

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

**Sui metodi generali di rappresentazione lineare
della geometria descrittiva**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 6 (1935), p. 132-140

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__132_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI METODI GENERALI DI RAPPRESENTAZIONE LINEARE DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

di UGO MORIN a Padova

Il BORDIGA ⁽¹⁾, nelle sue vedute unitarie sulla geometria descrittiva, introduce il metodo generale di rappresentazione dello spazio punteggiato mediante coppie ordinate di punti di un piano. Questo metodo, ritrovato da MÜLLER ⁽²⁾, è stato da questi chiamato il metodo più generale (allgemeinstes Zweibilderprinzip).

Ora, analogamente a quanto ha fatto A. DEL RE ⁽³⁾ per un caso particolare, e più in generale MÜLLER e COMESSATTI ⁽⁴⁾, ho voluto indagare quali sono i possibili metodi di rappresentazione mediante coppie ordinate di punti, ove si pongano unicamente le condizioni che la rappresentazione sia algebrica e che le coppie rappresentatrici dei punti di una retta generica si distribuiscano

⁽¹⁾ C. BORDIGA, *I metodi della Geometria descrittiva* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXI (1901-2)] pp. 389-403 e 609-618.

⁽²⁾ MÜLLER, *Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie* [Jhrsb. d. Deutsch. Math. Ver. 14 (1905)] pp. 569-574.

⁽³⁾ A. DEL RE, *Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla Geometria descrittiva ordinaria* [Rend. Acc. Lincei (5) 17 (1908)] pp. 639-643.

⁽⁴⁾ A. COMESSATTI, *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva, ed al teorema di POHLKE* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXXVII (2), (1927-28)] pp. 579-614.

sopra due rette; rappresentazioni che chiamerò in seguito *lineari*. Pervengo alla conclusione che i metodi di rappresentazione lineari possibili sono unicamente il metodo generale del BORDIGA ed un metodo che ho chiamato *metodo generalizzato di proiezioni quotate* (con tutti i loro casi particolari).

Dopo aver accennato ad un'applicazione di quest'ultimo metodo alla fotogrammetria, generalizzo gli argomenti svolti agli iperspazi: pervenendo a classificare proiettivamente tutti i possibili metodi di rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n dentro ad uno spazio lineare S_m ($n \geq m$, $2m \geq n$).

1. La rappresentazione del BORDIGA dello spazio punteggiato Σ mediante coppie ordinate di punti di un piano (quadro) π si ottiene nel seguente modo: Fissati in Σ due punti S' ed S'' (centri fondamentali) e due omografie non degeneri Ω' , Ω'' fra le stelle S' , S'' ed il quadro π , un punto generico A di Σ viene rappresentato su π dalla coppia dei punti (A_1, A_2) che, secondo Ω' ed Ω'' , corrispondono rispettivamente ai raggi $S'A$ ed $S''A$.

2. La più generale rappresentazione *algebrica* dei punti di Σ mediante coppie ordinate di punti del quadro π , si ottiene evidentemente fissando entro alla varietà V_4 di quelle coppie una V_3 *razionale*, e riferendola birazionalmente a Σ . In questa corrispondenza birazionale tra la V_3 e Σ vi potranno essere in Σ dei punti fondamentali, cioè punti tali che ad essi corrispondono nella V_3 curve o superficie (eccezionali).

Imponiamo ora alla rappresentazione algebrica generale il *vincolo proiettivo* cioè prescriviamo che le coppie rappresentatrici (A_1, A_2) dei punti A di una retta generica a di Σ si distribuiscano rispettivamente sopra due rette a_1 ed a_2 (generiche o no) del quadro. Queste rappresentazioni chiameremo, come abbiamo detto nell'introduzione, *lineari*.

3. Il punto A_1 si dirà la prima immagine del punto A , ed A_2 la seconda; ed analogamente per le immagini a_1 , a_2 di una retta a . Si presentano allora, per la rappresentazione suddetta, due diverse possibilità:

I) sia le prime che le seconde immagini dei punti di Σ si distribuiscono su tutto il quadro π ;

II) mentre (ad es.) le prime immagini si distribuiscono ancora su tutto π , le seconde immagini descrivono una curva (algebrica) p .

