RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Sui sistemi di equazioni integrali non lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 7 (1936), p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1936__7__1_0>

SUI SISTEMI DI EQUAZIONI INTEGRALI NON LINEARI

di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI *a Roma.*

Un sistema di equazioni integrali lineari è sempre equivalente ad una sola equazione integrale lineare. E ciò è notissimo.

L'analisi, invece ([1]), del sistema

$$
\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \varphi_i(x) + \sum_1^n{}_j \int_a^b K_{i,j}(x, y)\, f_{i,j}(y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))\, dy = \\ = g_i(x) \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}
$$

non si può di solito ricondurre allo studio di una sola equazione del tipo

$$
\text{(2)} \qquad \varphi(x) + \int_a^b K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy = g(x),
$$

studio che, intrapreso da HAMMERSTEIN ([2]), è stato poi ripreso da CACCIOPPOLI ([3]) usufruendo di un criterio sull'esistenza e l'unicità

([1]) Cf. M. GOLOMB, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen* [Mathematische Zeitschrift, vol. 39 (1934 - 1935), pagg. 45 - 75], nota ([4]) a piè di pag. 48.

([2]) A. HAMMERSTEIN, *Nichtlinearen Integralgleichungen nebst Anwendungen* [Acta Mathematica, vol. 54 (1930), pagg. 117 - 176].

([3]) R. CACCIOPPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, vol. III (1932), pagg. 1-15], n. 3 e n. 5.

di una radice per un'equazione funzionale ch'egli deduce da un suo teorema circa l'invertibilità completa di una trasformazione funzionale.

Ma se si guardano le cose da un punto di vista più elevato, si riconosce che quanto si è detto nel caso lineare conserva il suo valore, sia pure in parte, anche nel caso non lineare.

Precisamente: è vero, sì, che le (1) non si possono interpretare come un'equazione unica, ove a questa si imponga di essere del tipo della (2); ma non è men vero che le (1) sono esse stesse un'unica equazione nello spazio funzionale descritto dalla n-pla $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

E quanto si è detto non si riduce affatto ad un mero cambiamento formale di parole, senza nessun vantaggio per lo studio della risolubilità delle (1), in virtù appunto della generalità del teorema di CACCIOPPOLI, che vale per trasformazioni funzionali operanti sugli elementi di uno spazio lineare, metrico, completo qualunque.

Anzi, l'osservazione fatta sussistendo per un sistema di equazioni funzionali qualunque, si comprende come il teorema in discorso possa, fra le tante interpretazioni, ricevere anche quella di risultato relativo all'esistenza di una ed una sola n-pla di radici per un sistema siffatto in n incognite.

I criteri, cui in tal modo si perviene, sono qui esplicitamente enunciati - in vista dell'uso da farne per i sistemi di equazioni integrali non lineari - nel capitolo I. Naturalmente essi non hanno bisogno di dimostrazioni più complete di quelle espresse dal notare che nell'analisi generale un sistema di trasformazioni funzionali si può sempre interpretare [4] come una sola trasformazione funzionale.

Nel capitolo II studio poi il sistema (1), indicando dei criteri per l'esistenza di un'unica sua soluzione, nell'ipotesi che

$$K_{i,j}(x, y) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

se

$$i \neq i,$$

[4] Cfr. i nn. 2 e 3 di questa Memoria.

di guisa che al sistema effettivamente studiato si può dare la forma

$$(3)\qquad \varphi_i(x)+\int^b K_i(x,y)\, f_i(y,\varphi_1(y),\ldots,\varphi_n(y))\,dy=g_i(x)\quad (i=1,\ldots,n).$$

Per il sitema (3), che è stato già preso in esame da GOLOMB (5), darò dei teoremi che estendono risultati validi per la (2).

Come è noto (6), la (2) ammette una ed una sola soluzione, se

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial u} f(x,\, u) \geq 0\,,$$

il nucleo $K(x,\, y)$ essendo simmetrico, semidefinito positivo ed essendo inoltre soddisfatte delle ipotesi di continuità, sulle quali qui sorvoliamo (7).

(5) Loco citato nota (1).

Sui risultati di GOLOMB relativi al sistema (3), SCHAUDER (Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, vol. 9, pag. 312) sembra fare delle riserve; a proposito di uno di essi si esprime nel modo che segue «In der... Voraussetzung (5 b) zu Satz 1 soll es wahrscheinlich $k^2 < \lambda_1$ heissen, weil sonst Satz 1 falsch wäre».

(6) HAMMERSTEIN, loco citato nota (2), § 8; CACCIOPPOLI, loco citato nota (3), n. 5; la condizione è stata generalizzata da GOLOMB, cfr. la nota (11).

(7) Il nucleo $K(x,\, y)$ può anche essere discontinuo e limitato, subordinatamente alle esigenze della teoria generale delle equazioni integrali; cfr. loco citato nota (3), n. 4.

Il nucleo $K(x\,,\, y)$ è semidefinito positivo (*positiv definit* secondo HILBERT), se

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K(x,\; y)\, p\,(x)\, p\,(y)\, dx\, dy \geq 0$$

per ogni funzione continua $p\,(x)$; è definito positivo (*eigentlich positiv definit* secondo HILBERT), se è semidefinito positivo e se la

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K\,(x,\; y)\, p\,(x)\, p\,(y)\, dx\, dy = 0$$

trae la

$$p\,(x) \equiv 0\,.$$

Orbene questa proprietà è trasportata alle (3) dal teorema del n. 19.

Esimendomi dall'enunciarlo fin d'ora in modo completo, faccio rilevare soltanto che l'ipotesi espressa dalla (4) sarà sostituita da quella che la forma quadratica nelle $\mu_1, \dots, \mu_n$

$$\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{i,j}^{n} {}_1\, h_{i,j}(y, u_1, \dots, u_n)\, \mu_i \mu_j, \tag{5}$$

dove

$$h_{i,j}(y, u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(y, u_1, \dots, u_n),$$

sia sempre, o definita positiva, o semidefinita positiva [8].

