RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 4 (1933), p. 52-66

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__52_0>

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE SFERICHE SMORZATE E FORZATE

di ANGELO TONOLO

L'espressione analitica dell' integrale dell' equazione delle onde sferiche smorzate

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} U - k\,U = 0 \left(\underset{2}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

si può presentare sotto forme diverse [1]. In particolare siano qui menzionate la formula di WEBER, e la formula di BRILLOUIN, le quali danno rispettivamente l'espressione analitica in discorso, o sotto una forma analoga a quella assegnata da POISSON, oppure a quella data da KIRCHHOFF all' integrale dell' equazione delle onde sferiche

[1] 1 – CARVALLO, *Principe d' Huygens dans les corps isotropes.* [Comptes Rendus, Ac. Sc. T. CXX, (1895)].

2 – BIRKELAND, *Solution générale des équations de Maxwell pour un milieux absorbant homogène et isotrope.* [Ibidem, oppure; Archive de Genève, T. 34, (1895))].

3 – WEBER, *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* [Edizione 1901, T. II].

4 – BRILLOUIN, *Propagation dans les milieux conducteurs.* [Comptes Rendus, Ac. Sc. T. XXXVI, (1903)].

5 – HADAMARD, *Le probème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* [Paris, Hermann et C^ie^. (1932)]. Nel «Livre IV, Chap. premier, § 154» di quest' Opera, sono date due formule che si identificano con quelle di WEBER e di BRILLOUIN.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \underset{2}{\Delta} U = 0 . \tag{2}$$

Particolarizzando in modo conveniente una formula generale data dal Tedone ([2]) per l'integrazione della (1), se ne ricaverebbe un' altra da considerarsi pure un' estensione di quella classica di Kirchhoff, e diversa dalla formula di Brillouin. La formula in parola è contenuta, come caso particolare, in una più generale che io ottengo in questa Nota, cercando per l'integrale dell' equazione delle onde sferiche smorzate e forzate

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} U - k\, U = X , \tag{3}$$

una formula di rappresentazione che sia un' estensione di quella data da Beltrami per l'integrale dell' equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} U = X . \tag{4}$$

Il ben noto metodo d' integrazione di Volterra-Tedone mi ha condotto dapprima a scrivere nel cronotopo una opportuna espressione analitica dell' integrale della (3). Ho poi liberato questo primo risultato dalla forma iperspaziale, mettendo in evidenza nella formula finale lo spazio fisico e il tempo.

Se σ è una superficie chiusa che limita una porzione S dello spazio ordinario, e se U è una soluzione regolare della (3), la formula in discorso assegna i valori di U nei punti interni di S e per qualsiasi valore del tempo in funzione dei valori che U e la sua derivata rispetto al tempo assumono nell' istante iniziale nello spazio S, e dei valori che U e la sua derivata normale prendono in ogni istante di tempo nei punti della superficie σ.

([2]) Tedone, *Sull' integrazione delle equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti, costanti del second' ordine.* [Rend. della R. Acc. del Lincei, serie 5ª, Vol. XXIII, (1914)].

§ 1. Espressione analitica dell'integrale dell'equazione (3) nel cronotopo.

Una regione finita S dello spazio ordinario sia limitata da una superficie chiusa σ. Sia (x_1, y_1, z_1) un punto interno ad S. All'istante t_0 lo spazio S può immaginarsi come una porzione dell'iperpiano $t = t_0$ del cronotopo (x, y, z, t). Consideriamo la varietà cilindrica a tre dimensioni che ha per direttrice la superficie σ e per generatrici le parallele all'asse t condotte dai punti σ, e la varietà conica Γ di equazione

$$t_1 - t = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r$$

il cui vertice $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ abbia la coordinata t_1 così grande che le generatrici di Γ incontrino l'iperpiano $t = t_0$ in punti che siano tutti esterni al campo S. Indichiamo allora con Λ quella parte della varietà cilindrica che è limitata dalla sua intersezione con Γ e da σ. Per fissare le idee, si supponga che nella regione S_4 del cronotopo limitata da Γ, Λ, S sia sempre $t_1 \geq t \geq t_0$, $t_1 - t \geq r$. Da S_4 togliamo la regione racchiusa dall'ipercilindro λ di equazione

$$r = \varepsilon,$$

ove ε denota una costante che poi faremo tendere a zero, e diciamo S' e Γ' ciò che resta di S e di Γ quando venga tolta quella parte che vi stacca la varietà λ. Sia infine S'_4 quella porzione di S_4 limitata da Γ', Λ, S', λ, il cui complesso indichiamo con Σ.

