RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE VITALI

Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 46-72

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__46_0>

NUOVI CONTRIBUTI ALLA NOZIONE DI DERIVAZIONE COVARIANTE

di GIUSEPPE VITALI

con appendici dei Dott. GIUSEPPE ALIPRANDI – RINA BALDONI – MARGHERITA LICENI e INES SACILOTTO.

Nel presente lavoro si seguono la nomenclatura e le notazioni introdotte nel trattato «G. VITALI. - *Geometria nello spazio hilbertiano*» (1). Nel seguito tale trattato verrà indicato con la sigla GH.

Si sa che la derivazione covariante, nota, fino a pochi anni fa, solo per i sistemi assoluti (2) con indici ed apici di rango 1 (3), è stata estesa (4) a qualunque sistema assoluto con indici ed apici di classi intere (5) qualunque, purchè la varietà base sia sufficientemente generale (6).

La derivazione covariante finora studiata, porta da un sistema assoluto

$$H^{\beta_1,\dots,\beta_s}_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}, \tag{1}$$

ad un nuovo sistema assoluto

$$H^{\beta_1,\dots,\beta_s}_{\alpha_1,\dots,\alpha_r,\gamma}, \tag{2}$$

(1) Editore N. Zanichelli, 1929.

(2) *GH*, p. 166.

(3) *GH*, p. 155, n. 5.

(4) G. VITALI – *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. VII, serie 6, 1 sem. 1928, pp. 626-629) e *GH.* p. 184.

(5) *GH*, p. 155, n. 5.

(6) Cioè se ν è la massima classe degli indici e degli apici del sistema assoluto che si vuol derivare, il σ_ν (*GH.* p. 212) della varietà base abbia il maggior numero possibile di dimensioni.

che ha oltre gli indici e gli apici di (1) un ulteriore indice γ *(indice di derivazione)* variante nella classe 1.

Pareva strano che non si potesse definire il derivato covariante anche con indice di derivazione di rango > 1; ma solo recentemente i tentativi da me fatti in questo senso hanno avuto successo.

In un primo momento ho intravisto la forma da assegnarsi al derivato covariante di un sistema covariante H_α anche per gli stati di rango 2 dell'indice di derivazione, ed il 5 aprile u. s. nella mia lezione di Analisi Superiore ne ho dimostrato il carattere assoluto, prendendo come modello la dimostrazione che figura in GH, a pp. 186-187.

Malgrado che il modello seguito sia, a mio avviso, il più semplice che si conosca in argomento, la nuova dimostrazione risultava troppo pesante (v. appendice V).

Cercando di semplificare questa dimostrazione sono giunto ad un risultato sorprendente.

Il derivato covariante di un sistema assoluto può essere scritto in una forma sintetica (v. n. 12, def. 3) che mette in evidenza il suo carattere assoluto.

La forma sintetica del derivato covariante non ha solo il vantaggio di far risparmiare una lunga dimostrazione, ma consente di definire il derivato covariante di un sistema assoluto con indici ed apici di classi intere per qualunque stato dell'indice di derivazione scelto nel campo Ω [1].

La forma sintetica dei derivati covarianti consente di rinnovare la loro teoria con evidenti vantaggi didattici e con una notevole contrazione delle formule [2].

Però le belle proprietà della derivazione covariante che valevano nel classico calcolo assoluto del Ricci, e che si erano

[1] *GH*, p. 154, n. 3.

[2] Ciò che qui avviene ricorda i vantaggi derivati altra volta dalla forma sintetica dei simboli di Riemann (v. G. Vitali - *Geometria nello spazio hilbertiano* (memoria pubblicata negli Atti del R. Ist. Veneto 1927-28, I, LXXXVII, p. 394, Ines Sacilotto, *I simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1929, pp. 213-217, e G. Vitali, *Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato*, (ib. 1929, pp. 160-192).

conservate anche nella sua estensione ai sistemi assoluti con indici ed apici di classe intera qualunque quando l'indice di derivazione resta di rango 1, subiscono una degradazione col crescere del rango di questo indice (v. appendici I, II, III), o risultano alquanto alterate perdendo un poco della loro primitiva snellezza (n. 23).

La materia è distribuita nel modo seguente:

Nel § 1. sono raccolte alcune nozioni ed alcune proposizioni necessarie per la facile intelligenza del seguito.