Nel paragrafo 6 questo criterio è applicato allo studio del problema ai limiti

$$z_i(a) = \eta_i, \quad z_i(b) = \overline{\eta}_i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{6}$$

per il sistema di equazioni

$$z_i'' = f_i(x, z_1, \dots, z_n).$$

Problema il quale si riconduce appunto alle (3) - $K_i(x, y)$ sarà allora la funzione di Green per l'espressione z'', $g_i(x)$ la funzione lineare che assume in a e b i valori ivi prescritti per z -; anzi, la condizione relativa alla forma (5) è appunto suggerità dal fatto che il problema (6), con $\eta_i = \overline{\eta}_i = 0$, per il sistema lineare ed autoaggiunto [9]

$$\begin{aligned} z_1'' &= q_{1,1}(x) z_1 + \dots + q_{1,n}(x) z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (q_{i,j}(x) = q_{j,i}(x)) \\ z_n'' &= q_{n,1}(x) z_1 + \dots + q_{n,n}(x) z_n \end{aligned}$$

[8] Se la forma $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_n)$ è definita, i nuclei $K_i(x, y)$ dovranno essere simmetrici e semidefiniti positivi; se semidefinita, simmetrici e definiti positivi.

[9] G. Cimmino, *Sui sistemi di infinite equazioni differenziali lineari con infinite funzioni incognite* [Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. V (1933), pagg. 273-315], pag. 289.

ammette sempre una ed una sola soluzione, se la forma quadratica

$$\sum_{1}^{n}{}_{i,j} q_{i,j}(x)\mu_i\mu_j$$

è semidefinita positiva ([10]).

Nel paragrafo 7 viene poi indicato per il sistema (3) l'equivalente di un'altra proposizione, relativa alla (2), secondo la quale la (4) può essere sostituita dalla

$$\left|\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)\right| < \alpha < \lambda_1 \qquad (\alpha = \text{cost.})$$

– λ_1 essendo il primo valore eccezionale (autovalore) del nucleo simmetrico e semidefinito positivo $K(x, y)$ – senza che venga a mancare l'esistenza e l'unicità della soluzione della (2) ([11]).

([10]) Cimmino, loco citato nota ([9]), pag. 309, teorema VI.

Il teorema di Cimmino non rientra in quello stabilito al n. 20 di questa Memoria; e per la sua validità non è affatto necessaria la simmetria della matrice delle $q_{i,j}(x)$, come Cimmino stesso mi ha comunicato verbalmente.

([11]) Golomb sostituisce la limitazione del testo – dovuta a Hammerstein, loco citato, § 9; vedi anche Caccioppoli, loco citato, n. 5 – con l'altra, unilaterale ed estendente anche la (4),

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \geq -\alpha;$$

cfr. loco citato nota ([1]), pag. 75. (Nella mia Nota *A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari* [in corso di stampa nei Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei] dimostro questo teorema di Golomb con i metodi dovuti a Caccioppoli e seguiti nella Memoria presente).

Alla pag. 63 invece Golomb dedica qualche cenno all'equazione

$$\varphi(x) + \int_a^b F(x, y, \varphi(y))\, dy = 0,$$

che ha formato oggetto di studio anche per V. Niemytzki; ma dei lavori di quest'ultimo non ho potuto prendere una visione diretta, ne sono venuto a conoscenza attraverso le recensioni pubblicate nel Zentralblatt für Mathematik, ecc. [vol. 6, pag. 209; vol. 11, pag. 26 e pag. 404].

CAPITOLO I.

SUGLI ELEMENTI UNITI DELLE TRASFORMAZIONI FUNZIONALI

§ 1. - Sulle radici di un' equazione funzionale.

1. - I TEOREMI DI CACCIOPPOLI E DI HILDEBRANDT - GRAVES. Consideriamo uno spazio funzionale

$$\Sigma$$

metrico e *lineare*, cioè (12) un insieme di *elementi* (*punti* di Σ) per i quali siano definite la *moltiplicazione* per una costante numerica (variabile, o nel corpo reale, o nel corpo complesso); la *somma* $\varphi_1 + \varphi_2$ e (quindi) la *differenza* $\varphi_1 - \varphi_2$ di due di essi, φ_1 e φ_2, e la loro *distanza*, come *norma* o *distanza dall' origine* $\| \varphi_1 - \varphi_2 \|$ della differenza $\varphi_1 - \varphi_2$.

E supponiamo inoltre che Σ sia *completo*, cioè tale da ammettere il criterio di convergenza di CAUCHY.

Data una *trasformazione univoca e continua*

$$\chi = S[\varphi] \tag{7}$$

di Σ in una sua porzione, accanto alla (7) consideriamo la trasformazione

$$T[\varphi] \tag{8}$$

definita dall' uguaglianza

$$\psi = T[\varphi] = \varphi - S[\varphi]. \tag{9}$$

(12) Per una esposizione completa dei postulati, cui debbono soddisfare gli elementi di uno spazio quale Σ, rimando a T. H. HILDEBRANDT - L. M. GRAVES, *Implicit functions and their differentials in general analysis* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 29 (1927), pagg. 126-153], n. 1.

Allora:

La trasformazione (8) *è invertibile senza eccezioni* (*completamente invertibile*), *e quindi la* (7) *ammette uno ed un solo elemento unito, vale a dire la*

$$\varphi - S[\varphi] = 0$$

ammette una ed una sola radice, se essa (8)

α) *trasforma in successioni convergenti soltanto successioni compatte, cioè tali che ogni loro sottosuccessione ne contenga un'altra convergente;*

e se

β) *è localmente intertibile, cioè invertibile nell'intorno di due punti omologhi.*

È questo il teorema di Caccioppoli (13).

Il teorema di Hildebrandt–Graves poi fornisce un criterio per la invertibilità locale della $T[\varphi]$.

Precisamente, detta $T[\varphi]$ *differenziabile in modo continuo* se sussiste la formula di decomposizione

$$T[\varphi + \delta\varphi] - T[\varphi] = D[\varphi, \delta\varphi] + R[\varphi, \delta\varphi],$$

dove

$$D[\varphi, \delta\varphi]$$

è un funzionale lineare in $\delta\varphi$ e uniformemente continuo rispetto a $(\varphi, \delta\varphi)$, al variare di φ e $\delta\varphi$ in campi limitati, mentre

$$\| R[\varphi, \delta\varphi] \|$$

e un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a $\| \delta\varphi \|$, il teorema di Hildebrandt–Graves (14) assicura, in particolare, che

La trasformazione $T[\varphi]$ *è invertibile nell'intorno di* $\varphi = \varphi^0$,

(13) Loco citato nota (3), n. 6.
(14) Loco citato nota (12), n. 18.

se $T[\varphi]$ *è differenziabile in modo continuo e se è invertibile (completamente) la corrispondenza lineare*

$$d\psi = D[\varphi^0, d\varphi]$$

fra i differenziali di ψ *e di* φ (15).

Caccioppoli ha anche indicato una condizione sufficiente per la α). Eccone una formulazione generale (16).

Ad ogni punto φ di Σ associamo un conveniente numero (reale e) non negativo

$$\sigma[\varphi],$$

scarto di φ dall'origine.