In questo spazio S'_4 una soluzione regolare dell'equazione aggiunta della (3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi - k\varphi = 0 \tag{5}$$

è

$$\varphi_1 = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) \frac{I_1(\rho)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{k}\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2},$$

dove $I_1(\rho)$ è la funzione di Bessel non oscillante di primo ordine dell'argomento ρ. Indichiamo con U un integrale regolare in S_4 dell'equazione

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} U - kU = X.$$

Si ha, con ovvia applicazione del lemma di Green,

$$(7)\qquad \int_\Sigma \left[\varphi_1 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} U - kU \right\} - U \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \underset{2}{\Delta} \varphi_1 - k\varphi_1 \right\} \right] dS'_4 =$$

$$= \int_\Sigma \left[U \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz \right) \right\} - \right.$$

$$\left. - \varphi_1 \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial U}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial U}{\partial z} \cos nz \right) \right\} \right] d\Sigma,$$

nella quale n indica la direzione della normale al contorno Σ di S'_4 volta verso l'interno di S'_4. Sulle varietà cilindriche Λ e λ, si ha

$$\cos nt = 0,$$

mentre sull'iperpiano $t = t_0$, e quindi in particolare nello spazio S', è

$$\cos nt = 1, \qquad \cos nx = \cos ny = \cos nz = 0.$$

Sull'ipercono Γ valgono le identità

$$\varphi_1 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cos nt - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz \right) = 0;$$

sulla varietà λ risulta

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nz =$$

$$= -\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{t_1-t}{\varepsilon^2} - k\frac{I_2(\rho)}{\rho^2}\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon} - 1\right)\varepsilon,$$

dove $I_2(\rho)$ è la funzione di Bessel non oscillante di second' ordine dell' argomento ρ. Su Λ si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial}{\partial z}\cos nz = \frac{d}{dn}.$$

Tenendo conto di queste circostanze, la formula (7) diventa la seguente:

$$(8)\qquad \int_{S'}\left(U\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \varphi_1\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t_0} dS' + \int_{\Lambda}\left(\varphi_1\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_1}{dn}\right)d\Lambda +$$

$$+\int_{\lambda}\left[\varphi_1\frac{dU}{dr} + U\left\{\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{t_1-t}{\varepsilon^2} + k\frac{I_2(\rho)}{\rho^2}\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon} - 1\right)\varepsilon\right\}\right]d\lambda =$$

$$= \int_{S'_4}\varphi_1 X\, dS'_4.$$

Se ora indichiamo con $d\omega$ l' elemento d' ipersuperficie sferica di raggio unitario col centro nel punto P_1, $\varepsilon^2 d\omega dt$ sarà l' elemento di varietà cilindrica λ, e pertanto passando al limite per $\varepsilon \to 0$ nella precedente (8), si trae

$$(9)\qquad \frac{4\pi}{\sqrt{k}}\int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t)\, I_1\left[\sqrt{k}\,(t_1 - t)\right]dt = \Phi_1,$$

avendo posto

$$(10)\qquad \Phi_1 = \int_{S}\left(\varphi_1\frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{t_0} dS + \int_{\Lambda}\left(U\frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1\frac{dU}{dn}\right)d\Lambda +$$

$$+\int_{S_4}\varphi_1 X\, dS_4$$

Un procedimento eguale al precedente, assumendo come soluzione elementare della equazione (5) la funzione

$$\varphi_2 = r\left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)^2 \frac{I_2(\rho)}{\rho^2},$$

