RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SALVATORE CHERUBINO

Sulle varietà di Kummer singolari reali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 141-176

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__141_0>

SULLE VARIETÀ DI KUMMER SINGOLARI REALI

di SALVATORE CHERUBINO *a Pisa*

Uno dei più interessanti capitoli delle fondamentali Memorie del COMESSATTI: *Sulle varietà abeliane reali* (1) è certamente quello dedicato alle varietà di KUMMER reali. Questo suggestivo problema è ivi trattato con maestria e compiutezza raggiungendo risultati notevoli anche per le nuove vedute che introducono e per l'indirizzo seguito (2).

Scopo del presente lavoro è di mostrare come possa raggiungersi una generalizzazione del concetto di varietà di KUMMER reali K_p considerandole come birazionalmente identiche ad un'involuzione di second'ordine generata su una varietà abeliana reale V_p da una trasformazione T *pseudo-ordinaria* involutoria, anzichè da una trasformazione *ordinaria* di prima specie.

Queste ultime sono comprese fra le pseudo-ordinarie, cosicchè le varietà di KUMMER studiate dal COMESSATTI vanno incluse fra quelle che qui introduciamo. Orbene, le trasformazioni pseudo-ordinarie non ordinarie possono esistere soltanto quando la V_p sia singolare (3); e poichè il caso che qui interessa non può essere che quello in cui T non sia ordinaria, le corrispondenti varietà di KUMMER dovranno anch'esse dirsi *singolari*, mentre quelle del COMESSATTI si diranno *ordinarie*.

(1) Annali, t. II della S. IV (1924-25) e t. III (1925-26) Mem. II, § 6, pagg. 47-63.

(2) Vi si trova, fra l'altro, il completamento della classificazione assegnata dal ROHN pel caso delle superficie.

(3) Cioè abbia indice di moltiplicabilità positivo (SCORZA).

Tuttavia, siccome il comportamento delle trasformazioni pseudo-ordinarie, nella geometria reale sulle varietà abeliane, ha grande analogia con quello delle trasformazioni ordinarie [4], era da prevedersi che queste varietà singolari reali di KUMMER non possedessero proprietà fondamentali sensibilmente difformi da quelle presentate dalle varietà ordinarie.

È quello che qui si constata considerando il caso delle varietà provenienti da una simmetria e da una trasformazione pseudo-ordinaria involutoria (non ordinaria) lascianti entrambe fermo il punto assegnato coi valori nulli dei parametri di V_p. Questo corrisponde alla prima delle 4 eventualità che possono presentarsi tutte studiate dal COMESSATTI pel caso ordinario) e dà luogo ad un enunciato conclusivo analogo a quello che si ha per le varietà ordinarie.

Per le altre eventualità, rimandiamo sin da ora il lettore alla citata Memoria del prof. COMESSATTI. È però qui opportuno fermarsi un momento sui tipi del caso IV. Questi provengono da trasformazioni antibirazionali cicliche di 4° ordine, cioè da operazioni come $L = ST_4$, ove S è la simmetria e T_4 è una trasformazione birazionale di V_p avente per quadrato la trasformazione ordinaria di prime specie. Orbene, questa T_4, com'è facile constatare [5], non può essere pseudo-ordinaria, sicchè questi tipi vengono a trovarsi, dal nostro punto di vista, in una situazione ancor più eccezionale di quella in cui si trovano le varietà singolari dei primi tre casi.

Chiudiamo invece il presente lavoro con la ricerca di tutte le trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie ammesse dalle superficie iperellittiche. Il che costituisce già di per sè un'ampia classificazione delle superficie di KUMMER reali.

Prima di passare ad esporre la ricerca, vogliamo richiamare

(4) Il che dà ragione del nome e costituisce il maggior interesse di queste trasformazioni. Vedi la mia Memoria: *Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni.* [Atti Acc. Napoli, vol. XX, S. 2ª (1933-XI)] p. II.

(5) Basta por mente al fatto che, nel caso del carattere reale zero al quale ci si può sempre in definitiva ridurre, le matrici delle sostituzioni riemanniane corrispondenti alle trasformazioni pseudo-ordinarie son congrue (mod. 2) alla matrice identica.

l'attenzione del lettore benevolo su di un fatto molto interessante. Abbiamo detto che l'enunciato conclusivo del caso singolare trattato [6] è del tutto analogo a quello del corrispondente caso ordinario. Però una differenza c'è, ed è che il numero delle regioni in cui si divide l'unica falda reale di K_p può esser maggiore di quello del caso ordinario. Ciò dipende dal fatto che le simmetrie *laterali* della S da cui si parte (che inducono su K_p la stessa coppia di simmetrie indottavi da S e dalla sua associata) possono avere un carattere reale uguale o minore (mai maggiore) di quello di S. E si constata su esempi (al § 4) che i due casi possono entrambi effettivamente presentarsi.

§ 1. - **Nozioni e richiami introduttivi.**

1. Sia V_p una varietà abeliana di tipo reale, S una sua simmetria, u un p-complesso verticale di suoi parametri reali per S, ω la matrice di Riemann dei periodi di questi parametri su certi $2p$ cicli primitivi.

Se con $\bar{u}$ s'indica il coniugato di u, la simmetria è rappresentata dalla relazione

$$(1) \qquad u' \equiv \bar{u}, \qquad (\text{mod. } \omega)$$

tull'al più a meno di un p-complesso (verticale) costante additivo, che si può supporre nullo.

Alla simmetria S corrisponde una (ed una sola) antisostituzione riemanniana involutoria la cui matrice dei coefficienti [che s'indica pure con S) soddisfa e resta individuata, dalla relazione

$$(2) \qquad \omega S_{-1} = \bar{\omega},$$

ove S_{-1} è la trasposta di S. Questa relazione individua a sua volta la simmetria S e la stessa rappresentazione (1), tutt'al

(6) Che è il più interessante e dà norme sicure per la trattazione degli altri, beninteso in uno con il citato capitolo della Memoria II del Comessatti.

*

più, quando le costanti additive tralasciate non siano nulle, a meno di una trasformazione ordinaria di seconda specie $u' \equiv u + c$ (mod. ω), ove c è un p-complesso (verticale) costante.

Supponendo nulle queste costanti additive, il punto $u \equiv 0$ vien lasciato fermo dalla (1), quindi S possiede punti uniti. Scegliendo opportunatamente il modello proiettivo di V_p, questi punti uniti coincidono coi punti *reali* della varietà. In ogni caso, se λ è il carattere reale di S, questi punti uniti si distribuiscono in $2^{p-\lambda}$ falde, fra loro disgiunte, che si dicon le *falde reali* di V_p.

I punti di una stessa falda reale sono assegnati dai valori

$$u \equiv r + \frac{1}{2}\,\omega k\,, \qquad \text{(mod. } \omega) \tag{3}$$

dei parametri, essendo r un p-complesso reale arbitrario ed ωk un periodo simultaneo imaginario puro (di cui k è il $2p$-intiero che ne assegna la *caratteristica*). Se ωk si scambia con un $\omega k'$ ad esso paritario, cioè tale che $k' \equiv k$ (mod. 2), oppure con un $\omega k'$ pel quale $\omega(k - k')$ risulti paritario ad un periodo simultaneo reale ωh, – cioè con $k - k' \equiv h$ (mod. 2), – la falda su cui scorre il punto (3), al variare di r, resta la stessa. Altrimenti il punto cambia di falda: ma il passaggio non può farsi con continuità.