Allora:

La α) *è certo soddisfatta, se* $S[\varphi]$ *muta in una successione compatta ogni successione*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

di punti di Σ, *per la quale sia*

$$\sigma[\varphi_i] \leq c \qquad (c = \text{cost.}; \; i = 1, 2, \ldots),$$

e se al divergere di

$$\sigma[\varphi]$$

diverge anche

$$\|\psi\|,$$

la ψ *essendo data dalla* (9).

(15) Vedi anche Caccioppoli, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. XVI (1932), pagg. 390-395 e 484-489], n. 1.

(16) Loco citato nota (3), nn. 1, 2 e 6.

§ 2. - Sulle radici di un sistema di equazioni funzionali.

2. - Posizione del problema e teoremi risolutivi.

Consideriamo ora i seguenti *sistemi di trasformazioni funzionali continue e univoche*

$$\chi_i = S_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

e

$$\psi_i = T_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \varphi_i - S_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n], \tag{11}$$

le φ_i*, le* χ_i *e* (quindi) *le* ψ_i *essendo punti di uno stesso spazio lineare, metrico, completo* Σ_i*; le* φ_i *potendo comunque variare in* Σ_i*, senza che le* S_i *perdano significato;* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ *essendo legati all'unica condizione che la costante numerica* ν*, per cui ha senso il prodotto* $\nu\varphi_i$*, sia, o sempre reale, o sempre complessa, qualunque sia* i.

3. - Come è noto [17], le n-ple $\varphi \equiv (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, φ_i variando in Σ_i, descrivono uno spazio Σ, che riesce lineare, metrico, completo, se, datine due elementi

$$\varphi' \equiv (\varphi_1', \ldots, \varphi_n'), \quad \varphi'' \equiv (\varphi_1'', \ldots, \varphi_n''),$$

si pone

$$\nu'\varphi' + \nu''\varphi'' = (\nu'\varphi_1' + \nu''\varphi_1'', \ldots, \nu'\varphi_n' + \nu''\varphi_n''),$$

ν' e ν'' essendo costanti numeriche (reali o complesse a seconda della natura dei Σ_i), mentre come valore della distanza $\|\varphi' - \varphi''\|$ si assume il più grande dei numeri $\|\varphi_1' - \varphi_1''\|, \ldots, \|\varphi_n' - \varphi_n''\|$.

Allora, se ad ogni punto

$$\varphi \equiv (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

di Σ facciamo corrispondere il punto

[17] Loco citato nota [12], n. 3.

$$\chi \equiv (S_1[\varphi_1, \ldots, \varphi_n], \ldots, S_n[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]),$$

otteniamo una trasformazione

$$\chi = S[\varphi] \tag{12}$$

equivalente alle (10); mentre la

$$\psi = T[\varphi] = \varphi - S[\varphi] \tag{13}$$

è equivalente alle (11).

4. – L'applicazione del teorema di Caccioppoli alle (12) e (13) ci permette senz'altro di affermare che:

Il sistema

$$\varphi_i - S_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ammette una ed una sola soluzione, se

α_1) *risulta essere formata da successioni compatte ogni n-pla di successioni*

$$\varphi_i^1, \varphi_i^2, \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

le φ_i^j essendo punti di Σ_i, che dalle (11) *sia trasformata in una n-pla di successioni convergenti;*

e se

β_1) *le* (11) *definiscono fra le n-ple*

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), (\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

una trasformazione localmente invertibile.

5. Condizioni sufficienti per la α_1).

È naturalmente, associato ad ogni n-pla $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un conveniente numero non negativo

$$\sigma[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$$

scarto di $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ dall'origine:

La condizione α_1) *è certo soddisfatta, se* $S_1, \ldots, S_n$ *mutano in successioni compatte ogni n-pla di successioni*

$$\varphi_i^1,\ \varphi_i^2, \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

per le quali sia

$$\sigma\,[\varphi_1^j, \ldots, \varphi_n^j] \leq c \quad (c = \mathrm{cost.}\,;\ j = 1, 2, ..),$$

e se al divergere di

$$\sigma\,[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$$

diverge anche il più grande degli n numeri

$$\|\psi_1\|, \ldots, \|\psi_n\|,$$

le ψ_i *essendo date dalle* (11).

6. – Condizioni sufficienti per la β_1).

Supponiamo ora che ciascheduna delle $T_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ sia differenziabile in modo continuo.

Supponiamo cioè che per ogni valore dell'indice i sussista una formula di decomposizione del seguente tipo

$$T_i[\varphi_1 + \delta\varphi_1, \ldots, \varphi_n + \delta\varphi_n] - T_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] =$$
$$= D_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \delta\varphi_1, \ldots, \delta\varphi_n] + R_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \delta\varphi_1, \ldots, \delta\varphi_n],$$

dove

$$D_i,\ R_i$$

sono punti di Σ_i,

$$D_i$$

essendo un funzionale lineare rispetto a

$$\delta\varphi_1, \ldots, \delta\varphi_n$$

ed uniformemente continuo rispetto a $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \delta\varphi_1, \ldots, \delta\varphi_n)$

al variare delle φ_i e dei $\delta\varphi_i$ in campi limitati, e

$$\| R_i \|$$

essendo un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a

$$\| \delta\varphi_1 \| + \dots + \| \delta\varphi_n \|$$

o, il che fa lo stesso, rispetto al più grande degli n numeri

$$\| \delta\varphi_1 \|, \dots, \| \delta\varphi_n \| .$$

Allora anche la (13) è differenziabile in modo continuo; e, applicando ad essa il teorema di HILDEBRANDT - GRAVES, si ha subito che:

Se le

$$T_i[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$$

sono differenziabili in modo continuo e se per

$$\varphi_1 = \varphi_1^0, \dots, \varphi_n = \varphi_n^0$$

è invertibile la corrispondenza lineare posta dalle

$$\vartheta_i = D_i[\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0, \tau_i, \dots, \tau_n] \qquad (i = 1, \dots, n)$$

fra le ϑ_i e le τ_i; allora la trasformazione definita dalle (11) *è invertibile nell'intorno di $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$.*

CAPITOLO II.