Nel § 2. è data la definizione sintetica della derivazione covariante con indice di derivazione qualunque, (n. 12), se ne trae una espressione molto utile per il suo studio [n. 15, formula (22)], si studia la derivata del sistema δ^{β}_{α} (n. 17), si dimostra che la derivazione covariante è permutabile colle reciprocità (n. 18, teor. 7), si dimostra che la derivazione covariante è distributiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione (n. 19, teor. 8 e 9), si dimostra che per la derivazione covariante di un prodotto vale la regola che si ha per la derivazione comune (n. 10), infine si dà una espressione della differenza che passa fra i sistemi che si ottengono saturando dopo o prima della derivazione covariante [v. form. (33)], e si mostra che ritoccando leggermente l'enunciato del principio della permutazione della saturazione e della derivazione covariante, esso può valere anche per $\rho_{\gamma} = 2$, [v. form. (37)].

Nel § 3., appendice I, la dott. R. Baldoni studia le derivate dei sistemi I_{α} ed f_{α} e mostra in che senso possono essere estese le note proprietà che per questi sistemi ha la derivazione covariante con indice di derivazione di classe 1.

Nel § 4., appendice II, la dott. M. Licexi esamina le derivate covarianti dei sistemi $a_{\alpha,\beta}, \underset{\nu}{a}^{\alpha;\beta}$ e di queste e di quella del sistema δ^{β}_{α} dà varie espressioni.

Nel § 5., appendice III, il dott. G. Aliprandi dimostra che per $\rho_{\gamma} = 2$ il principio di permutazione della saturazione e della derivazione covariante non può conservare la forma nota fin qui.

Nel § 6., appendice IV, la dott. I. Sacilotto rinnova l'esposizione della sua nota che condusse all'estensione dei simboli di

Riemann, servendosi della definizione sintetica della derivazione covariante, pervenendo direttamente alla forma sintetica dei simboli di Riemann.

Nel § 7., appendice V, il dott. G. Aliprandi dimostra che per $\rho_\gamma = 1$ la derivata definita in questa nota è la stessa definita in *GH*. Inoltre scrive per $\rho_\gamma = 2$ la derivata covariante di un covariante ad un indice nella forma da me intuita in un primo tempo, e riproduce la dimostrazione del suo carattere assoluto (allora necessaria) da me data il 5 aprile u. s. e da lui raccolta durante la lezione.

§ 1. – Nozioni e proposizioni preliminari.

1. - Se $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono due funzioni a quadrato sommabile in g, con la scrittura

$$\varphi(t) \times \psi(t)$$

indicherò, in modo breve, l'integrale esteso a g del prodotto delle due funzioni.

Inoltre, sempre per abbreviare la scrittura, se γ è uno stato di un indice variante in Ω, e se $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda$ sono le sue cifre, se infine P è una funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_n$, porrò

$$\Delta_\lambda P = \frac{\partial^\lambda P}{\partial u_{i_1}\, \partial u_{i_2} \ldots \partial u_{i_\lambda}} .$$

2. - Supponiamo che $f(t, u)$ sia una determinante di una varietà V_n ad n dimensioni sufficientemente generica. Corrispondentemente ad essa sono definiti i sistemi

$$a_{\alpha,\beta} \quad \text{e} \quad \underset{v}{a}^{\alpha,\beta} \quad (^1) .$$

Def. 1. – Se (1) è un sistema assoluto, si dirà che si eseguisce su di esso la *reciprocità* rispetto all'indice α_h (all'apice β_k) quando si passa al sistema

$$\Sigma_{\alpha_h} \; \underset{v}{a}^{\alpha_h, \alpha'_h} \cdot H \qquad (\Sigma_{\beta_k} \; a_{\beta_k, \beta'_k} \cdot H) ,$$

(1) *GH*. p. 181.

ν indicando la classe di α_h. Se su (1) si eseguiscono successivamente più reciprocità il risultato che si ottiene è indipendente dall'ordine secondo cui si eseguiscono dette reciprocità. Tale risultato si dirà *un reciproco* di (1). Ciò che si ottiene eseguendo su (1) tutte le reciprocità rispetto ai vari indici ed apici si dice poi *il reciproco* di (1).

3. – Nel considerare il covariante f_α è comodo mettere in evidenza la variabile t, e quindi lo scriveremo $f_\alpha(t)$.

Indicheremo poi con $\underset{\nu}{f^\alpha}(t)$ il reciproco di $f_\alpha(t)$, ν indicando la classe in cui si pensa variare l'α; consegue facilmente la

$$f_\alpha(t) = \Sigma_\gamma \, a_{\alpha,\gamma} \underset{\nu}{f^\gamma}(t), \tag{3}$$

la Σ essendo estesa al variare di γ nella classe ν.

