e} \quad \begin{cases} C(x) < 0 & \text{per } a < x < c \\ C(x) > 0 & \text{» } c < x < d \\ C(x) < 0 & \text{» } d < x < b. \end{cases}$$

Supponiamo che si verifichi il caso (2) [per il caso (2)' la dimostrazione è analoga]. Abbiamo :

$$A_1 = \int_a^c K(x, x) dx + \int_c^d K(x, x) dx + \int_d^b K(x, x) dx.$$

Si vede subito che il primo e terzo termine sono positivi; infatti [cfr. fig. 1, e poi la quarta delle (II) del § 4, tenendo presente la (1) di questo §]

$$\begin{aligned} \int_a^c K(x, x) dx &= -\frac{1}{h(c, d)} \int_a^c \alpha_4(x, c) \tau(a, x) dx = \\ &= \frac{1}{h(c, d)} \int_a^c \alpha_4(x, c) \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} \left[\frac{1}{2} C(x) (x-v)^2 + A(x) \right] dx dv. \end{aligned}$$

Ricordando $\vartheta(x) > 0$ in (a, b) ; $h(c, d) > 0$; dalle (2) e dalla figura 3, segue

$$\int_a^c K(x, x) dx > 0.$$

Così, analogamente,

$$\int_d^b K(x, x) dx > 0.$$

È poi :

$$\begin{aligned} h(c, d) \int_c^d K(x, x) dx &= \int_c^d \left\{ \alpha_1(x, d) \tau(b, x) - \alpha_1(x, b) \tau(d, x) \right\} dx = \\ &= \int_c^d \left\{ \alpha_1(x, d) \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} \left[\frac{1}{2} C(x) (x-v)^2 + A(x) \right] dv - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1(x, b) \int_x^d \frac{1}{\vartheta(v)} \left[\frac{1}{2} C(x) (x-v)^2 + A(x) \right] dv \right\} dx. \end{aligned}$$

In questa espressione sia il termine con $A(x)$ che quello con $C(x)$ sono positivi. Infatti il primo è [cfr. (2) del § 4]

$$\begin{aligned} &\int_c^d A(x) \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) \\ &\quad (\xi - z) (u - z) dx du dz d\xi dv - \\ &- \int_c^d A(x) \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) \\ &\quad (\xi - z) (u - z) dx du dz d\xi dv = \\ &= \int_c^d A(x) \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} (u - z) \left\{ (\xi - u) (\xi - z) - \right. \\ &\quad \left. - (v - u) (v - z) \right\} \cdot dx du dz d\xi dv, \end{aligned}$$

che è positivo. Il termine con $C(x)$ si trova essere, con procedimento analogo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_c^d C(x) \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(v)} (u - z) \left\{ (\xi - u) \right. \\ &\quad \left. (\xi - z) (x - v)^2 - (v - u) (v - z) (x - \xi)^2 \right\} \cdot dx du dz d\xi dv, \end{aligned}$$

che è positivo, essendo $C(x) < 0$ nel rispettivo intervallo,

$$u - z < 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} & (\xi - u)(\xi - z)(x - v)^2 - (v - u)(v - z)(x - \xi)^2 = \\ & = (v - \xi)(x - u)(v - z)(\xi - x) + (v - \xi)(v - x)(\xi - u)(x - z), \end{aligned}$$

che manifestamente è positiva, muovendosi le variabili negli intervalli assegnati. Quindi nel caso (2) è $A_1 > 0$.

§ 9. - COROLLARIO.

Data l'equazione: ⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned} (1) \quad & [\vartheta(x)y'(x)]''' + \lambda[(A(x) + \varepsilon)y(x)]'' + \\ & + \lambda[B(x)y(x)]' + \lambda C(x)y(x) = 0 \end{aligned}$$

con le ipotesi $\vartheta'''(x), A''(x), B'(x), C'(x)$ continue in (α, β) , $\vartheta(x) > 0$ in (α, β) , λ ed ε costanti; e dati in (α, β) quattro punti a, b, c, d , $[a < c < d < b]$ qualsiasi; allora, accettato al più un valore di ε , esiste almeno un autovalore λ cui corrisponde una soluzione dell'equazione che si annulla nei punti a, b, c, d prefissati.

Infatti il nucleo dell'equazione integrale ottenuta operando sulla (1) con il procedimento del § 2 è [v. § 8] lipschitziano e se scriviamo che la prima traccia deve annullarsi otteniamo una relazione in cui il coefficiente di ε è positivo [ripetere procedimento del § 8], quindi si ha un'espressione lineare in ε col coefficiente di ε diverso da zero che può annullarsi al massimo per un valore di ε .

⁽¹⁷⁾ In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

TERZA PARTE

Una classe di equazioni che ammettono infiniti autovalori e tutti reali.

§ 10. - TEOREMA

Data l'equazione :

$$(1) \quad [\vartheta(x) y'(x)]''' + \lambda [A(x) y(x)]'' + \lambda [B(x) y(x)]' + \\ + \lambda C(x) y(x) = 0,$$

con le ipotesi $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $B'(x)$, $C(x)$ continue in (α, β) , $\vartheta(x) > 0$ in (α, β) , λ costante; e dati in (α, β) quattro punti a, b, c, d [$a < c < d < b$] qualsiasi; consideriamo le tre funzioni:

$$F_1(t) = 2 \int_a^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s-v) ds dv$$

$$F_2(t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s-v) (2t-s-v) ds dv$$

$$F_3(t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s-v) [t(t-s-v) + sv] ds dv;$$

se si ha :

$$A(t) = F_3(t) \Phi(t), \quad B(t) = F_2(t) \Phi(t), \quad C(t) = F_1(t) \Phi(t),$$

dove $\Phi(t)$ è una funzione continua e di segno costante in (a, b) e ivi derivabile due volte con derivata seconda continua, allora l'equazione (1) ammette infiniti autovalori tutti reali, cui corrispondono integrali dell'equazione che si annullano nei punti a, b, c, d prefissati.