SUI SISTEMI DI EQUAZIONI INTEGRALI NON LINEARI

§ 3. - **Un criterio generale di risolubilità.**

7. - POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Consideriamo ora le (3), cioè le equazioni

$$\varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) f_i(y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))\, dy = g_i(x) \quad (i=1, \dots, n),$$

supponendo *le funzioni* (reali, come reali saranno tutte le quantità con le quali avremo a che fare)

$$K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$$

continue nel quadrato

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b,$$

mentre le funzioni

$$f_i(y, u_1, \ldots, u_n)$$

lo saranno nell' insieme

$$a \leq y \leq b, \quad -\infty < u_1 < +\infty, \ldots, -\infty < u_n < +\infty,$$

nel quale anzi saranno dotate di derivate parziali, rispetto alle u_i, *continue; le*

$$g_i(x)$$

poi saranno continue nell' intervallo

$$a \leq x \leq b.$$

8. - Posto allora

$$S_i[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = g_i(x) - \int_a^b K_i(x, y) f_i(y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))\, dy$$

il sistema (3) diventa

$$(14) \qquad \psi_i(x) = \varphi_i(x) - S_i[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = 0.$$

Inoltre, definita la distanza di due funzioni continue nell' intervallo

$$a \leq x \leq b$$

assumendola uguale al massimo del modulo della loro differenza, i funzionali

$$S_1, \ldots, S_n$$

sono evidentemente funzionali continui di $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, al variare di $\varphi_i(x)$ in Σ_i - se Σ_i è lo spazio lineare, metrico, completo delle funzioni continue nell'intervallo $a \leq x \leq b$ pensato come descritto da $\varphi_i(x)$ -.

E ancora: in virtù delle ipotesi di derivabilità fatte sulle $f_1, \ldots, f_n$, i funzionali $S_1, \ldots, S_n$ sono differenziabili in modo continuo; lo saranno quindi anche

$$\varphi_1 - S_1, \ldots, \varphi_n - S_n.$$

E precisamente, detti

$$\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$$

gli incrementi rispettivi di $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ e

$$\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_n(x)$$

i rispettivi differenziali di $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$, si ha [18]

$$\vartheta_i(x) = \tag{15}$$
$$\tau_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \sum_1^n{}_j h_{i,j}(y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))\, \tau_j(y)\, dy,$$

dove, in conformità di quanto si è fatto nell'introduzione,

$$h_{i,j}(y, u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(y, u_1, \ldots, u_n). \tag{16}$$

9. - Allora, in virtù dei risultati esposti nel capitolo precedente,

Nelle ipotesi poste, il sistema (3) *è certo risolubile in uno*

[18] Cfr. Caccioppoli, loco citato nota [3], n. 3.

ed un solo modo, se

I) *ad ogni n*-pla $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ *si può associare uno scarto*

$$\sigma[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

tale, che $S_1, \ldots, S_n$ mutino in successioni compatte ogni n-pla *di successioni*

$$\varphi_i^1(x), \varphi_i^2(x), \ldots$$

per le quali sia

$$\sigma[\varphi_1^j(x), \ldots, \varphi_n^j(x)] \leq c \qquad (c = \text{cost.}); \tag{17}$$

e tale, che, al divergere di

$$\sigma[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)],$$

diverga anche il più grande dei numeri

$$\| \psi_1(x) \|, \ldots, \| \psi_n(x) \|,$$

$\psi_i(x)$ *essendo data dalle* (14);
e se

II) *il sistema lineare* (15) *si può sempre risolvere* (*in maniera univoca*) *rispetto alle*

$$\tau_i(x),$$

qualunque siano le

$$\vartheta_i(x).$$

§ 4. - Condizioni sufficienti per la I).

10. – Ipotesi e notazioni.

Supponiamo i nuclei

$$K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$$

simmetrici e semidefiniti positivi.

Definiamo poi lo scarto di una n–pla

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

di funzioni continue nell' intervallo $a \leq x \leq b$ mediante la

$$\sigma[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = \sum_1^n {}_i \int_a \left| f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \right| dx. \tag{18}$$

E poniamo ancora

$$s[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = \sum_1^n {}_i \int_a^b \varphi_i(x) \quad {}_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))\, dx. \tag{19}$$

11. – Un primo criterio per la I).

Se lo scarto definito mediante la (18) *è sempre limitato* [19],

$$\sigma[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \leq c \qquad (c = \text{cost.}), \tag{20}$$

la condizione I) *è certo soddisfatta.*

Invero della I) vi è a prendere in considerazione solo la prima parte – la seconda imponendo una condizione circa il comportamento di $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, nell' *eventualità* [20] della divergenza dello scarto σ –; e questa prima parte è evidentemente soddisfatta.

Infatti, non appena le

$$\varphi_i^1(x),\ \varphi_i^2(x), \dots$$

soddisfanno alla (17), lo scarto essendo definito dalla (18), le funzioni

$$\chi_i^1(x),\ \chi_i^2(x), \dots, \tag{21}$$

[19] È questo il caso, se le $f_i(y, u_1, \dots, u_n)$ sono limitate.

[20] Loco citato nota [3], nn. 2 e 3.

dove

$$\chi_i^l(x) = S_i[\varphi_1^l(x), \dots, \varphi_n^l(x)] =$$

$$= g_i(x) - \int_a^b K_i(x, y) f_i(y, \varphi_1^l(y), \dots, \varphi_n^l(y))\, dy,$$

sono equicontinue ed equilimitate; e quindi la successione (21) è compatta, in virtù di un lemma notissimo di ASCOLI–ARZELÀ.

12. – UN SECONDO CRITERIO.

Se la (20) non è soddisfatta, possiamo sempre affermare che *La* I) *è verificata, purchè sia*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{s[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]}{\sigma[\varphi_1(x) \dots, \varphi_n(x)]} = +\infty, \tag{22}$$

$s[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$ *essendo dato dalla* (19).

Infatti, in queste ipotesi, la prima parte della I) è ancora soddisfatta – lo si riconosce con lo stesso ragionamento usato nel n. 11 –.

Quando alla seconda parte, moltiplichiamo la

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \varphi_i(x) - g_i(x) + \\ &+ \int_a^b K_i(x, y) f_i(y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))\, dy \qquad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{23}$$

per

$$f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

sommiamo poi membro a membro le relazioni ottenute, e integriamo rispetto ad x fra a e b; abbiamo così

$$\begin{aligned} &\sum_1^n {}_i \int_a^b [\psi_i(x) + g_i(x)] f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))\, dx - s[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = \\ &= \sum_1^n {}_i \int_a^b \int_a^b K_i(x, y) f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) f_i(y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))\, dx\, dy \geq 0, \end{aligned} \tag{24}$$

perchè i nuclei $K_i(x, y)$ sono tutti semidefiniti positivi.

Dalle (22) e (24) segue immediatamente

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sigma[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]} \sum_1^n {}_i \int_a^b \psi_i(x) f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))\, dx = +\infty\,;$$

e quindi deve divergere il più grande dei massimi di

$$|\psi_1(x)|, \dots, |\psi_n(x)|.$$

13. - Osservazione.