conduce alla formula

$$(11) \qquad \frac{4\pi}{k}\int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t)\, I_2\left[\sqrt{k}\,(t_1 - t)\right] dt = \Phi_2,$$

essendo

$$(12) \qquad \Phi_2 = \int_S \left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)_{t_0} dS + \int_\Lambda \left(U\frac{d\varphi_2}{dn} - \varphi_2 \frac{dU}{dn}\right) d\Lambda +$$

$$+ \int_{S_4} \varphi_2 X\, dS_4 .$$

Derivando la (9) rispetto a t_1, e ricordando che

$$2\,\frac{dI_1(\rho)}{d\rho} = I_0(\rho) + I_2(\rho),$$

si trae

$$4\pi \int_{t_0}^{t_1} U(x_1, y_1, z_1, t)\, I_0\left[\sqrt{k}\,(t_1 - t)\right] dt = 2\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} - k\,\Phi_2 .$$

Derivando ancora rapporto a t_1, e tenendo presente che $I_0(0) = 1$ e $\dfrac{dI_0(\rho)}{d\rho} = I_1$, si ricava

$$4\pi\, U(x_1, y_1, z_1, t_1) = -k\Phi_1 + 2\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t_1^2} - k\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1} .$$

Infine, se sostituiamo al posto di Φ_1 e Φ_2 le loro espressioni (10), (12), si perviene alla formula finale

$$(13) \qquad 4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = -k\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)_{t_0} dS -$$

$$-k\int_\Lambda \left(U\frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1 \frac{dU}{dn}\right) d\Lambda - k\int_{S_4} \varphi_1 X\, dS_4 +$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)_{t_0} dS + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\Lambda \left(U\frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1\frac{dU}{dn}\right) d\Lambda +$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_4} \varphi_1 X\, dS -$$

$$-k\frac{\partial}{\partial t_1}\int_S \left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)_{t_0} dS - k\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\Lambda \left(U\frac{d\varphi_2}{dn} - \varphi_2\frac{dU}{dn}\right) d\Lambda -$$

$$-k\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_4} \varphi_2 X\, dS_4 .$$

§ 2. Espressione analitica dell'integrale dell'equazione (3) nello spazio ordinario.

In questo paragrafo, trasformeremo la formula (13) in modo da mettere in evidenza nel secondo membro lo spazio fisico e il tempo. A questo scopo osserviamo dapprima che

$$\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1} = \frac{dI_0(\rho)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t_1} = k\frac{t_1 - t}{\rho}\frac{dI_0(\rho)}{d\rho}$$

$$\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r} = \frac{dI_0(\rho)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{kr}{\rho}\frac{dI_0(\rho)}{d\rho}$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} = \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{dI_0(\rho)}{d\rho}\left[\frac{k}{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} = \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 - \frac{d I_0(\rho)}{d\rho}\left[\frac{k}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r\,\partial t_1} = \frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t_1}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{d I_0(\rho)}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t_1}\frac{\partial \rho}{\partial r}.$$

Quindi

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1\,\partial r} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2\left(\frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d I_0(\rho)}{d\rho}\right).$$

Ne segue che possiamo scrivere

$$(15)\qquad \varphi_1 = \frac{1}{kr}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0(\rho)$$

$$(16)\qquad \varphi_2 = \frac{1}{k^2 r}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 I_0(\rho),$$

perchè, avendosi

$$\varphi_2 = \frac{1}{k^2 r}\left(k\frac{t_1 - t}{\rho} - k\frac{r}{\rho}\right)^2 I_2(\rho),$$

$$\frac{2}{\rho} I_2(\rho) = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{2}{\rho} I_1\right] = 2\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d I_0(\rho)}{d\rho}\right],$$

risulta

$$\varphi_2 = \frac{1}{k^2 r}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2\left(\frac{d^2 I_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d I_0(\rho)}{d\rho}\right),$$

e quindi la (16) in forza della (14).

Infine, ricordiamo che sussiste l'identità

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} + k\, I_0(\rho) \equiv 0.$$

Poniamo:

$$A=\int_S \left\{ -k\left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(\varphi_1 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) - \right.$$

$$\left. -k\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)\right\}_{t_0} dS,$$

e osserviamo che $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}$ $(i=1,\,2)$.