4. – Lemma 1. - Si ha

$$f_\alpha(t) \times \underset{\nu}{f^\beta}(t) = \delta^\beta_\alpha \tag{4}$$

il sistema nel 2 membro essendo quello definito in *GH*, p. 169.

Dim. - Infatti

$$f_\alpha(t) \times \underset{\nu}{f^\beta}(t) = f_\alpha(t) \times \Sigma_\gamma \underset{\nu}{a^{\beta,\gamma}} f_\gamma(t) = \Sigma_\gamma \, a_{\alpha,\gamma} \cdot \underset{\nu}{a^{\gamma,\beta}} = \delta^\beta_\alpha .$$

Lemma 2. - Se $\rho_\gamma = 1$, ed α e β variano nella classe ν, si ha

$$\underset{\nu}{C^\beta_{\alpha\gamma}} = f_{\alpha\gamma}(t) \times \underset{\nu}{f^\beta}(t) \qquad (GH\text{, p. } 182). \tag{5}$$

Dim. - Infatti si vede subito che il 2 membro di (5) vale

$$\Sigma_\xi \, a_{\alpha\gamma,\xi} \cdot \underset{\nu}{a^{\beta,\xi}} = \underset{\nu}{C^\beta_{\alpha\gamma}} .$$

Lemma 3. - Nelle stesse ipotesi del lemma 2 si ha

$$f_{\alpha\gamma}(t) \times \underset{\nu}{f^\beta}(t) + f_\alpha(t) \times \Delta_\gamma \underset{\nu}{f^\beta}(t) = 0 \tag{6}$$

e quindi pel lemma 2

$$(7)\qquad \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha\gamma} = - f_\alpha(t) \times \Delta_\gamma \underset{\nu}{f}{}^{\beta}(t)\,.$$

Dim. – La (6) discende dalla 4) derivandone i due membri rispetto ad u_γ.

Lemma 4. – Se α e β variano in classe ν, se α' e β' variano in classe μ, ed infine se $\rho_\gamma = 1$ si ha

$$(8)\qquad f_\alpha(\tau)\cdot \underset{\mu}{f}{}^{\alpha'}(t) \times \Delta_\gamma [\underset{\nu}{f}{}^{\beta}(\tau)\cdot f_{\beta'}(t)] = \delta^{\beta}_{\alpha}\cdot \underset{\mu}{C}{}^{\alpha'}_{\beta'\gamma} - \delta^{\alpha'}_{\beta'}\cdot \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}\,.$$

Dim. – Basta sviluppare la Δ_γ colla regola di derivazione di un prodotto e poi distribuire, tenendo conto inoltre delle (4), (5) e (7).

Lemma 5. – Se α ed α' variano nella classe ν, e $\rho_\gamma = 1$, se inoltre Σ_β si intende estesa al variare di β nella classe ν, si ha

$$(9)\qquad \Delta_\gamma [\Sigma_\beta \underset{\nu}{f}{}^{\beta}(\tau)\cdot f_\beta(t)] \times f_\alpha(\tau)\cdot \underset{\nu}{f}{}^{\alpha'}(t) = 0\,.$$

Dim. – Infatti da (8) si ha che il 1 membro di (9) vale

$$\Sigma_\beta\, \delta^{\beta}_{\alpha}\cdot \underset{\nu}{C}{}^{\alpha'}_{\beta\gamma} - \Sigma_\beta\, \delta^{\alpha'}_{\beta}\cdot \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha\gamma} = \underset{\nu}{C}{}^{\alpha'}_{\alpha\gamma} - \underset{\nu}{C}{}^{\alpha'}_{\alpha\gamma} = 0\,.$$

5. – In relazione ad un sistema assoluto (1) consideriamo il sistema

$$(10)\qquad U = \prod_{1}^{r}{}_{h} f_{\alpha_h}(\tau_h)\cdot \prod_{1}^{s}{}_{k} \underset{\nu_k}{f}{}^{\beta_k}(\theta_k)\,,$$

dove ν_k indica la classe in cui varia l'apice β_k, e τ_h, θ_k sono da considerarsi come $r+s$ variabili indipendenti fra loro, ciascuna variabile in g.

Def. 2. – Il sistema (10) si dirà il *sistema U associato ad* (1), ed il reciproco di (10) si dirà il *sistema V associato ad* (1).