Si noti, cosa utile per il seguito, che:

I criteri precedenti continuano a sussistere, se nella definizione di

$$\sigma[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)], \quad s[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$$

si sostituiscono le

$$f_i(y, u_1, \dots, u_n)$$

con delle funzioni (continue)

$$\overline{f}_i(y, u_1, \dots, u_n)$$

tali che le differenze $f_i - \overline{f}_i$ *siano limitate,*

$$|f_i(y, u_1, \dots, u_n) - \overline{f}_i(y, u_1, \dots, u_n)| \leq c \qquad (c = \text{cost.}).$$

Allora infatti il comportamento delle funzioni definite dalle (23) coincide con quello delle

$$\overline{\psi}_i(x) = \varphi_i(x) - g_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \overline{f}_i(y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))\, dy\,.$$

14. – UN TERZO CRITERIO.

Per completare i risultati di questo paragrafo, indicherò un caso in cui il criterio del n. 12 permette di dare una risposta esauriente.

Poniamo

$$\overline{f}_i(y, u_i) = f_i(y, 0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0) - f_i(y, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

di guisa che

$$(25) \qquad \overline{f}_i(y, 0) \equiv 0,$$

e supponiamo limitate le differenze $f_i - \overline{f}_i$, per il che occorre e basta che sia

$$| f_i(y, 0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0) - f_i(y, u_1, \ldots, u_n) | < c \quad (c = \text{cost.}),$$

cioè che f_i sia a incremento uniformemente limitato [21] *rispetto a $u_1, \ldots u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$.*

Allora (n. 13) allo studio delle (23) possiamo sostituire quello delle

$$\overline{\psi}_i(x) = \varphi_i(x) - g_i(x) + \int_a^b K_i(x, y)\, \overline{f}_i(y, \varphi_i(y))\, dy\,;$$

e invece di dimostrare la (22) basterà dimostrare quindi la

$$(26) \qquad \lim_{\overline{\sigma} \to +\infty} \frac{\overline{s}\,[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]}{\overline{\sigma}\,[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]} = +\infty,$$

[21] Un' ipotesi analoga è stata fatta da CACCIOPPOLI (loco citato nota [3], n. 4) nello studiare il problema ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie di tipo normale del second' ordine.

se

$$\overline{s}\,[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = \sum_1^n{}_i \int_a^b \varphi_i(x)\,\overline{f}_i(x, \varphi_i(x))\,dx\,;$$

$$\overline{\sigma}\,[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = \sum_1^n \int_a^b |\,\overline{f}_i(x, \varphi_i(x))\,|\,dx\,.$$

Orbene io dico che,

Nelle ipotesi poste, la (26) *è certo soddisfatta, se è sempre*

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\overline{f}_i(y, u_i) \geq 0\,; \tag{27}$$

per il che basta sia sempre

$$h_{i,i}(y, u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_i} f_i(y, u_1, \dots, u_n) \geq 0\,.$$

Infatti dalle (25) e (27) segue intanto

$$u_i \cdot \overline{f}_i(y, u_i) \geq 0\,. \tag{28}$$

Inoltre ([22]) dato ad arbitrio un numero M, si può sempre determinare un numero N tale, che

$$|\,\overline{f}_i(y, u_i)\,| \geq M \qquad (M > 0)$$

implichi

$$|\,u_i\,| \geq N \qquad (N > 0)$$

e che $N \rightarrow +\infty$, se $M \rightarrow +\infty$.

Detta allora E_i la porzione dell'intervallo $a \leq x \leq b$ in cui

([22]) Per questo ragionamento si veda CACCIOPPOLI, loco citato nota ([3]), n. 3.

$|\overline{f}_i(x, \varphi_i(x))| \geq M$ ed e_i la porzione rimanente, è intanto

$$\lim_{\overline{\sigma} \to +\infty} \frac{1}{\overline{\sigma}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]} \sum_1^n{}_i \int_{E_i} |\overline{f}_i(x, \varphi_i(x))| \, dx = 1 \, ;$$

vale a dire, fissato M e detto ε un numero positivo minore di 1, se $\overline{\sigma} \to +\infty$, si avrà definitivamente

$$\sum_1^n{}_i \int_{E_i} |\overline{f}_i(x, \varphi_i(x))| \, dx \geq \varepsilon \, \overline{\sigma}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

Sarà allora, per la (28),

$$\overline{s}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] =$$

$$= \sum_1^n{}_i \int_{E_i} \varphi_i(x) \overline{f}_i(x, \varphi_i(x)) \, dx + \sum_1^n{}_i \int_{e_i} \varphi_i(x) \overline{f}_i(x, \varphi_i(x)) \, dx \geq$$

$$\geq \sum_1^n{}_i \int_{E_i} \overline{f}_i(x, \varphi_i(x)) \cdot \varphi_i(x) \, dx \geq N \cdot \varepsilon \cdot \overline{\sigma}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] \, ;$$

relazione equivalente alla (26), perchè N si può supporre grande a piacere, usufruendo dell' arbitrarietà di M ([23]).

15. – Osservazione. Si noti che nelle ipotesi del n. 14, il sistema (3) si può considerare ottenuto dando *una variazione limitata, ma finita,* al sistema

$$\varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \overline{f}_i(y, \varphi_i(y)) \, dy = g_i(x) \, .$$

([23]) In tutto questo numero gli integrali vanno intesi nel senso di Lebesgue.

E per questo – al pari che per l'altro più generale

$$\varphi_i(x) + \sum_1^n{}_j \int_a^b K_{i,j}(x, y)\, \bar{f}_j(y, \varphi_j(y))\, dy = g_i(x) \text{ –}$$

è vero ch'esso equivale a un'unica equazione del tipo della (2), com'è evidente ([24]).

§ 5 – Condizioni sufficienti per la II) e un criterio di risolubilità per le (3).

16. – Condizioni sufficienti per la II).

Supponiamo ancora *simmetrici* e *semidefiniti positivi* i nuclei $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$.

Supponiamo poi *definita positiva* la forma

$$\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_1^n{}_{i,j} h_{i,j}(y, u_1, \ldots, u_n)\, \mu_i \mu_j,$$

le $h_{i,j}(y, u_1, \ldots, u_n)$ essendo date dalle (16).