Quindi

$$A=\int_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial t}\left(-k\,\varphi_1 + 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\right) + \right.$$

$$\left. + U\frac{\partial}{\partial t_1}\left(-k\,\varphi_1 + 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\right)\right\}_{t_0} dS.$$

Abbiamo successivamente:

$$-k\,\varphi_1 + 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} - k\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} = \frac{1}{r}\left\{ -\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0(\rho) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} - \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(-I_0(\rho) + \frac{1}{k}\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r\,\partial t_1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{rk}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r\,\partial t_1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{rk}\left(\frac{\partial^3 I_0(\rho)}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 I_0(\rho)}{\partial r\,\partial t_1^2}\right).$$

E infine si trae la relazione

$$-k\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2} - k\varphi_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r},$$

oppure la seguente

$$\text{(18)} \qquad -k\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2} - k\varphi_2 = k\frac{I_1(\rho)}{\rho},$$

perchè

$$\text{(19)} \qquad \frac{\partial I_0(\rho)}{\partial r} = -\frac{d I_0(\rho)}{d\rho} k \frac{r}{\rho} = -kr\frac{I_1(\rho)}{\rho}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$(a) \qquad A = k\int_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial t}\frac{I_1(\rho)}{\rho} + U\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right)\right\}_{t_0} dS.$$

Poniamo

$$B = k\int_\Lambda \left(\varphi_1\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_1}{dn}\right)d\Lambda - 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\Lambda \left(\varphi_1\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_1}{dn}\right)d\Lambda +$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\Lambda \left(\varphi_2\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_2}{dn}\right)d\Lambda.$$

Se si osserva che sull'intersezione di Γ con Λ si ha $\frac{t_1 - t}{r} - 1 = 0$, donde $t = t_1 - r$, si può scrivere

$$B = k\int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - r}\left(\varphi_1\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_1}{dn}\right)dt - 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1 - r}\left(\varphi_1\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_1}{dn}\right)dt +$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1 - r}\left(\varphi_2\frac{dU}{dn} - U\frac{d\varphi_2}{dn}\right)dt.$$

Tenendo presente che $\left[\varphi_i\right]_{t_1-r} = 0$, si ha, eseguendo una prima derivazione,

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i \frac{dU}{dn}\,dt = \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{dU}{dn}\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}\,dt\,. \qquad (i=1,\,2)$$

Se poi osserviamo che, avendosi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = \frac{1}{r}\,\frac{I_1(\rho)}{\rho} + k\,(t_1 - t)\left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)\frac{I_2(\rho)}{\rho^2}\,,$$

risulta

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\right]_{t_1-r} = \frac{1}{2r}\,,$$

perchè

$$\left[\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right]_{\rho=0} = \frac{1}{2}\,, \qquad \left[\frac{I_2(\rho)}{\rho^2}\right]_{\rho=0} = \frac{1}{8}\,,$$

si ha, con una seconda derivazione,

$$(21)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_1 \frac{dU}{dn}\,dt = \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{dU}{dn}\,\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2}\,dt + $$

$$+ \frac{1}{2}\int_\sigma \left[\frac{dU}{dn}\right]_{t_1-r} \frac{d\sigma}{r}\,.$$

Tenendo conto che

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right]_{t_1-r} = -\frac{1}{2r}\,, \qquad \frac{d\varphi_i}{dn} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dn}\,, \qquad (i=1,\,2)$$

si ottiene

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\,dt=\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1\,\partial r}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma U\,(t_1-r)\,\frac{dr}{dn}\,\frac{d\sigma}{r}\,,$$

$$(23)\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\,dt=\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t_1\,\partial r}\,dt+$$

$$+\int_\sigma\left[U\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right]_{t_1-r}\frac{dr}{dn}\,d\sigma\,,$$

$$(24)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\,dt=\int_\sigma d\sigma\,\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r} U\,\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial t_1^2\,\partial r}\,dt+$$

$$+\int_\sigma\left[U\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1\,\partial r}\right]_{t_1-r}\frac{dr}{dn}\,d\sigma-\frac{1}{2}\int_\sigma\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{t_1-r}\frac{dr}{dn}\,\frac{d\sigma}{r}\,.$$