Trattiamo dapprima della corrispondenza tra i punti di Σ e le loro prime immagini. Ci riferiremo in seguito a questa corrispondenza dicendo che π è una *immagine lineare* di Σ . Questa corrispondenza risulterà la stessa per i due casi ora segnalati, di cui faremo seguire la trattazione separata.

4. Un punto generico A_1 di π è la prima immagine di ∞^1 punti di Σ , che generano dunque una curva algebrica α . Variando A_1 su π otteniamo in questo modo un sistema algebrico ∞^2 di curve di Σ , che indicheremo con (S') , di indice uno; cioè tale che per un punto generico di Σ passa una sola curva del sistema.

I punti di Σ le cui prime immagini sono punti di una retta generica l_1 di π , costituiscono una superficie algebrica λ , che contiene ∞^1 curve del sistema (S') . Due punti generici, A e B , di questa superficie λ hanno come immagini A_1 e B_1 due punti distinti della retta l_1 . Dunque la retta (AB) , in quanto ha come immagine la retta l_1 , appartiene alla superficie λ : cioè questa superficie è un piano.

Il punto generico A_1 di π è sostegno di un fascio di raggi l_1 , dunque per la curva algebrica α del sistema (S') passano ∞^1 piani del tipo λ , cioè quella curva è un retta.

Poichè due punti di π individuano una retta l_1 , due rette generiche del sistema (S') sono complanari. Il sistema (S') , poichè le sue rette non possono appartenere ad un piano fisso in quanto per un punto generico di Σ passa una di esse, deve essere una *stella di raggi*; il cui centro S' sarà detto il *primo centro fondamentale*.

Tra i raggi α della stella (S') ed i punti A_1 di π intercede una corrispondenza (algebrica) *biunivoca*, Ω' , tale che ad un fascio di raggi corrisponde una retta punteggiata. Cioè la corrispondenza Ω' è un'omografia, che diremo la (prima) *omografia rappresentatrice*.

L'immagine lineare di Σ su π (n. 3) può dunque essere ottenuta nel seguente modo. Si fissi in Σ un punto S' e si stabilisca una omografia Ω' tra la stella di raggi (S') ed il piano punteggiato π . Un punto A di Σ ha come immagine su π il punto A_1 che corrisponde nell'omografia Ω' al raggio $S'A$. Una corrispondenza di questo tipo, che interviene in molte questioni geometriche, vogliamo chiamare una *proiezione generalizzata*. In conclusione:

Un'immagine lineare (n. 3) dello spazio Σ su un piano π si ottiene sempre con una proiezione generalizzata di Σ da un suo punto S' su π .

5. È ora immediata la discussione completa del *I° caso* (n. 3). Poichè anche le seconde immagini dei punti di Σ invadono tutto il quadro π , si ottiene una seconda immagine lineare di Σ su π ; generata dunque da una proiezione generalizzata, determinata da un (*secondo*) *centro fondamentale* S'' di Σ e da una (*seconda*) *omografia rappresentatrice* Ω'' (n. 4).

Rileviamo che i due centri S' ed S'' sono necessariamente distinti, perchè, ove coincidessero, tutti i punti di un raggio generico della stella $(S') \equiv (S'')$ avrebbero la medesima coppia rappresentatrice.

Possiamo dunque concludere che *questo metodo più generale di rappresentazione lineare coincide con quello del BORDIGA* (n. 1).

6. Veniamo ora alla discussione del *II° caso* (n. 3). Si vede che la curva algebrica p su cui, per ipotesi, si distribuiscono le seconde immagini dei punti di Σ è una retta. Infatti la retta che congiunge due punti qualunque, A_2 e B_2 , di p , interpretata come seconda immagine di una retta di Σ che congiunge due punti le cui seconde immagini sono A_2 e B_2 , fa parte di p .