17. – *Nelle ipotesi del numero precedente, la condizione* II) *è sempre soddisfatta; vale a dire il sistema lineare*

$$\vartheta_i(x) = \tau_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \sum_1^n{}_j h_{i,j}(y, \tau_1(y), \ldots, \tau_n(y))\, \tau_j(y)\, dy,$$

è sempre risolubile quali si siano le $\vartheta_i(x)$, la risoluzione essendo possibile in un sol modo;

([24]) La equazione in discorso si costruisce con lo stesso procedimento che permette di dedurre da un sistema di equazioni integrali lineari un'unica equazione integrale lineare ad esso equivalente.

per il che basta mostrare ([25]) come le

$$(29)\qquad \tau_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \sum_1^n {}_j\, h_{i,j}(y, \tau_1(y), \ldots, \tau_n(y)) \cdot \tau_j(y)\, dy = 0$$

non ammettono altra soluzione all' infuori della

$$\tau_1(x) \equiv \ldots \equiv \tau_n(x) \equiv 0 .$$

Moltiplichiamo infatti la i-esima delle (29) per

$$\sum_1^n {}_j\, h_{i,j}(x, \tau_1(x), \ldots \tau_n(x)) \cdot \tau_j(x),$$

sommiamo membro a membro e integriamo rispetto ad x, fra a e b; otteniamo così

$$(30)\qquad \int_a^b \Gamma(\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))\, dx =$$

$$= -\sum_1^n {}_i \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x, y) \sum_1^n {}_j\, [h_{i,j}(x, \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))\, \tau_j(x)] \cdot$$

$$\cdot \sum_1^n {}_j\, [h_{i,j}(y, \tau_1(y), \ldots, \tau_n(y))\, \tau_j(y)]\, dx\, dy .$$

Ora il secondo membro di questa relazione è negativo o nullo, data l'ipotesi fatta sui nuclei $K_i(x, y)$; il primo invece è positivo, se le $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$ non sono identicamente nulle, e questo in virtù dell'ipotesi fatta su Γ.

Indi le (29) non ammettono altra soluzione che la

$$\tau_1(x) \equiv \ldots \equiv \tau_n(x) \equiv 0 .$$

([25]) Teorema di FREDHOLM; vedi R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik* [Springer, Berlino, 1924], cap. III, § 2, pag. 102.

18. – La forma $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ è semidefinita positiva.

La condizione II) *è sempre soddisfatta, anche se la forma* $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *è semidefinita positiva, purchè allora i nuclei simmetrici* $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$ *siano definiti positivi; cioè, purchè i nuclei simmetrici* $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$ *siano semidefiniti positivi e completi.*

Supponiamo $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$ definiti positivi.

Allora, se nella (30) il secondo membro non è negativo (nel caso contrario si avrebbe senz'altro un assurdo, poichè il primo membro è positivo o nullo), esso è nullo anzi sono nulli i singoli termini della somma che vi compare, poichè i nuclei $K_i(x, y)$ sono tutti semidefiniti, anzi definiti positivi.

Ma allora, poichè i nuclei $K_i(x, y)$ sono definiti positivi, è identicamente

$$\sum_1^n {}_j\, h_{i,j}(x, \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))\, \tau_j(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

e di qui e dalle (29) si trae subito

$$\tau_1(x) \equiv \ldots \equiv \tau_n(x) \equiv 0 .$$

Per completare la dimostrazione di quanto si è affermato, basta far vedere che è definito positivo ogni nucleo $K_i(x, y)$ che sia simmetrico, semidefinito positivo e completo (*allgemein*, secondo Hilbert), cioè tale che sia completo il sistema (ortogonale, normalizzato)

$$\rho_{i,1}(x),\ \rho_{i,2}(x), \ldots$$

delle sue funzioni eccezionali (autosoluzioni); e che ogni nucleo semidefinito positivo e non completo non è definito positivo.

Ed infatti, se $p(x)$ è una funzione continua, dallo sviluppo notissimo

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x, y)\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy = \sum_1^{+\infty} {}_\nu \frac{1}{\lambda_{i,\nu}} \left[\int_a^b p(x)\, \rho_{i,\nu}(x)\, dx \right]^2,$$

le $\lambda_{i,\nu}$ essendo i valori eccezionali del nucleo $K_i(x, y)$ e quindi essendo dei numeri positivi perchè $K_i(x, y)$ è semidefinito positivo, segue che il primo membro dell'uguaglianza scritta può essere nullo soltanto se sono nulle tutte le coordinate di FOURIER

$$\int_a^b p(x)\, \rho_{i,\nu}(x)\, dx\,;$$

e quindi esso si annulla solo per $p(x)$ identicamente nulla, quando e solo quando il sistema delle $\rho_{i,\nu}(x)$ è completo.

19. – UN COROLLARIO.

Tenuto conto di quanto è detto nei numeri 14, 17 e 18, abbiamo che:

Il sistema (3) *è risolubile in uno ed in un solo modo, se*

$$f_i(y, u_1, \ldots, u_n) \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n)$$

è a incremento uniformemente limitato rispetto a $u_1, \ldots, u_{i-1}$, $u_{i+1}, \ldots, u_n$*; e se i nuclei* $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$ *sono simmetrici e semidefiniti positivi, mentre è definita positiva la forma* $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, *oppure se la forma* Γ *è semidefinita positiva, purchè allora siano definiti positivi* (*semidefiniti positivi e completi*) *i nuclei simmetrici* $K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y)$.

Si noti che se $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ è semidefinita (definita) positiva, allora le (27) sono *ipso facto* verificate.

§ 6. – Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenzali del secondo ordine.

20. – SUI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Se nelle (3) poniamo

$$K_i(x, y) = K(x, y) = \frac{1}{b-a}(x-a)(b-y)\,,$$

per $a \leq x \leq y$, $a \leq y \leq b$, e

$$K_i(x, y) = K(x, y) = \frac{1}{b-a}(y-a)(b-x),$$

per $y \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, i nuclei simmetrici $K_i(x, y)$ sono completi e semidefiniti positivi ([26]); non solo, ma $K(x, y)$ è anche la funzione di GREEN in riguardo al problema al contorno corrispondente all' integrazione dell' equazione $z''(x) = p(x)$, subordinatamente alle condizioni ai limiti $z(a) = 0$, $z(b) = 0$ ([27]); indi, se nelle (3) supponiamo che $g_i(x)$ sia la funzione lineare uguale ad η_i per $x = a$ ed a $\bar{\eta}_i$ per $x = b$, le (3) equivalgono alle

$$(31) \qquad \begin{gathered} z_i''(x) = f_i(x, z_1(x), \ldots, z_n(x)) \\ z_i(a) = \eta_i, \; z_i(b) = \bar{\eta}_i. \end{gathered}$$

Il teorema del n. 18 si traduce quindi nel seguente:

Le (31) *si possono sempre soddisfare, e in una sola maniera, se la forma*

$$\sum_{1}^{n}{}_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(y, u_1, \ldots, u_n)\, \mu_i\, \mu_j$$

([26]) Tutto questo è giustificato non appena si tenga conto dell' affermazione che segue nel testo e di quanto è detto da COURANT - HILBERT in loco citato nota precedente, cap. V, § 10, n. 2.