In forza delle relazioni (20), (21), (22), (23), (24) si può scrivere

$$B=\int_\sigma d\sigma\left[\int_{t_0}^{t_1-r}\frac{dU}{dn}\left\{k\,\varphi_1-2\,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2}+k\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right\}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1-r}U\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{-k\,\varphi_1+2\,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2}-k\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right\}dt\right]+$$

$$+\int_\sigma\left[-\frac{1}{r}\,\frac{dU}{dn}+U\frac{\partial}{\partial r}\left\{2\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-k\,\varphi_2\right\}\frac{dr}{dn}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{dr}{dn}\right]_{t_1-r}d\sigma\,.$$

Si noti che

$$2\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}-k\varphi_2=\frac{2}{kr}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial I_0(\rho)}{\partial t_1}-$$

$$-\frac{1}{kr}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 I_0(\rho)=$$

$$=\frac{1}{kr}\left(\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2 I_0(\rho)}{\partial r^2}\right)=\frac{I_0(\rho)}{r}.$$

E quindi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-k\varphi_2\right\}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{I_0(\rho)}{\partial r}=-k\frac{I_1(\rho)}{\rho}-\frac{I_0(\rho)}{r^2}.$$

Abbiamo pertanto

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-k\varphi_2\right\}\right]_{t_1-r}=-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{r^2}\right). \tag{25}$$

Tenendo allora conto di questa relazione e della (18) si ottiene in definitiva

$$B=k\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1-r}\left\{U\frac{d}{dn}\left(\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right)-\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{dU}{dn}\right\}dt- \tag{b}$$

$$-\frac{k}{2}\int_\sigma U(t_1-r)\frac{dr}{dn}d\sigma-$$

$$-\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}-U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{t_1-r}d\sigma.$$

Poniamo infine:

$$C = -k\int\limits_{S_4} \varphi_1 X dS_4 + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int\limits_{S_4}\varphi_1 X dS_4 - k\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{S_4}\varphi_2 X dS_4 .$$

Si può scrivere

$$C = \int\limits_S dS \int\limits_{t_0}^{t_1-r} X\left\{-k\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2} - k\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right\}dt +$$

$$+\int\limits_S \frac{X(t_1-r)}{r}\, dS ,$$

perchè

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_S dS\int\limits_{t_0}^{t_1-r} X\varphi_2 dt = \int\limits_S dS\int\limits_{t_0}^{t_1-r} X\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}dt ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int\limits_S dS\int\limits_{t_0}^{t_1-r} X\varphi_1 dt = \int\limits_S dS\int\limits_{t_0}^{t_1-r} X\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_1^2}dt + \frac{1}{2}\int\limits_S\frac{X(t_1-r)}{r}dS .$$

In virtù della relazione (18) si ha allora

$$(c) \qquad C = k\int\limits_S dS\int\limits_{t_0}^{t_1-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\, X dt + \int\limits_S\frac{X(t_1-r)}{r}dS .$$

Surrogando le (*a*), (*b*), (*c*) nella formula (13) si trae l'espressione analitica dell'integrale U sotto la forma definitiva

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = k\int\limits_S\left[U\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right) + \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{dU}{dt}\right]_{t_0} dS +$$

$$+ k \int\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{t_0}^{t_1 - r} \left[U \frac{d}{dn} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dn} \right] dt -$$

$$- \frac{k}{2} \int\limits_{\sigma} U(t_1 - r) \frac{dr}{dn} d\sigma -$$

$$- \int\limits_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d \frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial U}{\partial t} \right]_{t_1 - r} d\sigma +$$

$$+ k \int\limits_{S} dS \int\limits_{t_0}^{t_1 - r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X \, dt + \int\limits_{S} \frac{X(t_1 - r)}{r} dS .$$