Consideriamo la superficie algebrica λ di Σ i cui punti hanno come seconda immagine un punto fisso (generico) L_2 di p (e le prime immagini variabili su π). Variando L_2 su p si ottiene un sistema algebrico ∞^1 di superficie, che indicheremo con (s) , di *indice uno*. Infatti, per un punto generico L di Σ passa una sola superficie del sistema (s) , quella associata alla seconda

immagine L_2 del punto L . Il sistema di superficie (s) è dunque un fascio.

Consideriamo una superficie generica λ del fascio (s) . Questa ha con una retta generica l della stella (S') (n. 4) in comune, oltre (eventualmente) il punto S' , uno ed un sol punto: quello che ha come prima immagine il punto L_1 corrispondente ad l nella prima omografia rappresentatrice Ω' e come seconda immagine il punto L_2 associato a λ . Dunque se l'ordine di una superficie del fascio (s) è $n \geq 2$, il punto S' sarà per il fascio un punto base di ordine $n - 1$. In particolare se $n = 1$, cioè il sistema (s) è un fascio di piani, l'asse s di questo fascio non passa per S' .

Tra il fascio (s) di superficie (in particolare di piani) e la retta punteggiata p intercede una corrispondenza algebrica biunivoca, quindi proiettiva. Questa sarà detta la seconda proiettività rappresentatrice Ω'' .

7. Noti il centro S' , il fascio (s) e le due proiettività rappresentatrici Ω' e Ω'' (nn. 4, 6), la rappresentazione è individuata. Preso un punto generico A di Σ , la sua prima immagine A_1 è il punto corrispondente del raggio $(S'A)$ nella Ω' , e la seconda immagine A_2 il punto corrispondente nella Ω'' della superficie del fascio (s) che passa per A .

Le coppie imagini dei punti di una retta generica a di Σ stabiliscono tra la prima immagine a_1 di questa retta e la seconda immagine $a_2 \equiv p$ una corrispondenza algebrica di indici $(n, 1)$. Questa sarà quindi una proiettività unicamente nel caso che (s) sia un fascio di piani.

In questo ultimo caso, per evitare nella rappresentazione di una retta o di un piano, di segnare volta per volta le seconde imagini di alcuni loro punti, si potrà procedere nel seguente modo. Fissati e numerati due o più piani del fascio (s) , che si potranno chiamare piani di livello, si segnino e numerino, sopra la prima immagine di una retta, le imagini dei punti comuni alla retta obbiettiva e quei piani. Questa immagine si potrà chiamare proiezione graduata della retta. Così, per rappresentare un piano, si segnino e numerino le prime imagini delle rette (di livello) che il piano ha in comune coi piani di livello prefissati.

È immediato quali ulteriori condizioni grafiche e metriche si dovranno porre, per ridurre questo metodo all'ordinario metodo delle proiezioni quotate; colla sola differenza che la quota, anzichè data numericamente si pensi segnata sulla scala grafica. Chiameremo perciò il metodo generale qui considerato con *metodo generalizzato di proiezioni quotate*.

Si osservi che questo metodo si potrebbe, quando $n = 1$, considerare come un caso particolare del metodo generale del BORDIGA, ove si abbandoni la condizione che ambedue le omografie rappresentatrici Ω' , Ω'' siano *non* degeneri, ma si ammetta che, in particolare, una delle due possa essere *degenere di prima specie* ⁽⁵⁾.

8. Cenno di un'applicazione alla fotogrammetria. – Nel metodo generale del BORDIGA (n. 1) si passa dalla coppia rappresentatrice (A_1, A_2) al punto obiettivo A intersecando due raggi omologhi delle due stelle (S') ed (S'') ; mentrecchè nel metodo generalizzato di proiezioni quotate (n. 7) si interseca un raggio della stella (S') con un piano del fascio (s) . Ciò suggerisce di riprendere i problemi fondamentali della fotogrammetria teorica da questo ultimo punto di vista.