Insieme alla S esiste sempre una simmetria *associata* che si rappresenta con

$$u' \equiv -\bar{u}\,, \qquad \text{(mod. } \omega) \tag{1)*}$$

cui corrisponde l'antisostituzione riemanniana di matrice opposta a quella corrispondente ad S. Questa simmetria e questa sostituzione vengon perciò indicate con $-S$. La simmetria associata ad S, che è il prodotto di S per la trasformazione ordinaria di prima specie

$$u' \equiv -u\,, \qquad \text{(mod. } \omega)$$

ha lo stesso carattere reale λ di S e dà luogo allo stesso numero $2^{p-\lambda}$ di falde unite, dette *falde fittizie* di V_p, il cui comportamento è del tutto analogo alle falde reali. Precisamente, i punti di una stessa falda si ottengono al variare del p-complesso reale j nelle formole

$$(3)^* \qquad u \equiv \frac{1}{2}\omega h + i \cdot j \quad (\text{mod. } \omega)\,; \quad i = \sqrt{-1}$$

mentre ωh è un periodo reale che può scambiarsi soltanto con ogni altro periodo reale $\omega h'$ ad esso paritario o che ne differisca per uno paritario ad un periodo ωk imaginario puro - cioè con $h - h' \equiv k$ (mod. 2).

Ciascuna falda reale si appoggia a ciascuna falda fittizia mercè i $2^{2p-\lambda}$ punti distinti

$$(4) \qquad u \equiv \frac{1}{2}\,\omega h + \frac{1}{2}\,\omega k\,, \qquad (\text{mod. } w)$$

ove ωh, ωk son 2 periodi risp. reale ed imaginario puro, arbitrarii. Questi (4) son $2^{2p-\lambda}$ perchè 2^p sono le parità distinte dei periodi reali od imaginari puri e 2^λ quelle dei periodi reali paritari a periodi imaginari puri.

Perciò vi son 2^p di questi punti su ogni falda reale o fittizia e quelli della stessa falda si distribuiscono in $2^{p-\lambda}$ gruppi, ciascun gruppo essendo costituito dai 2^λ punti di appoggio di essa su ogni falda del sistema, reale o fittizia, al quale quella non appartiene. È opportuno infine notare che i 2^p punti di una stessa falda reale (o fittizia) si distinguono mercè le 2^p parità distinte dei periodi reali (o immaginari puri).

2. Una trasformazione birazionale T di V_p in sè si rappresenta con una relazione del tipo

$$(5) \qquad u' \equiv \pi u \qquad (\text{mod. } \omega)$$

ove π è un'opportuna matrice, in generale complessa, di ordine p. Ad essa corrisponde una sostituzione riemmaniana, la cui matrice dei coefficienti, che s'indica pure con T, risulta determinata dalla (5) e a sua volta la determina mercè la relazione

$$\omega T_{-1} = \omega . \tag{6}$$

Nella (5) potrebbe figurare un p-complesso verticale additivo costante, che noi supporremo da ora in poi nullo limitandoci così a considerare, per semplicità, soltanto trasformazioni e simmetrie lascianti fermo il punto $u \equiv 0$.

Se T è reale rispetto ad S, cioè se può porsi [7]

$$T S T^{-1} = S , \tag{7}$$

e soltanto allora, la matrice π è reale.

Da quest'ipotesi segue che se ωh, ωk sono due periodi uno reale l'altro imaginario puro, gli altri due

$$\pi \omega h = \omega T_{-1} h ; \quad \pi \omega k = \omega T_{-1} k \tag{8}$$

sono anch'essi ordinatamente reale od imaginario puro.

Se T è pseudo-ordinaria, quindi reale, la sua proprietà caratteristica è che i periodi (8) sono sempre paritari a quelli da cui si sono ottenuti, cioè si ha

$$T_{-1} h \equiv h , \quad T_{-1} k \equiv k , \qquad (\text{mod. } 2) \tag{9}$$

e, viceversa, ogni trasformazione reale che soddisfa a queste relazioni è pseudo-ordinaria.

3. Le coincidenze di T sono assegnate da tutti e soli quei parametri che soddisfano alla relazione

$$(1 - \pi) u \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega). \tag{10}$$

(7) Questa relazione vale per le trasformazioni o per le matrici delle corrispondenti sostituzioni od antisostituzioni riemanniane. Se essa valesse solo per le matrici predette, nella (5) figurerebbero costanti additive non nulle e T si direbbe quasi-reale.

Quando T è reale, insieme ad ogni coincidenza P c'è sempre anche la $\bar{P} = PS$, trasformata di P mediante S, cioè insieme alla (10), essendo π reale, vale necessariamente

$$(10)^* \qquad (1-\pi)\,\bar{u} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega).$$

Scomponendo u nelle sue parti reale ed imaginaria col porre $u = r + ij$, $i = \sqrt{-1}$, le (10) — (10)* danno, per somma e sottrazione

$$(11) \qquad \begin{cases} (1-\pi)\, r = \dfrac{1}{2}\,\omega h^* \\ (1-\pi)\cdot ij = \dfrac{1}{2}\,\omega k^*, \end{cases}$$

nelle quali ωh^* ed ωk^* sono due periodi il primo reale l'altro imaginario puro fra loro *paritari*. Quest' ultima condizione è necessaria perchè, viceversa, dalle (11) possano seguir le (10) — (10)*.

Di qui è manifesto che se u', u'' dànno due coincidenze di T sono coincidenze anche tutti i punti $mu' + nu''$, con m, n intieri arbitrari.

4. È facile riconoscere quando è che un punto (3), unito per S, lo è anche per una T reale. Occorrerà che la seconda delle (11) sia soddisfatta per $ij = \dfrac{1}{2}\,\omega k$ onde, per la (6), si ha

$$(1-\pi)\,\omega k = \omega\,(I - T_{-1})\,k = \omega k^*,$$

quindi

$$(12) \qquad (I - T_{-1})\,k = k^*,$$

mentre che, per avere un (3)* come coincidenza di T, occorrerà

$$(12)^* \qquad (I - T_{-1})\,h = h^*,$$

Soddisfatta la (12) [oppure la (12)*], basta scegliere r (ovvero $i\,j$) soluzione della prima (della seconda) delle (11) per avere una coincidenza reale (o fittizia) della T stessa.

Affinchè un punto (5) sia coincidenza di T, occorre dunque che siano verificate simultaneamente la (12) e la (12)*, onde, essendo $h^* \equiv k^*$ (mod. 2), deve aversi

$$(I - T_{-1})\,(h - k) \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}. \tag{13}$$

Questa condizione non è soltanto necessaria ma è anche sufficiente perchè un punto (5) sia una coincidenza per una T reale. Essa è sempre soddisfatta per $h \equiv k$ (mod. 2), nel qual caso si cade nel punto $u \equiv 0$; è soddisfatta da tutti i punti (5) *allora e solo* che T sia addirittura pseudo-ordinaria [8].

5. Supponiamo appunto che T sia pseudo-odinaria. Allora i primi membri delle (12) — (12)*, quindi anche i secondi, son di parità nulla [9], perciò le coincidenze reali (fittizie) di T si ottengono risolvendo la prima (la seconda) delle (11) col porre nel secondo membro un periodo reale (imaginario puro) di parità nulla ed aggiungendo alle soluzioni un qualsiasi semiperiodo imaginario puro (reale).

In tal modo si ottengono certo tutti i (4), ma non è detto che non si ottengano anche altre coincidenze per T. Quando $1 - \pi$ non è degenere ed il carattere reale λ di S non è nullo, le (11) son risolubili quali che siano i secondi membri. E poichè questi si possono prendere (paritari ma) di parità non nulla, le soluzioni in questo caso ottenute non son comprese fra le (4), anzi non son neppure punti reali, nè punti fittizi di V_p.

Ad es., se $\pi = -1$, cioè se T è ordinaria di 2ª specie, le (11) danno le coincidenze $u = r + ij$ con

$$r = \frac{1}{4}\omega h^*, \qquad ij = \frac{1}{4}\omega k^*,$$

essendo ωh^*, ωk^* arbitrari (uno reale l'altro imaginario puro) ma paritari. Per avere le (4) occorre e basta prendere $h^* \equiv k^* \equiv 0$

(8) Mem. cit. (4), p. II, § 1, n. 5, pag. 52.
(9) Cioè son congrui a zero (mod. 2).