([27]) Vale a dire, se

$$z(x) + \int_a^b K(x, y)\, p(y)\, dy = 0,$$

allora

$$z''(x) = p(x); \; z(a) = z(b) = 0.$$

Cfr. COURANT - HILBERT, loco citato, cap. V, § 11, n. 1, pag. 292.

è semidefinita positiva e se la $f_i(y, u_1, \ldots, u_n)$, *per* $i = 1, \ldots, n$, *è a incremento uniformemente limitato rispetto a* $u_1, \ldots, u_{i-1}$, $u_{i+1}, \ldots, u_n$.

§ 7. - Un ultimo criterio di risolubilità per le (3).

21. - IPOTESI E CONDIZIONI PRELIMINARI.

Supponiamo, come al solito, simmetrici e semidefiniti positivi i nuclei

$$K_1(x, y), \ldots, K_n(x, y).$$

Indichiamo poi con

$$\alpha$$

un numero reale e positivo minore di tutti i valori eccezionali dei nuclei anzi detti; di guisa che, in virtù della nota proprietà di minimo dei valori eccezionali di un nucleo simmetrico,

$$(32) \qquad 0 \leq \int_a^b \int_a^b K_i(x, y)\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy < \frac{1}{\alpha} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

se $p(x)$ è continua e verifica la

$$\int_a^b p^2(x)\, dx \leq 1 .$$

Più generalmente, se $q(x)$ è una seconda funzione continua per la quale

$$\int_a^b q^2(x)\, dx \leq 1 ,$$

da [28]

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,p(x)\,p(y)\,dx\,dy + \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,q(x)\,q(y)\,dx\,dy \pm$$

$$\pm 2\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,p(y)\,q(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,[p(x) \pm q(x)]\,[p(y) \pm q(y)]\,dx\,dy \geq 0$$

segue, per la (32),

$$\left|\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,p(x)\,q(y)\,dx\,dy\right| < \frac{1}{\alpha}. \tag{33}$$

22. - *Le*

$$h_{i,j}(y, u_1, \ldots, u_n)$$

essendo sempre definite dalle (16), *supponiamo inoltre che*

$$|\,h_{i,j}(y, u_1, \ldots, u_n)\,| \leq \alpha_{i,j},$$

con

$$\sum_{1}^{n}{}_{i,j}\, \alpha_{i,j} < \alpha. \tag{34}$$

Consideriamo allora n funzioni

$$\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x),$$

[28] Cfr. Courant - Hilbert, loco citato, cap. III, § 4, n. 1, pag. 108.

continue nell' intervallo $a \leq x \leq b$ e normalizzate nel senso che

$$\sum_1^n {}_i \int_a^b \tau_i^2(x)\,dx = 1\,; \tag{35}$$

e poniamo, per semplicità di scrittura,

$$\omega_{i,j}(x) = \frac{1}{\alpha_{i,j}} h_{i,j}(x, \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))\,, \tag{36}$$

di guisa che

$$|\,\omega_{i,j}(x)\,| \leq 1\,. \tag{37}$$

Sarà allora, per la (33), la (35) e la (37)

$$\left| \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x, y)\,\tau_i(x)\,\omega_{i,j}(y)\,\tau_j(y)\,dx\,dy \right| < \frac{1}{\alpha}\,;$$

e quindi, per la (36) e la (34)

$$\left| \sum_1^n {}_i \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x, y)\,\tau_i(x) \sum_1^n {}_j \left[h_{i,j}(y, \tau_1(y), \ldots, \tau_n(y))\,\tau_j(y)\right] dx\,dy \right| =$$

$$\left| \sum_1^n {}_{i,j}\, \alpha_{i,j} \int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x, y)\,\tau_i(x)\,\omega_{i,j}(y)\,\tau_j(y)\,dx\,dy \right| < \tag{38}$$

$$< \frac{1}{\alpha} \sum_1^n {}_{i,j}\, \alpha_{i,j} < 1\,.$$

23. - Sulla risolubilità delle (15).

Dico che

Nelle ipotesi poste nei nn. 21 *e* 22, *le* (15) *si possono* *sempre risolvere rispetto alle* $\tau_i(x)$, *qualunque siano le* $\vartheta_i(x)$, *la risoluzione essendo allora* ([29]) *possibile in un sol modo.*

Analogamente a quanto si è fatto nel n. 17, basta dimostrare che le

$$(39)\qquad \tau_i(x) + \int_a^b K_i(x, y) \sum_1^n {}_j h_{i,j}(y, \tau_1(y), \dots, \tau_n(y))\, \tau_j(y)\, dy = 0$$

non possono essere soddifatte dalle funzioni (continue)

$$(40)\qquad \tau_1(y), \dots, \tau_n(x)$$

se queste non sono identicamente nulle.

Supponiamo infatti che le funzioni (40) verifichino le (39) e non siano identicamente nulle.

Potremo allora supporre da esse soddisfatta anche la (35).

Indi, moltiplicando la i–esima delle (39) per $\tau_i(x)$, sommando membro a membro ed integrando, avremo

$$1 + \sum_1^n {}_i \int_a^b K_i(x, y)\, \tau_i(x) \sum_1^n {}_j h_{i,j}(y, \tau_1(y), \dots, \tau_n(y))\, \tau_j(y)\, dx\, dy = 0.$$

Ma la relazione che così troviamo è contraddetta dalla (38)... Indi la condizione II) è effettivamente soddisfatta.

24. – Sulla risolubilità delle (3).

Per potere quindi affermare che

Nelle ipotesi poste nei nn. 21 e 22, *il sistema* (3) *ammette una ed una sola soluzione*

basta far vedere che

Definito, per l'n–pla di funzioni continue $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$

([29]) Teorema di Fredholm, loco citato nota ([25]).

uno scarto in base alla formula

$$(41) \qquad \sigma[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = \sum_1^n{}_i \int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx,$$

la condizione I) *è allora soddisfatta*,
naturalmente sempre che siano verificate le condizioni poste nei nn. 21 e 22.

A proposito delle quali ultime si noti che da esse segue, in particolare,

$$(42) \qquad |f_i(y, u_1, \ldots, u_n)| \leq \alpha_{i,1}|u_1| + \ldots + \alpha_{in}|u_n| \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

una volta si sia supposto, per semplificare,

$$f_i(y, 0, \ldots, 0) = 0$$

– il che si può sempre ottenere, modificando convenientemente le funzioni $g_i(x)$, ove occorra –.