Siano date due prospettive di una medesima figura F dello spazio Σ sopra due quadri π e π' , non orientate (cioè di cui si ignori la posizione nello spazio dei piani e centri di proiezione). Sia l_1 una retta di π , congiungente due punti M_1 ed N_1 le cui corrispondenti immagini M' ed N' di π' coincidono. La retta l_1 è dunque traccia di un piano proiettante λ nella prima prospettiva il quale per il fatto che contiene la retta obbiettiva MN , che è un raggio proiettante nella seconda prospettiva, contiene anche il secondo centro di proiezione ⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ A. COMESSATTI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Parte seconda [Cedam, Padova, 1931] pag. 161.

⁽⁶⁾ Ciò è come dire che la retta l_1 passa per il punto nodale del piano π (retta nodale). Si noti che sia in una costruzione teorica, ma soprattutto in una costruzione per approssimazioni alla quale in pratica spesso si ricorre, la determinazione di una retta nodale è alquanto più semplice che la costruzione del punto nodale stesso.

Le seconde immagini dei punti del piano λ cadranno dunque pure su una medesima retta l' di π' . Prendiamo sulla l' un punto generico P' e riferiamo il fascio (P') con una proiettività Π ad una retta qualunque p di π , in modo che al raggio l' corrisponda il punto, L_2 , comune alle rette p ed l_1 .

Ad un punto generico A' di π' corrisponde così, con proiezione da P' e con la Π , un determinato punto A_2 di p . Ad un punto generico A di F che abbia come immagine su π un punto A_1 e come immagine su π' il punto A' corrisponde in questo modo una coppia di punti (A_1, A_2) di π . La rappresentazione di F su π così realizzata è, come si rileva direttamente, una proiezione quotata generalizzata (n. 7). Senonché, a partire dalle coppie rappresentatrici (A_1, A_2) non possiamo ricostruire direttamente la figura obbiettiva perchè non conosciamo la effettiva posizione in Σ degli elementi fondamentali S' ed s , nè le due omografie rappresentatrici Ω' , Ω'' . Ma con una semplice costruzione *possiamo determinare una figura $\bar{F}$ omografica alla figura F .*

Perciò prendiamo un piano generico per la retta l_1 e scegliamo in esso genericamente un punto S' ed una retta s .

Facciamo corrispondere ad un punto A della F il punto $\bar{A}$ di Σ che si ottiene intersecando il raggio (SA_1) col piano $(s A_2)$. La corrispondenza Ω così generata tra F ed $\bar{F}$ è un'omografia di Σ .

Infatti, indicato con L il punto d'incontro di una retta generica a di Σ col piano λ , proiettante in ambedue le prospettive, la sua immagine L_1 su π è il punto comune alla retta a_1 , immagine di a , e la retta l_1 ; ed analogamente l'immagine A' su π' è il punto comune delle rette a' ed l' . Trasformando la retta a' nella retta p , mediante proiezione da P' e la proiettività Π , al punto L' corrisponde il punto L_2 (comune alle rette l_1 e p). Dunque nella proiettività tra le rette a_1 e p , in cui si corrispondono le coppie (A_1, A_2) rappresentatrici dei punti della retta a , la retta l_1 congiunge la coppia di punti corrispondenti (L_1, L_2) .

Proiettando da S' i punti A_1 della a_1 e da s i punti corrispondenti A_2 della p si ottengono un fascio di raggi ed un fascio di piani in corrispondenza proiettiva. Ma questa proiettività è

una prospettiva, perchè il raggio $(S' L_1)$ appartiene al piano corrispondente $(s L_2)$. Dunque alla retta generica a di F corrisponde nella Ω proiettivamente una retta $\bar{a}$ di $\bar{F}$, cioè la Ω è un' omografia.

9. Generalizzazione agli iperspazi.

Se tra uno spazio lineare S_n ed uno spazio lineare S_m ($n > m \geq 2$) intercede una corrispondenza algebrica, tale che ad un punto generico dell' S_n corrisponde un punto generico dell' S_m , e tale che ad una retta punteggiata dell' S_n corrisponde una retta punteggiata dell' S_m , diremo che l' S_m è un' *immagine lineare* dell' S_n (n. 3).