(mod. 2), mentre la totalità di queste coincidenze è data da

$$u \equiv \frac{1}{4}\omega(h^* + k^*) \equiv \frac{1}{2}\omega l, \qquad (\text{mod. } \omega)$$

con l un $2p$-intiero arbitrario. Di tali punti se ne hanno tanti distinti quante sono le parità di l, cioè 2^{2p}, il che è ben noto ([10]) e, salvo i (4), son tutti non reali nè fittizi.

Osservazione. Se $u = r + ij$ è una coincidenza di T, sono tali anche tutti i $2^{2p-\lambda}$ punti, fra i quali è il dato, assegnati dai valori dei parametri

$$(13) \qquad u' \equiv u + \frac{1}{2}\omega h + \frac{1}{2}\omega k = \left(r + \frac{1}{2}\omega h\right) + \left(ij + \frac{1}{2}\omega k\right),$$

al variare (delle parità) dei periodi reali ωh ed imaginari puri ωk. Infatti, sostituendo nelle (11), i primi membri si alterano soltanto di un periodo reale od immaginario puro, rispettivamente. Cioè si ottengono le soluzioni di altrettante (11) in cui i secondi membri variano lasciando inalterate le parità dei periodi che in essi figurano.

Si ha quindi che *ogni coincidenza di T, pseudo ordinaria, fa parte di un gruppo di $2^{2p-\lambda}$ coincidenze distinte.* Il che era già stato osservato ([11]) per le coincidenze reali di T.

Inoltre, se la (13) si scrive

$$u' \equiv \left(r + \frac{1}{2}\omega k\right) + \left(ij + \frac{1}{2}\omega h\right),$$

le parentesi dànno un punto reale ed uno fittizio, che variano al variare delle parità dei periodi ωk ed ωh, mentre $r + ij$ resta fermo. Il punto reale assume 2^p posizioni, di cui 2^λ su ciascuna falda e così il punto fittizio. Facendo aumentare simultaneamente ωk ed ωh di due periodi, uno imaginario puro l'altro reale fra

([10]) Comessatti A., Mem. cit. ([1]), I, § 2, n. 7, pag. 87.
([11]) Mem. cit. ([4]), p. II, § 1, n. 4, pag. 51.

loro paritari, si hanno 2^λ coppie di punti che si possono dire *associate* alla stessa coincidenza di T, i cui punti variano restando l'uno su una stessa falda reale l'altro su una stessa falda fittizia.

6. Supponiamo, inoltre, che T sia involutoria. Allora si ha anche

$$\pi^2 = 1\,, \quad T^2 = I\,,$$

e quindi, se T non è addirittura ordinaria, la comune equazione minima di queste matrici è $x^2 - 1 = 0$ e le matrici $(\pi \pm 1)$, $(T_{-1} \pm I)$ son certo degeneri, ma non nulle.

Moltiplicando le (11) per π e tenendo presente la (6) si ha

$$\begin{cases} (\pi - 1)\, r = \dfrac{1}{2}\,\omega\, T_{-1}\, h^* = -\dfrac{1}{2}\,\omega\, h^* \\[2ex] (\pi - 1)\, ij = \dfrac{1}{2}\,\omega\, T_{-1}\, k^* = -\dfrac{1}{2}\,\omega\, k^*\,, \end{cases}$$

quindi

$$(T_{-1} + I)\, h^* = 0\,, \quad (T_{-1} + I)\, k^* = 0\,. \tag{14}$$

Queste sono soddisfatte prendendo

$$h^* = \pm (T_{-1} - I)\, h\,; \quad k^* = \pm (T_{-1} - I)\, k\,, \tag{15}$$

il che, essendo T pseudo-ordinaria, ci conferma che tutti i punti (4) son coincidenze di T. Ma posson le (14), o meglio può la equazione

$$(T_{-1} + I)\, x = 0 \tag{16}$$

esser soddisfatta per x eguale ad una qualsiasi caratteristica di periodo reale od imaginario puro? Se ciò accadesse, la (16) sarebbe soddisfatta ponendo in luogo di x la trasposta di una matrice caratteristica $\left(\dfrac{m}{n}\right)$, minima o non minima di S. Ma

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ non è degenere, dunque per poter essere

$$(T_{-1}+I)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}=0\,,$$

necessiterebbe avere $T_{-1}=-I$, cioè T sarebbe ordinaria (di prima specie) il che abbiamo escluso.

Segue anzi che la (16) non può esser soddisfatta contemporaneamente da p (caratteristiche di) periodi reali linearmente indipendenti, cioè dalle righe di m, e da (quelle di) p periodi imaginari puri indipendenti, cioè dalle righe di n, se non quando sia addirittura identica, cioè quando T è ordinaria.

Ricordiamo ora che, essendo T involutoria e non ordinaria, l'omografia riemanniana corrispondente è (pure involutoria quindi) generale, cioè i suoi 2 spazi fondamentali sono indipendenti e le caratteristiche delle 2 matrici $T_{-1}-I$, e $T_{-1}+I$ hanno per somma $2p$: dicendo q quella di $T_{-1}-1$ la caratteristica di $T_{-1}+I$ è dunque $2p-q$.

Orbene, ponendo

$$\begin{pmatrix} m^* \\ n^* \end{pmatrix}_{-1}=(T_{-1}-I)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1},$$

si ha senz'altro

$$(T_{-1}+I)\begin{pmatrix} m^* \\ n^* \end{pmatrix}=0\,, \tag{17}$$

cioè che le righe della matrice $\begin{pmatrix} m^* \\ n^* \end{pmatrix}$ sono soluzioni della (16). Ma intanto, essendo $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ di caratteristica massima, $\begin{pmatrix} m^* \\ n^* \end{pmatrix}$ ha la stessa caratteristica di $T_{-1}-I$, cioè q, che è il massimo numero delle soluzioni di (16) linearmente indipendenti. Dunque l'equazione (16) non ammette altre soluzioni, che siano caratteristiche di periodi reali od immaginari puri, se non quelle assegnate con le (15).

Stante la degenerazione di $(\pi-1)$ le corrispondenti soluzioni delle (11) non son soltanto le (4).

§ 2. - Le simmetrie laterali

7. Prima di passare a stabilire il concetto esteso di varietà di KUMMER reali, giova premettere qualche altra osservazione.

Com'è stato già rilevato ([12]), se T è una trasformazione birazionale reale ed involutoria di V_p, il prodotto $S\,T = T\,S$ è ancora involutorio, sicchè insieme ad S ed alla sua associata, si ha una seconda coppia di simmetrie associate e cioè $S' = ST$ e $-S' = -S\,T$ ([13]). Si diranno le *simmetrie laterali* ([14]) di S.

Da $S' = S\,T = TS$ per l'involutorietà di T, S, S' si deduce subito

$$S = S'T = TS', \quad T = S\,S' = S'S, \tag{18}$$

cioè T è reale anche rispetto ad S', ed S', S posson dirsi l'una reale rispetto all'altra.

Si deduce altresì che le coincidenze comuni a due delle tre trasformazioni S, S', T son comuni pure alla terza. Se dunque T è pseudo–ordinaria, fra queste coincidenze sonvi i $2^{2p-\lambda}$ punti di appoggio delle falde reali (unite per S) sulle falde fittizie (unite per $-S$).

Altrettanto si può dire per la terna $-S$, $-S'$, T.

Perciò, sempre se T è pseudo–ordinaria, i detti punti di appoggio son coincidenze comuni non solo a T e ad S, ma anche a T ed a $-S$ e si conclude che essi son anche coincidenze comuni ad S' e $-S'$. Cioè che i punti di appoggio delle falde reali sulle fittizie sono anche di appoggio per le falde unite in S' su quelle unite in $-S'$.

([12]) Mem. cit. ([4]), p. I, § 3, n. 15, pag. 34.

([13]) Sebbene sia improprio indicare con $-S$ la simmetria, anzichè la matrice della corrispondente antinvoluzione riemanniana, associata ad S, tuttavia lo facciamo spesso perchè la notazione non può dar luogo a equivoci.

([14]) Se T fosse addirittura ordinaria (di prima specie) queste simmetrie laterali coinciderebbero con $-S$ ed S.