6. – Dal Lemma 1 consegue il

Teor. 1. – Si ha

$$(11)\qquad U^{\beta_1,\dots}_{\alpha_1,\dots} \times V^{\alpha'_1,\dots}_{\beta'_1,\dots} = \prod_{1}^{r}{}_{h}\, \delta^{\alpha'_h}_{\alpha_h} \prod_{1}^{s}{}_{k}\, \delta^{\beta_k}_{\beta'_k}\,,$$

se i fattori che figurano nel 1 membro di (11) sono l' U ed il V associati ad un medesimo sistema (1).

7. - Se (1) è un sistema assoluto, e se $V^{\alpha_1,\dots}_{\beta_1,\dots}$ è il sistema V ad esso associato, noi porremo

$$[H,f]=\Sigma H\cdot V, \tag{12}$$

la Σ essendo estesa al variare delle α_h e β_k nelle rispettive classi.

Evidentemente il sistema (12) è un invariante che dipende dalle variabili τ_h e θ_k.

8. - Dal teor. 1 consegue il

Teor. 2. - Si ha

$$[H,f]\times U=H, \tag{13}$$

naturalmente l' U che qui figura essendo l'associato ad (1).

9. - Teor. 3. - Se (1) è un sistema assoluto e

$$K^{\beta_{s+1},\dots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\dots,\alpha_{r+p}} \tag{14}$$

è un'altro sistema assoluto, e se

$$P^{\beta_1,\dots}_{\alpha_1,\dots} \tag{15}$$

è il prodotto [1] di (1) e (14), si ha

$$[P,f]=[H,f]\cdot[K,f] \tag{16}$$

Dim. - Basta osservare che, se V' e V'' sono i V associati ad (1) e a (14), il V associato a (15) è uguale a $V'\cdot V''$.

10. - Teor. 4. - Se X ed Y sono due funzioni delle u_i $(i=1,\dots n)$ si ha, qualunque sia γ scelto in Ω,

$$\Delta_\gamma(X\cdot Y)=\Sigma''\Delta_\zeta X\cdot\Delta_\eta Y, \tag{17}$$

dove Σ'' si estende a tutti gli spezzamenti che si possano fare di γ in due gruppi di cifre η e ζ, gruppi di cifre che quando

(1) *GH.* p. 175.

non sono costituiti da nessuna cifra sono da interpretarsi come indici, mentre se uno di essi p. es. η è privo di cifre, si deve intendere che l'operazione Δ_η lascia inalterata la funzione su cui opera [1].

Dim. – Basta eseguire successivamente le derivate semplici di cui è costituita la Δ_γ applicando ciascuna volta le regole di derivazione di prodotto e di somma.

11. – Teor. 5. – Per due funzioni X ed Y, come nel teor. 4, si ha

$$Y \times \Delta_\gamma X = \Sigma'' \varepsilon(\zeta) \Delta_\eta [X \cdot \Delta_\zeta Y], \tag{18}$$

dove $\varepsilon(\zeta)$ vale $+1$ o -1 secondo che il numero delle cifre di ζ è pari o dispari.

La (18) si dimostra per via ricorrente [2].

§ 2. – Derivazione covariante.

12. – Def. 3. – Si chiama *derivato covariante* del sistema assoluto (1) il sistema

$$H^{\beta_1, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma} = U \times \Delta_\gamma [H, f], \tag{19}$$

comunque sia scelto l'indice γ in Ω. Il sistema (19) si indicherà anche con $D_\gamma H^{\beta_1, \dots}_{\alpha_1, \dots}$ o con $D_\gamma H$.

Teor. 6. – Il sistema (19) è un sistema assoluto.

Dim. – Infatti i fattori del prodotto da integrare nel 2 membro di (19) sono il primo un sistema assoluto cogli stessi indici ed apici di (1) ed il secondo un covariante di indice γ.

[1] Per maggiore chiarezza aggiungerò che nella (17) i gruppi η e ξ devono essere considerati come *combinazioni* delle cifre di γ, pensate queste cifre (anche se non lo sono) come se fossero a due a due diverse.

[2] La (18) è stata già usata da me in G. Vitali: *Sopra i problemi di massimo o di minimo riguardanti le varietà nello spazio hilbertiano.* (Rend. del R. Ist. Lombardo - serie II, vol. LXII, 1929, p. 135), ed è stata dimostrata da G. Usai in G. Usai: *Osservazioni ed aggiunte ad una mia pubblicazione sul calcolo delle variazioni,* (ib. vol. XLIX, 1917, pp. 999-1000).