25. – Incominciamo col dimostrare che la successione

$$(43) \qquad \chi_i^1(x),\ \chi_i^2(x), \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

dove (vedi n. 11)

$$\chi_i^j(x) = g_i(x) - \int_a^b K_i(x, y)\, f_i(y, \varphi_1^j(y), \ldots, \varphi_n^j(y))\,dy,$$

è compatta, se per le funzioni (continue)

$$\varphi_i^1(x),\ \varphi_i^2(x), \ldots$$

riesce

$$(44) \qquad \sigma[\varphi_1^j(x), \ldots, \varphi_n^j(x)] \leq c \qquad (c = \text{cost}),$$

σ essendo definito dalla (41).

A ciò basta (vedi ancora il n. 11) riconoscere che le funzioni (43) sono equicontinue ed equilimitate.

E siano, infatti,

$$x_1\,,\; x_2$$

due punti dell'intervallo $a \leq x \leq b$; si avrà allora

$$
(45)\qquad
\begin{aligned}
&|\chi_i^j(x_1) - \chi_i^j(x_2)| \leq |g_i(x_1) - g_i(x_2)| + \\
&\left|\int_a^b [K_i(x_1, y) - K_i(x_2, y)]\, f_i(y, \varphi_1^j(y), \ldots, \varphi_n^j(y))\, dy\right| \leq \\
&\leq \varepsilon + \delta \int_a^b |f_i(y, \varphi_1^j(y), \ldots, \varphi_n^j(y))|\, dy\,,
\end{aligned}
$$

$\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ potendosi supporre piccoli a piacere, non appena $|x_1 - x_2|$ lo sia sufficientemente, in virtù della continuità (uniforme) di $g_i(x)$ e $K_i(x, y)$.

Ma, per la (42),

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |f_i(y, \varphi_1^j(y), \ldots, \varphi_n^j(y))|\, dy \leq \\
&\leq \sum_1^n {}_l\, \alpha_{i,l} \int_a^b |\varphi_l^j(y)|\, dy \leq \alpha\,(b - a) \sum_1^n {}_l \sqrt{\int_a^b [\varphi_l^j(y)]^2\, dy}\ (^{30})\,;
\end{aligned}
$$

e di qui segue facilmente che, se è soddisfatta la (44), il coefficiente di δ nella (45) è limitato.

E questo è sufficiente per stabilire quanto volevamo; per stabilire, cioè, che le funzioni (43) sono non solo equicontinue, ma anche equilimitate e quindi che è soddisfatta la prima parte della I).

(30) Disuguaglianza di SCHWARZ.

26. – Per quel che ha tratto alla condizione sugli infiniti ([31]), date le funzioni

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$$

(continue nell'intervallo $a \leq x \leq b$ ed ivi non identicamente nulle) e posto

$$\overline{\varphi}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \varphi_1(x)$$

(σ avendo il significato solito), di guisa che le $\overline{\varphi}_i(x)$ sono normalizzate nel senso che

$$\sum_1^n {}_i \int_a^b \overline{\varphi}_i^2(x)\, dx = 1, \tag{46}$$

moltiplichiamo ([32]) la

$$\overline{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, y)\, f_i(y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))\, dy \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

per

$$\frac{1}{\sigma} \varphi_i(x),$$

sommiamo ed integriamo rispetto ad x fra a e b; avremo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_1^n {}_i \int_a^b \overline{\varphi}_i(x)\, \overline{\varphi}_i(x)\, dx = 1 + \\ + \frac{1}{\sigma} \sum_1^n {}_i \int_a^b \int_a^b K_i(x, y)\, \varphi_i(x)\, f_i(y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))\, dx\, dy . \end{aligned} \tag{47}$$

([31]) Non vi è luogo per un' osservazione analoga a quella contenuta nel n. 11.

([32]) Per il ragionamento che segue, cfr. Caccioppoli, loco citato nota ([3]), n. 5.

Ma

$$\frac{1}{\sigma}\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,\varphi_i(x)\,f_i(y,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(y))\,dx\,dy=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_j\,\alpha_{i,j}\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,\overline{\varphi}_i(x)\,\overline{\omega}_{i,j}(y)\,\overline{\varphi}_j(y)\,dx\,dy\,,$$

dove le $\overline{\omega}_{i,j}(x)$ sono delle funzioni continue verificanti ([33]) le

$$|\,\overline{\omega}_{i,j}(x)\,|\leq 1\,.$$

Indi è, per la (46) e la (33),

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{1}^{n}{}_i\int_a^b\!\!\int_a^b K_i(x,y)\,\varphi_i(x)\,f_i(y,\varphi_1(y),\ldots,\varphi_n(y))\,dx\,dy\leq$$

$$\leq\frac{1}{\alpha}\,\Sigma_{i,j}\,\alpha_{i,j}<1\,.$$

E la (47) dà allora

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{1}^{n}{}_i\int_a^b\overline{\psi}_i(x)\,\overline{\varphi}_i(x)\,dx\geq 1-\frac{1}{\alpha}\,\Sigma_{i,j}\,\alpha_{i,j}>0\,;$$

cioè, per la (46) e la disuguaglianza di Schwarz,

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{1}^{n}{}_i\left[\int_a^b\overline{\psi}_i^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{1}^{n}{}_i\left[\int_a^b\overline{\psi}_i^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b\overline{\varphi}_i^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{1}^{n}{}_i\int_a^b\overline{\psi}_i(x)\,\overline{\varphi}_i(x)\,dx\geq\text{cost.}>0\,.$$

([33]) È una conseguenza immediata questa delle

$$f_i(y,0,\ldots,0)=0\,;\quad|\,h_{i,j}(y,u_1,\ldots,u_n)\,|\leq\alpha_{i,j}$$

e del teorema del valor medio per il calcolo differenziale; cfr. n. 24, E di qui segue immediatamente che, se $\sigma \rightarrow \infty$, diverge il massimo di

$$|\overline{\psi}_1(x)| + \dots + |\overline{\psi}_n(x)|;$$

e quindi anche il massimo di

$$|\psi_1(x)| + \dots + |\psi_n(x)|,$$

se

$$\psi_i(x) = \overline{\psi}_i(x) - g_i(x).$$

Vale a dire, se $\sigma \rightarrow +\infty$, diverge anche il più grande degli n numeri

$$\|\psi_1(x)\|, \dots, \|\psi_n(x)\|.$$

E l'assunto del n. 24 è così dimostrato.