Di qui segue intanto che il carattere reale λ' di S' non può superare [15] quello λ di S.

Constateremo con esempi, al § 4, che λ' può effettivamente essere inferiore a λ (beninteso se $\lambda > 0$). Cioè che il numero delle falde unite nelle simmetrie laterali può esser maggiore di quello delle falde reali e che T, pseudo–ordinaria rispetto ad S, non lo è rispetto ad S'.

Può però anche accadere (cfr. gli stessi esempi) che questi numeri coincidano, nel qual caso T risulta pseudo–ordinaria tanto rispetto ad S che rispetto ad $S' = S\,T$.

8. Di qui si può anzi dedurre una conseguenza importante.

Sia $v \doteq \sigma u$, con σ matrice complessa di ordine p, il p–complesso dei parametri di V_p reale per $S' = S\,T = T\,S$, sicchè su questo v la S' si rappresenta con la relazione

$$v' \equiv \bar{v}\,, \qquad (\text{mod. } \sigma\omega) \tag{19}$$

mentre sugli u si rappresenta con l'altra

$$u' \equiv \pi\,\bar{u} \qquad (\text{mod. } \omega). \tag{19'}$$

Ne segue che è necessariamente

$$\sigma\,\pi\,\bar{\sigma}^{-1} = 1\,, \tag{20}$$

e che l'antisostituzione riemanniana involutoria corrrispondente alla simmetria S' possiede una matrice dei coefficienti, che indichiamo ancora S', data da

$$\sigma\,\omega\,S'_{-1} = \bar{\sigma}\,\bar{\omega} \quad \text{ossia} \quad \omega\,S'_{-1} = \pi\,\bar{\omega}\,. \tag{21}$$

Si tenga conto che σ è certo non reale, altrimenti [16] S' apparterrebbe alla schiera di S, anzi, poichè noi consideriamo

[15] Sarebbe interessante indagare quando è che questi due caratteri reali sono addirittura eguali.

[16] Cherubino S., *Sulla nozione di parità...* Nota I [Rend. Lincei, S. 6ª, vol. VI (1927)] n. 3.

soltanto trasformazioni lascianti fermo $u \equiv 0$, S' coinciderebbe con S.

I punti d' appoggio delle falde unite per S' su quelle unite per l' associata $-S'$ sono assegnati dai valori

$$v \equiv \frac{1}{2}\sigma\omega h' + \frac{1}{2}\sigma\omega k', \qquad (\text{mod. } \sigma\omega) \tag{22}$$

dei parametri v reali per S', essendo $\sigma\omega h'$ un periodo reale e $\sigma\omega k'$ un periodo imaginario puro simultanei per v. Detto λ' il carattere reale di S', questi (22) son $2^{2p-\lambda'}$ punti distinti. Essi possono manifestamente scriversi

$$\sigma u \equiv \frac{1}{2}\bar{\sigma}\bar{\omega} h' - \frac{1}{2}\bar{\sigma}\bar{\omega} k', \qquad (\text{mod. } \sigma\omega)$$

quindi, per la (20) e per la seconda delle (21)

$$u \equiv \frac{1}{2}\omega S'_{-1} h' - \frac{1}{2}\omega S'_{-1} k' \qquad (\text{mod. } \omega).$$

Ma S' lascia fermi i periodi reali e scambia negli opposti quelli imaginari puri, cioè $S'_{-1} h' = h'$ ed $S'_{-1} k' = -k'$, perciò in definitiva otteniamo

$$u \equiv \frac{1}{2}\omega h' + \frac{1}{2}\omega k' = \frac{1}{2}\omega(h' + k') \qquad (\text{mod. } \omega). \tag{22'}$$

Fra questi, per l'osservazione che chiude il n. precedente, devon figurare tutti i $2^{2p-\lambda}$ punti

$$u \equiv \frac{1}{2}\omega h + \frac{1}{2}\omega k = \frac{1}{2}\omega(h + k), \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{4}$$

di appoggio per le falde reali sulle falde fittizie di V_p.

Affinchè uno di questi (4) coincida con uno dei (22') occorre e basta che le corrispondenti coppie di $2p$–intieri h, k ed h', k' soddisfino alla congruenza

$$(23) \qquad h + k \equiv h' + k', \qquad (\text{mod. } 2)$$

il cui primo membro può assumere $2^{2p-\lambda}$, parità distinte, ed il secondo $2^{2p-\lambda'}$, mentre quelle di un $2p$–intiero sono, in totale, 2^{2p}. Tanto perchè h e k possono assumere 2^{λ} volte la stessa parità ed h' e k' possono assumerne $2^{\lambda'}$ eguali, quante sono le parità di periodi reali (ordinatamente per gli u e pei v) coincidenti con quelle di periodi imaginari puri.

Ciò vuol dire che si possono far variare, ad es., i $2p$–intieri k e k' ciascuno soltanto nelle parità distinte da quelle di periodi reali lasciando invece h ed h' variabili in tutte le loro 2^p parità distinte.

Posto questo, consideriamo due falde una reale (unita in S) l'altra unita per S' e siano ωk, $\omega k'$ i periodi imaginari puri che ad esse corrispondono e che teniamo fissi. Se k e k' sono entrambi di parità nulla, la (23) è verificata prendendo h ed h' anch'essi di parità nulla, cioè queste 2 falde hanno a comune il punto $u \equiv 0$.

Se k e k' non sono entrambi di parità pulla, aggiungendo rispettivamente le 2^p parità di h e di h', i due membri della (23) danno due sistemi di parità entrambi di ordine $p+1$ ovvero uno di ordine $p+1$ l'altro di ordine p, secondo che k e k' sono entrambi o uno solo *non* di parità nulla. Questi due sistemi sono immersi nello stesso sistema di parità, di ordine $2p$, costituito da tutte le possibili parità di un $2p$–intiero e perciò ([17]) hanno necessariamente qualche parità a comune, cioè esiste sempre qualche coppia h, h' che con la fissata coppia k, k' soddisfa la (23).

Dunque: *due falde qualunque, una reale (unita per S) l'altra unita per una simmetria laterale S', hanno sempre qualche punto in comune. Così per una fittizia (unita per $-S$) ed una unita per $-S'$.*

([17]) Cherubino S., *Sugli n–intieri calcolati mod.* 2 [Rend. Acc. Napoli, S. 3ª vol. 36 (1930-VIII)] n. 5.

§ 3. - Le varietà di Kummer reali

9. Una qualsiasi trasformazione pseudo-ordinaria involutoria T dà luogo, su V_p, ad un'involuzione di second'ordine J_2, le cui coppie di punti si corrispondono in T. Se K_p è una varietà birazionalmente identica ad J_2, si dirà che K_p è una *varietà di* KUMMER *generalizzata* (di tipo) *reale*.

In particolare, se T è addirittura ordinaria (di prima specie) si hanno le varietà di KUMMER reali studiate dal COMESSATTI.

La identità birazionale fra J_2 e K_p si stabilisce prendendo come parametri variabili di K_p le somme dei parametri di V_p nei punti di una stessa coppia variabile di J_p. Cioè, posto che T si rappresenti, al solito, con la (5), il p-complesso U dei parametri di K_p è legato a quello u di V_p dalla relazione

$$U \equiv u + \pi u \,, \qquad \text{(mod. } \omega)$$

sicchè, essendo $\pi^2 = 1$ e $\pi \omega = \omega T_{-1}$, risulta

$$\pi U \equiv U \qquad \text{(mod. } \omega).$$

Dunque ad ogni punto di K_p corrispondono due determinazioni dei parametri (U e πU) cioè K_p è una varietà abeliana di rango due.

Gli enti fondamentali della corrispondenza (2, 1) fra V_p e K_p sono, su V_p, le coincidenze di J_2 cioè di T, e, su K_p, altrettantè varietà razionali H_{p-1} che, con opportuna scelta del modello proiettivo di K_p (in uno spazio di dimensione conveniente) possono ridursi a punti (*singolari*) di opportuna molteplicità.