Infatti si ha ora, [cfr. (4) del § 4]

$$\begin{aligned}\tau(x, t) &= \int_t^x \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s-v) [(t-\xi)^2 - (2t-s-v)(t-\xi) + \\ &\quad + t(t-s-v) + sv] d\xi ds dv \cdot \Phi(t) = \\ &= \int_t^x \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (s-v)(\xi-s)(\xi-v) d\xi ds dv \cdot \Phi(t),\end{aligned}$$

da cui si ha subito [cfr. regola a) del § 3]

$$\tau(c, t) \equiv \tau(d, t) \equiv 0;$$

e inoltre:

$$\begin{aligned}\tau(a, t) &= \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(s-\xi)(v-\xi) d\xi ds dv \cdot \Phi(t) = \\ &= \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(s-\xi)(v-\xi) d\xi ds dv \cdot \Phi(t) = \\ &= \alpha_1(t, d) \Phi(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(b, t) &= - \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(\xi-s)(\xi-v) d\xi ds dv \cdot \Phi(t) = \\ &= - \int_a^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(\xi-s)(\xi-v) d\xi ds dv \cdot \Phi(t) = \\ &= -\alpha_4(t, c) \Phi(t).\end{aligned}$$

Si ha allora, dalle (II) del § 4 ;

$$h(c, d) K_1(x, t) = -\alpha_1(x, d) \alpha_4(t, c) \cdot \Phi(t)$$

$$K_2(x, t) = K_1(x, t)$$

$$h(c, d) K_4(x, t) = -\alpha_4(x, c) \alpha_1(t, d) \cdot \Phi(t)$$

$$K_3(x, t) \equiv K_4(x, t) .$$

Inoltre la (5) del § 4 diventa ora :

$$\alpha_1(x, d) \tau(b, t) + \alpha_4(x, c) \tau(a, t) - h(c, d) \tau(x, t) = 0 ,$$

da cui, [cfr. (II) del § 4] :

$$K_2(x, t) = K_1(x, t) , \quad K_6(x, t) = K_4(x, t) .$$

Si ha infine, per il nucleo, l'espressione :

$$\text{per } x \leq t \quad K(x, t) = -\frac{1}{h(c, d)} \alpha_1(x, d) \alpha_4(t, c) \Phi(t)$$

$$\text{per } x \geq t \quad K(x, t) = -\frac{1}{h(c, d)} \alpha_4(x, c) \alpha_1(t, d) \Phi(t) .$$

Si ha quindi un *nucleo di Schmidt* ⁽¹⁸⁾ nel quadrato Q , e i suoi autovalori, a meno del fattore costante

$$-h(c, d) \operatorname{sgn} \Phi(t) ,$$

coincidono con quelli del nucleo simmetrico $\overline{K}(x, t)$ così definito

$$\text{per } x \leq t \quad \overline{K}(x, t) = \alpha_1(x, d) \alpha_4(t, c) \sqrt{\Phi(x) \Phi(t)}$$

$$\text{per } x \geq t \quad \overline{K}(x, t) = \alpha_4(x, c) \alpha_1(t, d) \sqrt{\Phi(x) \Phi(t)} .$$

⁽¹⁸⁾ Cfr. E. GOURSAT, loc. cit., p. 457.

Un tale nucleo ammette autovalori soltanto reali e noi proveremo che essi sono in numero infinito. Ammettiamo per assurdo che essi siano un numero finito n , precisamente siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; indicando con

$$\sqrt{\Phi(x)} u_1(x), \sqrt{\Phi(x)} u_2(x), \dots, \sqrt{\Phi(x)} u_n(x);$$

$$\int_a^b \Phi(x) u_i^2(x) dx = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

le autofunzioni corrispondenti, le $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ sono autofunzioni dell'equazione integrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt,$$

sono perciò derivabili e si annullano in a, c, d, b ; inoltre, per $x \geq t$, si ha: ⁽¹⁹⁾

$$\alpha_1(t, d) \alpha_4(x, c) = \frac{u_1(x) u_1(t)}{\lambda_1} + \dots + \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n},$$

e in particolare, per qualunque x in (a, b) ,

$$\alpha_1(x, d) \alpha_4(x, c) = \sum_1^n \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i},$$

da cui, derivando rispetto a x , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_1'(x, d) \alpha_4(x, c) + \alpha_1(x, d) \alpha_4'(x, c) = \\ = 2 \sum_1^n \frac{u_i(x) u_i'(x)}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

⁽¹⁹⁾ Cfr. E. GOURSAT, loc. cit., p. 442.

e per $x = a$, essendo :

$$\alpha_1(a, d) = 0, \quad u_1(a) = 0,$$

ne segue :

$$[\alpha_1'(x, d)]_{x=a} \cdot \alpha_4(a, c) = 0,$$

la quale è assurda, essendo, [cfr. fig. 2 e 3]

$$\alpha_4(a, c) = h(c, d) > 0, \quad [\alpha_1'(x, d)]_{x=a} > 0.$$

Bisogna quindi ammettere l'esistenza di infiniti autovalori.