La varietà algebrica V_{n-m} ($n - m \geq 1$) dei punti dell' S_n che hanno nell' S_m come immagine un medesimo punto P_1 , descrive, al variare di P_1 nell' S_m , un sistema algebrico ∞^m di V_{n-m} di indice 1, che indicheremo con (S_{n-m-1}) . Facciamo descrivere al punto P_1 una retta generica r_1 dell' S_m . Il corrispondente sistema algebrico ∞^1 di V_{n-m} genera una varietà V_{n-m+1} .

Due punti generici, P e Q , di questa varietà hanno come immagini P_1 e Q_1 due punti distinti della retta r_1 . Dunque la retta (PQ) , in quanto ha come immagine la retta r_1 , appartiene alla V_{n-m+1} , cioè questa varietà è uno spazio lineare S_{n-m+1} .

Poichè per un punto P_1 dell' S_m passano ∞^{m-1} ($m - 1 \geq 1$) rette r_1 , per la varietà V_{n-m} dei punti dell' S_n che hanno come immagine P_1 , passano ∞^{m-1} spazi lineari S_{n-m+1} : cioè questa varietà è pure uno spazio lineare S_{n-m} . E infine, poichè due punti dell' S_m individuano una retta r_1 , due generici spazi S_{n-m} del sistema (S_{n-m-1}) appartengono ad un S_{n-m+1} . In base a quest' ultima condizione ⁽⁶⁾, e perchè dobbiamo escludere che gli S_{n-m} appartengano ad un S_{n-m+1} fisso in quanto per un punto generico dell' S_n passa uno di essi, possiamo concludere che questi spazi passano per un medesimo S_{n-m-1} , cioè formano una S_{n-m-1} - stella.

Tra gli S_{n-m} della S_{n-m-1} - stella ed i punti dell' S_m , intercede una corrispondenza *biunivoca* Ω' , nella quale ad un

⁽⁶⁾ E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923] pag. 16.

fascio di S_{n-m} corrisponde una retta punteggiata. Dunque la Ω' è un' omografia (omografia rappresentatrice). Estendendo l' accezione introdotta al n. 4, possiamo concludere:

Un' immagine lineare di uno spazio lineare S_n dentro uno spazio lineare S_m ($n > m \geq 2$) si ottiene sempre con una proiezione generalizzata dell' S_n da un suo S_{n-m-1} sopra l' S_{n-m} .

10. Una rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n in uno spazio lineare S_m ($n \geq m \geq 2$), tale che, mentre le prime immagini appartengano a tutto l' S_m , le seconde immagini appartengano ad un S_l dell' S_m ($m \geq l \geq 2$, $m + l \geq n$), (⁷), si compone dunque di due distinte *immagini lineari*. In conclusione:

La più generale rappresentazione lineare di uno spazio lineare S_n in uno spazio lineare S_m ($n > m \geq l \geq 2$) si ottiene nel seguente modo.

Presi nell' S_n uno spazio lineare S_{n-m-1} ed uno spazio lineare S_{n-l-1} , non incidenti, si stabilisca un' omografia Ω' tra la S_{n-m-1} - stella e lo spazio S_m ed un' omografia Ω'' tra S_{n-l-1} - stella ed uno spazio S_l dell' S_m . Un punto generico A dell' S_n si rappresenti nell' S_n dalla coppia dei punti (A_1, A_2) che secondo Ω' ed Ω'' , corrispondono rispettivamente agli spazi che dall' S_{n-m-1} e dall' S_{n-l-1} proiettano il punto A .

Segnalo come interessante lo studio delle diverse proprietà che intervengono in questa rappresentazione e dei diversi casi particolari, soprattutto ove negli spazi lineari S_n ed S_m s' introduca (proiettivamente) una metrica.

(⁷) Ometto il caso $l = 1$ che abbisognerebbe di una trattazione separata, del tutto analoga a quella svolta (n. 6) per $n = 3$.