La simmetria S subordina, su K_p, una simmetria S^*. Invero, per la realità di T, S porta ciascun gruppo di J_2 in un gruppo della stessa J_2, involutoriamente. Questa S^* si rappresenta sui parametri U con la relazione

$$U' \equiv \overline{U} \,, \qquad \text{(mod. } \omega) \tag{24}$$

oppure con l' altra

$$U' \equiv \pi \overline{U} \qquad (\text{mod. } \omega). \tag{24'}$$

L' antisostituzione riemanniana involutoria corrispondente alla (24), la cui matrice dei coefficienti indichiamo ancora con S^*, si scrive

$$S^* = T^{-1} S T, \tag{25}$$

come subito si riconosce verificando, in base alle (2) e (6) che

$$\omega S^*_{-1} = \overline{\omega}. \tag{26}$$

Di qui segue che i parametri U sono reali per S^*, come già gli u per S, e che il carattere reale [18] di S^* coincide con quello di S.

Alla simmetria associata ad S, che trasforma anch' essa involutoriamente in sè la J_2, corrisponde la simmetria associata ad S^*, di antisostituzione riemanniana opposta a quella di S^*.

10. Orbene, è importante osservare che le simmetrie laterali S' e $-S'$, relative a T, introducono su K_p la stessa coppia S^*, $-S^*$ di simmetrie associate.

Invero, se $G = (P_1, P_2)$ è una coppia di I_2, corrispondente alla coppia $(u, \pi u)$ di valori dei parametri, la simmetria S porta G in $\overline{G} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ ed altrettanto fa $S' = ST = TS$, salvo che S' provoca su G contemporaneamente lo scambio dei punti della coppia ed il passaggio ai loro coniugati. Un fatto analogo avviene per $-S' = -ST$.

Ciò, del resto, risulta anche dal che, a causa del rango due di K_p, S^* si può rappresentare sia con la (24) che con la (24'). Ciò vuol dire appunto che S^* proviene indifferentemente da S e da $S' = TS$. Per questa via, si giunge anche alla conclusione

[18] Si ricordi che λ è la comune caratteristica (mod. 2) di $S \pm I$ e che si ha $S^* \pm I = T^{-1} (S \pm I) T$. Onde, essendo T modulare, la caratteristica predetta coincide con quella mod. 2 di $S^* \pm I$.

che ad S^* corrispondono due antinvoluzioni riemanniane, e cioè quelle assegnate dalla matrice (25) e dalla

$$(25') \qquad S^{**} = T^{-1} \cdot TS \cdot T = T^{-1} \cdot ST \cdot T = ST = TS.$$

Per quest' ultima, invece della (26), si ha

$$(26') \qquad \omega S^{**}_{-1} = \pi \overline{\omega}.$$

In particolare, se T è addirittura ordinaria (di prima specie), coincidendo S' con $-S$, si ha che su K_p le due simmetrie associate S e $-S$ inducono la stessa simmetria (corrispondente a due antisostituzioni riemanniane di matrici opposte).

11. Il fatto che le simmetrie laterali inducono su K_p la stessa coppia di simmetrie indottavi da S e da $-S$, insieme a quanto si è stabilito al n. 7, porta ad una notevole conseguenza, che costituisce lo scopo di questa ricerca.

È manifesto che i punti uniti per S^* sono le imagini delle coincidenze di S o di S', ossia che i punti e le falde reali di K_p (cioè di un opportuno suo modello proiettivo) sono i corrispondenti dei punti e delle falde di V_p uniti in S (cioè reali) oppure uniti nella simmetria laterale S'. Così per i punti e le falde fittizie di K_p.

Ma, per quanto è stato dimostrato al n. 7, ogni falda reale di V_p è connessa a tutte la falde unite per S', così per le falde fittizie di V_p e quelle unite in $-S'$. Dunque su K_p si ha una sola falda reale, cioè unita per S^*, ed una sola fittizia, ossia unita per $-S^*$. Queste due falde coincidono, allora e solo che T sia ordinaria.

In corrispondenza alle falde reali (o fittizie) di V_p ed a quelle unite per S' (per $-S'$) l'unica falda reale (o fittizia) di K_p si divide in $2^{p-\lambda} + 2^{p-\lambda'} = 2^{p-\lambda}(1 + 2^{\lambda-\lambda'})$ regioni che si distribuiscono in due sistemi, uno di $2^{p-\lambda}$ l'altro di $2^{p-\lambda'}$ regioni. Quelle di uno stesso sistema sono prive di punti comuni, mentre due regioni di sistemi diversi son sempre fra loro connesse attraverso i $2^{2p-\lambda}$ enti reali di diramazione, corrispondenti ai punti (4).

Questo risultato, come abbiamo annunciato in prefazione, è perfettamente analogo a quello ottenuto dal COMESSATTI nel caso di T ordinaria (di prima specie). La sola particolarità di questo caso è che si ha soltanto la falda reale (o soltanto la fittizia) ed è necessariamente $\lambda = \lambda'$, mentre nel caso singolare può aversi $\lambda \geqq \lambda'$.

§ 4. - Le trasformazioni pseudo ordinarie involutorie delle Superficie iperellittiche.

12. Le varietà di KUMMER reali possono classificarsi a mezzo delle trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie che generano le involuzioni di cui esse sono imagini, cioè determinando queste trasformazioni.

Nel caso $p = 2$, cioè per le superficie, una tal classificazione è in atto possibile perchè son note ([19]) le trasformazioni pseudo-ordinarie ammesse da una V_2. Si tratta quindi di sceverar tra queste quelle che sono involutorie.

Occorre perciò passare al caso di una varietà possedente una simmetria di carattere reale nullo. Il che si fa ([20]) considerando la $V_p^{(o)}$ imagine dell'involuzione di ordine 2^λ generata su V_p quando si lega la matrice di RIEMANN ω di V_p a quella $\omega^{(o)}$ di $V_p^{(o)}$ con la relazione

$$\omega^{(o)} = \omega \left(\frac{m}{n}\right)_{-1}, \tag{27}$$

$\left(\frac{m}{n}\right)_{-1}$ essendo una matrice caratteristica minima della simmetria S, di carattere reale λ, che si considera su V_p.

Con tal riferimento, le trasformazioni pseudo-ordinarie (ri-

([19]) CHERUBINO S., *Le trasformazioni pseudo-ordinarie delle superficie iperellittiche reali* [Atti Istituto Veneto, t. XCII (1933-XI) pp. 693-723.

([20]) Mem. cit. (4), p. II, § 3, n. 12, pag. 67.

spetto ad S) di V_p si riducono a quelle di $V_p^{(o)}$ e viceversa queste inducono quelle ([21]).

La matrice $\omega^{(o)}$ può anche normalizzarsi, scegliendo opportunatamente i parametri u reali per S e riducendosi così alla forma

$$\Omega = (e^{-1} \mid i\tau)\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

con $\tau = \| \tau_{rs} \|$ matrice reale simmetrica di ordine p ed e matrice diagonale intiera dei divisori elementari della forma riemanniana principale ammessa da $\omega^{(o)}$ e trasformata (nella sua opposta o, come si dice), in sè da S. Questa simmetria vien così ad avere, per corrispondente antisostituzione riemanniana involutoria quella di matrice

$$I_o = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right),$$

dove con 1 s' indica (l' unità positiva e) la matrice identica di ordine p.

Dopo di che le trasformazioni pseudo-ordinarie di $V_p^{(o)}$ rispondono a sostituzioni riemanniane aventi matrici del tipo

$$T^{(o)} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right), \tag{28}$$

con α, β unimodulari di ordine p che, in primo luogo, soddisfano alla relazione

$$|\alpha| \cdot |\beta| = 1 \tag{29}$$

ed alle congruenze

$$\alpha \equiv 1\,, \qquad \beta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Sui parametri u di $V_p^{(o)}$, che posson supporsi eguali a quelli di V_p, le trasformazioni pseudo-ordinarie son rappresentate allo stesso modo che per V_p, cioè con la relazione

([21]) Ibidem, p. II, § 4, n. 15, pag. 76.

$$u' \equiv \pi u\,, \qquad \text{(mod. } \Omega)$$

ove π è la stessa matrice ([22]) di ordine p che si ha per V_p, sicchè fra π e $T^{(o)}$ sussiste la relazione

$$(30) \qquad \left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right) T^{(o)}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \pi & 0 \\ \hline 0 & \pi \end{array}\right) \left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right).$$

mentre per T si ha

$$\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right) T_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \pi & 0 \\ \hline 0 & \pi \end{array}\right) \left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right).$$

La condizione d'involutorietà è, naturalmente, sempre $\pi^2 = 1$, che si traduce nelle due

$$\alpha^2 = 1\,, \quad \beta^2 = 1\,.$$

Si noti poi che dalle $T^{(o)}$ relative a $V_p^{(o)}$ si può passare alle T relative a V_p tenendo conto dei risultati del n. 25, § 4, p. II, della mia Mem. cit. ([19]) e segnatamente delle formole (14) a pag. 77.

13. Nel caso iperellitico, α e β son del tipo.

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & 2b \\ 2c & 2d+1 \end{pmatrix},$$

con a, b, c, d intieri soddisfacenti alle relazioni, che ne esprimono l'involutorietà.

$$(31) \qquad \begin{cases} bc = -a(a+1) = -d(d+1) \\ b(a+d+1) = c(a+d+1) = 0\,. \end{cases}$$

Da queste si ricavano i seguenti tipi

([22]) La stessa perchè son gli stessi i parametri.

a) per $b = c = 0$, le 4 matrici

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{32}$$

b) per b e c non entrambi nulli, i tipi

$$\pm\begin{pmatrix}a & 2b\\2c & -a\end{pmatrix}$$

dove a è un intiero *dispari* arbitrario (positivo) e b, c son due intieri soddisfacenti alla relazione

$$4bc = 1 - a^2.$$

Di qui si ha che le α e β, meno le due prime delle (32), hanno tutte determinante eguale a -1.

Ne segue che, all'infuori della trasformazione ordinaria di prima specie, le possibili trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie, lascianti fermo il punto di parametri nulli, sono soltanto quelle che corrispondono a sostituzioni riemanniane aventi per matrici dei coefficienti una delle sei coppie

$$\left\{\begin{array}{l}
\pm\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\\hline 0 & -1\end{array}\right),\quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0}\\\hline & & 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1\end{array}\right),\quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0}\\\hline & & 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1\end{array}\right),\\[2ex]
\pm\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0}\\\hline & & a' & 2b'\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 2c' & -a'\end{array}\right),\quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc}a & 2b & & \\ 2c & -a & \multicolumn{2}{c}{0}\\\hline & & 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1\end{array}\right),\quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc}a & 2b & & \\ 2c & -a & \multicolumn{2}{c}{0}\\\hline & & a' & 2b'\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 2c' & -a'\end{array}\right)
\end{array}\right. \tag{33}$$

nelle quali a, a' sono intieri dispari (positivi, se si vuole) e b, c; b', c' soddisfano alle relazioni

$$4bc = 1 - a^2, \quad 4b'c' = 1 - a'^2. \tag{34}$$

14. Dopo di ciò, passiamo senz'altro a dare le effettive matrici delle sostituzioni riemanniane corrispondenti alle trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie (lascianti fermo il punto assegnato dai valori nulli dei parametri) esistenti sui vari tipi di superficie iperellittiche con una simmetria di carattere reale nullo.

Dobbiamo perciò tener presenti, insieme a questi tipi ([23]), tutte le trasformazioni pseudo-ordinarie delle superficie iperellittiche recentemente assegnate nella nostra Mem. cit. ([19]).

I casi distinti sono 12, che andiamo a considerare uno per uno.

Caso *a*) È quello in cui la matrice di Riemann di $V_2^{(o)}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & i\tau_{22} \end{pmatrix},$$

e si ha $n\dfrac{\tau_{11}}{\tau_{22}} = \dfrac{r}{s}$, con n, r, s intieri assegnati ad arbitrio, gli ultimi due primi fra loro.

Si trova facilmente che le trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie di questo tipo son tutte e sole quelle di sostituzioni riemanniane

$$(35)\qquad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} a & 2rx & & \\ 2sy & -a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & a & 2sx \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 2ry & -a \end{array}\right)$$

ove a, x, y son 3 intieri legati dalla sola relazione

$$(36)\qquad a^2 + 4rs\cdot xy = 1\,.$$

Le corrispondenti matrici π della relazione (30) risultano

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} a & 2nsy \\ \dfrac{2rx}{n} & -a \end{pmatrix}.$$

([23]) Cherubino S., *Sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale* [Rend. Lincei, vol. XVI, S. 6a (1932-XI)].

15. La relazione (36) ammette infinite soluzioni, poichè occorre e basta scegliere l'intiero dispari a in modo che $a^2 - 1 = (a-1)(a+1$ riesca multiplo di $4rs$.

Cioè la (36) equivale all'equazione indeterminata, rispetto alle incognite a e μ:

$$\text{(I)} \qquad a^2 - 4m\mu = 1\,,$$

ove si è posto $-m = rs$ e $\mu = xy$.

Ecco come questa (I) può risolversi. Posto $a = 2h + 1$, la (I) diventa

$$\text{(I)}' \qquad h(h+1) = m \cdot \mu\,,$$

sicchè, essendo h ed $h+1$ primi fra loro, ogni fattore primo di m divide uno, ma uno solo, degl' intieri h od $h+1$.

Decomponendo m in fattori primi, accade dunque che una parte di questi fattori dividerà solo h, l'altra solo $h+1$, cioè h ed $h+1$ son multipli di due fattori complementari di m (aventi per prodotto m) fra loro primi.

Detta perciò p, q, con $pq = m$, una qualsiasi coppia *non ordinata* di fattori complementari fra loro primi, di m, sarà necessariamente

$$h + 1 = p\xi\,, \quad h = q\eta$$

quindi ξ ed η son le soluzioni dell'equazione indeterminata di primo grado

$$\text{(I)}'' \qquad p\xi - q\eta = 1\,.$$

Variando p, q nell'insieme di tutte le coppie non ordinate di divisori complementari primi fra loro di m e risolvendo tutte le (I)$''$ corrirpondenti (in numero finito) si han tutti i possibili valori di h, ossia di a, quindi, con $xy = \mu$, tutte le soluzioni di (35).

16. Prima di passare agli altri casi, facciamo un' osservazione interessante.

Poniamo che la simmetria S su V_p sia di carattere reale

$\lambda = 2$ e supponiamo, com'è sempre possibile, che l'antisostituzione riemanniana che le corrisponde sia ridotta alla forma tipica del COMESSATTI cioè ([24]) abbia per matrice dei coefficienti

$$S = I_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & 0 \\ \hline 1 & & -1 & \end{array}\right).$$

Dalla seconda delle (35), com'è stato indicato alla fine del n. 11, può risalirsi alla corrispondente sostituzione riemanniana T relativa a V_p e calcolata sugli stessi cicli sui quali S ha assunto la forma tipica.

Si ha subito

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 2rx & & \\ 2sy & -a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & (r-s)x & a & 2sx \\ (s-r)y & 0 & 2ry & -a \end{array}\right).$$

quindi la simmetria laterale corrispondente è data da

$$S' = S\,T = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 2rx & & \\ 2sy & -a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline a & (r+s)x & -a & -2sx \\ (r+s)y & -a & -2ry & a \end{array}\right).$$

Il carattere reale λ' di questa S' risulta uno o due secondo che il determinante

$$\begin{vmatrix} a & (r+s)x \\ (r+r)y & -a \end{vmatrix} = -a^2 - (r+s)^2 xy\,,$$

è pari o dispari. Poichè a è dispari, e poichè, per l'arbitrarietà (salvo ad esser primi fra loro) di r ed s si può fare che $r+s$

([24]) Mem. cit. ([4]), p. I, § 1, n. 4, pag. 14.

sia dispari, basta che xy sia anch'esso dispari perchè risulti $\lambda = 1$. Orbene, poichè $r + s$ è dispari, $m = -rs$ sarà pari e se nella (I)$'$ si sceglie, ad es., $h = m$, sarà necessariamente $\mu = xy = m + 1$ cioè dispari. Se si sceglie $\mu = xy = m$, risulta $\lambda' = 2$.

Si conclude che la simmetria S ammette effettivamente, tanto simmetrie laterali col suo stesso carattere reale, quanto di carattere reale inferiore.

17. Caso a'). Si ha la matrice di RIEMANN

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{n} & i\tau_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{12} = \tau_{21}\,.$$

Riferendosi alle trasformazioni pseudo-ordinarie esplicitate nel nostro citato lavoro, si trova facilmente che involutorie sono tutte e sole quelle aventi per sostituzioni riemanniane le seguenti

$$(37) \qquad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} a & 2nx & & \\ 2y & -a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -a & 2ny \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 2x & a \end{array}\right),$$

mentre le sostituzioni sui parametri sono

$$(37') \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} a & 2ny \\ 2x & -a \end{pmatrix}$$

I numeri a, x, y sono 3 interi, il primo necessariamente dispari, soluzioni dell'equazione indeterminata

$$(38) \qquad a^2 + 4\,n\,x\,y = 1$$

che si riduce alla (I) ponendo $\mu = -xy$.

18. Caso a''). La matrice di Riemann di $V_2^{(0)}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{n} & i\tau_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{12} = \tau_{21}$$

con $\frac{\tau_{11}}{\tau_{21}} = \frac{l}{m}$ frazione irriducibile.

Questo caso, meno semplice dei precedenti, dà luogo alle seguenti sostituzioni riemanniane, che danno tutte e sole le trasformazioni pseudo-ordinarie di $V_2^{(0)}$:

$$(39) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} \xi & 2mny_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 2\zeta_1 & -\xi & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \xi-2mx_1 & 2(n\zeta_1+lx_1) \\ & & 2my_1 & 2mx_1-\xi \end{array}\right),$$

le cui corrispondenti sostituzioni sui parametri sono

$$(39') \qquad \pm\begin{pmatrix} \xi & 2n\zeta_1 \\ 2my_1 & -\xi \end{pmatrix}.$$

L'intiero ζ_1 è arbitrario, mentre i 3 interi x_1, y_1, ξ si determinano come appresso.

Mantenendo arbitrario ζ_1 si risolva, rispetto agl'intieri μ_1 e ρ l'equazione indeterminata, di tipo (I)

$$(40) \qquad \mu_1^2 - 4m^2n\zeta_1 \cdot \rho = 1;$$

indi si trovi una soluzione α, β, che si terrà fissa, dell'altra equazione indeterminata

$$mx + ly = 1,$$

ed infine si ponga

$$\xi = 2mn\beta\zeta_1 \pm \mu_1, \qquad t_1 = \rho - \beta^2 n\zeta_1$$

$$x_1 = \alpha\xi + lt_1, \qquad y_1 = \beta\xi - mt_1.$$

A queste condizioni si perviene senza difficoltà osservando che, imponendo l'involutorietà alle trasformazioni pseudo-ordinarie trovate nella solita Memoria cit. ([19]), si trova che dev' essere $\eta = 2\xi$, $\mu_1 = \nu_1$ e tenendo conto che $|\alpha| = -1$.

Se è $m = \pm 1$, tra le (39) figurano le due matrici

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -1 & 2lm \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e se, *inoltre*, l è multiplo di n anche le altre due

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & & \\ \dfrac{2lm}{n} & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \end{array}\right).$$

A queste corrispondono sui parametri le sostituzioni

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} -1 & 2lm \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Caso $a''')$: Matrice di Riemann :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\tau_{12} \\ 0 & \dfrac{1}{n} & i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{pmatrix}, \quad \tau_{12} = \tau_{21}$$

con $n\dfrac{\tau_{22}}{\tau_{21}} = \dfrac{l'}{m'}$ frazione irriducibile.

Questo caso è analogo al precedente. Il risultato richiesto si consegue agevolmente osservando che, per l'involutorietà, deve essere $|\alpha| = -1$ e che, nelle formole della nostra solita Memoria, si deve avere $\eta = 2\xi$. Onde la (54) a pag. 108 di detto lavoro, diventa $\mu^2 + 4\,m'n\,z\,\zeta = 1$, mentre le radici della (53), ossia i valori (50), coincidono con $\pm\mu$. Perciò le sostituzioni riemanniane delle cercate trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie sono tutte e sole le

$$(41) \qquad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} \xi & 2\,(n\zeta_1 - l'x_1) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 2\,m'z_1 & -\xi & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mu & 2\,m'n\,z_1 \\ & & 2\,\zeta_1 & -\mu \end{array}\right)$$

e quelle sui parametri sono

$$(41') \qquad \pm\begin{pmatrix} \xi & 2\,m'n\,z_1 \\ \dfrac{2\,(n\zeta_1 - l'x_1)}{n} & -\xi \end{pmatrix}.$$

Lo ξ è un intiero dispari arbitrario; x_1 e z_1 sono assegnati, per t_1 intiero arbitrario, da

$$x_1 = \alpha\xi + l't_1, \qquad z_1 = \beta\xi - m't_1$$

dove α e β costituiscono una soluzione fissa, ma qualunque, dell'equazione indeterminata

$$m'x + l'z = 1 .$$

Infine, μ e ζ_1, sono assegnati dalle soluzioni intiere dell'equazione

$$(42) \qquad \mu^2 + 16\,m'n\,z_1\zeta_1 = 1$$

che è del tipo (I).

Se $m' = \pm 1$ ed l' è multiplo di n, fra le (41) compaiono le

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & -1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -1\,, & 0 \\ & & \dfrac{-2\,l'}{m'n} & 1 \end{array}\right)$$

mentre, se è soltanto $m' = \pm 1$, si hanno le altre due

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \mp 2l' & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right)$$

cui corrispondono le sostituzioni sui parametri

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \mp\dfrac{2l'}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Caso a^{IV}). La matrice di Riemann è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} \\ 0 & \dfrac{1}{n} & i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{pmatrix}$$

coi $\tau_{rs} = \tau_{sr}$ tutti non nulli e

$$\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \frac{L}{M}, \quad n\frac{\tau_{22}}{\tau_{21}} = \frac{L'}{M},$$

con L, L', M intieri primi fra loro.

Le sostituzioni riemanniane involutorie delle trasformazioni cercate sono tutte e sole le

$$(43) \qquad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} \zeta & 2n\alpha\eta + L't & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 2\beta\eta + Ls & -\zeta & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & X & 2n\beta\eta + Lt \\ & & 2\alpha\eta + L's & -X \end{array}\right)$$

mentre le sostituzioni sui parametri sono

$$(43') \qquad \pm\begin{pmatrix} \zeta & (2\beta\eta + Ls)n \\ \dfrac{2n\alpha\eta + L't}{n} & -\zeta \end{pmatrix}.$$

In queste formole:

1. gl'intieri α e β sono fissi e danno $L\alpha - L'\beta = qM$, ove q è il massimo comune divisore di L ed L';

2. gl'intieri t, s sono entrambi pari, quando q è dispari; della stessa parità quando q è pari ed n dispari; s è pari e t qualunque, quando q ed n sono entrambi pari;

3. gl'intieri s, t, η, μ soddisfano al sistema indeterminato ([25])

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} (M\mu - q\eta)^2 + (2\alpha\eta + L's)(2n\beta\eta + Lt) &= 1 \\ t - ns &= 2\mu\,. \end{aligned} \right.$$

4. gl'intieri ζ ed X sono assegnati da

$$\zeta = M\mu + q\eta, \qquad X = -M\mu + q\eta.$$

Come casi particolari nei quali il sistema (II) si riduce ad un'equazione di PELL si hanno i seguenti due:

a) Sostituzioni riemanniane involutorie del tipo:

$$(44) \qquad \pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & X & 2b' \\ & & 2c' & -X \end{array}\right)$$

che sono le sole corrispondenti alla sostituzione $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eseguita sui parametri.

Gli elementi del quarto quadrante di queste (44) si ottengono come appresso. Si ponga

$$\frac{LL'}{nqM} = \frac{l_1}{m_1}, \quad \frac{L}{qM} = \frac{l'_1}{m'_1}, \quad \frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2},$$

con l_1, m_1; l'_1, m'_1; l_2, l'_2 tre coppie d'intieri primi fra loro.

([25]) La cui prima equazione può sostituirsi con l'altra

$$(M\mu + q\eta)^2 + (2n\alpha\eta + L't)(2\beta\eta + Ls) = 1.$$

Si risolverà poi l'equazione di Pell

$$\text{(III)} \qquad X - 4\Delta u^2 = 1 \, ,$$

nella quale $\Delta = l_2 l'_2 m_1 m'_1 L$, rispetto agl'interi X, u, con $u \neq 0$, e si porrà

$$b' = - l'_2 m_1 L u \, , \qquad c' = l_2 m'_1 u \, .$$

Per assicurarsene, basta paragonare col caso generale nel quale occorrerà fare

$$2 n \alpha \eta + L' t = 2 \beta \eta + L s = 0$$

ricavando

$$\mu = \frac{t - ns}{2} = - n \frac{q M}{L L'} \eta = - \frac{m_1}{l_1} \eta \, .$$

Inoltre, si ha

$$2 c' = 2 \alpha \eta + L' s = - 2 \frac{L' \mu}{n} = 2 \frac{q M}{L} \eta = 2 \frac{m'_1}{l'_1} \eta \, ,$$

da cui, per le posizioni fatte e poichè c' è intiero, si ricava facilmente

$$\eta = l_1 l'_2 u = l'_1 l_2 u \, ,$$

con u intero opportuno.

Dopo di che la prima delle (II) si riduce appunto alla (III).

In modo del tutto analogo si ha il secondo caso particolare, cioè:

b) Sostituzioni riemanniane involutorie del tipo

$$\text{(45)} \qquad \pm \left(\begin{array}{cc|cc} \zeta & 2b & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 2c & -\zeta & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right)$$

che son le sole che abbiano per quarto quadrante $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Ad esse corrispondono le sostituzioni sui parametri

$$(45') \qquad \pm\begin{pmatrix}\zeta & 2cn\\ \frac{2b}{n} & -\zeta\end{pmatrix}.$$

Gli elementi del primo quadrante delle (45) si ottengono come segue. Si ponga, oltre alle posizioni del caso precedente,

$$\frac{L'}{qM}=\frac{l_1''}{m_1''}, \qquad \frac{l_1}{l_1''}=\frac{l_3}{l_3'}, \qquad \Delta^*=l_3 l_3' m_1 m_1'' L',$$

con le due coppie l_1'', m_1'', ed l_3, l_3' d'interi primi fra loro e si risolva, per $v \neq 0$, l'equazione di Pell

$$(\mathrm{III}^*) \qquad \zeta^2-4\Delta^* v^2=1.$$

Dopo di che si prenderà

$$b=l_3' m_1 L'\cdot v, \qquad c=-l_3 m_1''\cdot v.$$

Osservazione. - L'equazione (III) non può risolversi con $u\neq 0$, quando $\Delta<0$. Così la (III*), per $v\neq 0$, $\Delta^*<0$. In tali due casi, dunque, i tipi (44) - (45) sono impossibili.

Se Δ o Δ^* son quadrati perfetti le equazioni (III) - (III*) sono ancora impossibili per u o v non nulli, come subito si riconosce.

In ogni altro caso esistono infinite sostituzioni dei tipi (44) - (45) perchè le (III) - (III*) ammettono infinite soluzioni.

21. Casi $b)$ - $b^{\mathrm{I}})$ - $b^{\mathrm{II}})$ - $b^{\mathrm{III}})$ - $b^{\mathrm{IV}})$ - $b^{\mathrm{V}})$ - $c)$. Si risolvono tutti assai rapidamente.

1. Caso $b)$. Si ha $\tau_{12}=\tau_{22}=0$, ma $\frac{\tau_{11}}{\tau_{22}}$ non è razionale. Le sole trasformazioni pseudo-ordinarie non ordinarie hanno per

matrici delle corrispondenti sostituzioni riemanniane la coppia

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right),$$

che opera sui parametri con la $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Queste sono entrambe involutorie.

2. Caso b^{I}). Si ha $\tau_{22}=0$ ed il rapporto $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$ non è razionale. Salvo la ordinaria di prima specie, nessuna trasformazione pseudo-ordinaria può essere involutoria.

3. Caso b^{II}). Si ha $\tau_{11}=0$ e $\frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$ non è razionale. Anche qui non vi sono trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie non ordinarie.

4. Caso b^{III}). Si ha $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}=\frac{l}{m}$, con l, m interi primi fra loro, mentre $\frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$ non è razionale.

Si hanno trasformazioni pseudo-ordinarie non ordinarie solo per $l=\pm 1$. Queste son le 4 corrispondenti alle matrici

$$\pm\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \pm 2mn & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & \pm 2m & -1 \end{array}\right)$$

che sono tutte e 4 involutorie. Le sostituzioni sui parametri sono

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 2m & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Caso b^{IV}). Il rapporto $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$ non è razionale, ma lo è $n\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}=\frac{l'}{m'}$, frazione irriducibile.

Anche qui si hanno trasformazioni pseudo-ordinarie non ordinarie solo per $l' = \pm 1$ e sono date dalle sostituzioni riemanniane di matrici

$$\pm \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ \mp 2m' & -1 & & 0 \\ \hline & & 1 & \mp 2m'n \\ & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

che son tutte e 4 involutorie e corrispondono alle sostituzioni sui parametri

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & \mp 2m'n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Caso b^{V}). I rapporti $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$, $\frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$ sono entrambi non razionali, però l'equazione

$$\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} x + n \frac{\tau_{22}}{\tau_{21}} y = z ,$$

è risoluta per x, y, z interi non tutti nulli. Detta r', r'', r''' la soluzione minima di quest' equazione e posto

$$\Delta = r'''^2 - 4 n r' r'' ,$$

le trasformazioni pseudo–ordinarie involutorie si ottengono da quelle determinate nella Memoria più volte citata prendendo $\xi = 0$, quindi esigono (tenendo conto che $|\alpha| = -1$) che sia $\Delta = 1$. Se ciò accade, e allora soltanto, si hanno due trasformazioni involutorie corrispondenti alle sostituzioni riemanniane di matrici

$$\pm \left(\begin{array}{cc|cc} r''' & 2nr' & & \\ -2r'' & -r''' & & 0 \\ \hline & & r''' & -2nr'' \\ & 0 & 2r' & -r''' \end{array} \right)$$

che inducono sui parametri le sostituzioni

$$\pm\begin{pmatrix} r''' & -2\,n\,r'' \\ 2\,r' & -r''' \end{pmatrix}.$$

7. Caso c). Non si verifica alcuna delle condizioni dei casi precedenti. Non esistono trasformazioni pseudo-ordinarie (quindi nemmeno pseudo-ordinarie ed involutorie) non ordinarie.

22. Riassumendo, abbiamo visto che non mancano le eventualità in cui non vi son altre trasformazioni pseudo-ordinarie involutorie che le ordinarie. Ma non poche volte di non ordinarie ve ne è un numero finito od infinito. E sonvi anche eventualità in cui le simmetrie laterali a quella da cui si prendon le mosse non hanno lo stesso carattere reale di questa (ma necessariamente minore) sicchè la superficie di Kummer che si può ottenere in tali casi viene a possedere, sull'unica falda reale, un numero di regioni distinte superiore a quello del caso ordinario.