13. - Si può dimostrare (v. app. V) che se $\rho_\gamma = 1$ il sistema (19) coincide col derivato covariante di (1) descritto in *GH*, pp. 184-185.

14. - Dalla def. 3, se α varia nella classe ν, si ha

$$D_\gamma f_\alpha(t) = f_\alpha(\tau) \times \Delta_\gamma \underset{\nu}{\Sigma_\beta f_\beta(t) f^\beta(\tau)} . \tag{20}$$

Da questa e dalla (9) si ricava se $\rho_\gamma = 1$,

$$\underset{\nu}{f^{\alpha'}}(t) \times D_\gamma f_\alpha(t) = 0 , \tag{21}$$

dalla quale risulta che per $\rho_\gamma = 1$ la $D_\gamma f_\alpha(t)$ è ortogonale a tutte le $f^{\alpha'}(t)$ con α' di classe ν, e da ciò si ricava facilmente il noto teor. che dice « il $[\nu + 1]$-esimo ricciano di f ha i termini non nulli ortogonali al σ_ν » [1].

15. - Supponiamo ancora che (1) sia un sistema assoluto, e poniamo nella (18)

$$X = U \text{ ed } Y = [H, f] .$$

Abbiamo subito

$$[H, f] \times \Delta_\gamma U = \Sigma'' \varepsilon(\zeta) \Delta_\eta D_\zeta H ,$$

ma il termine di Σ'' che corrisponde all'η privo di cifre vale $\varepsilon(\gamma) D_\gamma H$, e quello corrispondente al ζ privo di cifre vale $\Delta_\gamma H$, e quindi la relazione precedente si può scrivere

$$[H, f] \times \Delta_\gamma U = \varepsilon(\gamma) D_\gamma H + \Delta_\gamma H + \Sigma' \varepsilon(\zeta) \Delta_\eta D_\zeta H ,$$

dove la Σ' si intende estesa a tutti gli spezzamenti di γ in gruppi η e ζ, esclusi quelli in cui uno dei gruppi è privo di cifre.

Risolvendo rispetto a $D_\gamma H$, si ricava

$$D_\gamma H = -\varepsilon(\gamma) \{\Delta_\gamma H - [H, f] \times \Delta_\gamma U\} - \Sigma' \varepsilon(\eta) \cdot \Delta_\eta D_\zeta H , \tag{22}$$

ed in particolare

$$D_\gamma H = -\varepsilon(\gamma) \{\Delta_\gamma H - [H, f] \times \Delta_\gamma U\} , \text{ se } \rho_\gamma = 1 . \tag{23}$$

[1] *GH*. p. 201, n. 4.

16. - Se I è un invariante, e se si pone nella (22) al posto di H il sistema I_α [1] con α variante in classe ν, si ha

$$D_\gamma I_\alpha = -\varepsilon(\gamma)[I_{\alpha\gamma} - f_{\alpha\gamma}(\tau) \times \Sigma_\lambda I_\lambda \cdot f^\lambda(\tau)] - \tag{24}$$
$$-\Sigma' \varepsilon(\eta) \Delta_\eta D_\zeta I_\alpha$$

ed in particolare

$$D_\gamma f_\alpha(t) = -\varepsilon(\gamma)[f_{\alpha\gamma}(t) - f_{\alpha\gamma}(\tau) \times \Sigma_\lambda f_\lambda(t) \cdot f^\lambda(\tau)] - \tag{25}$$
$$-\Sigma' \varepsilon(\eta) \Delta_\eta D_\zeta f_\alpha(t) \, .$$

Se $\rho_\gamma = 1$, la (24), per gli stati di α pei quali $\rho_\alpha < \nu$, dà

$$D_\gamma I_\alpha = I_{\alpha\gamma} - \Sigma_\lambda I_\lambda \cdot \delta^\lambda_{\alpha\gamma} = I_{\alpha\gamma} - I_{\alpha\gamma} \, ,$$

e quindi

$$D_\gamma I_\alpha = 0 \, , \text{ se } \rho_\gamma = 1 \, , \ \rho_\alpha < \nu \, , \tag{26}$$

e si ha così un risultato noto [2].

Se poi in (25) si suppone $\rho_\gamma = 1$, e se β è un indice per cui $\rho_\beta < \nu$, si ha

$$f_\beta(t) \times D_\gamma f_\alpha(t) = a_{\alpha\gamma,\beta} - \Sigma_\lambda a_{\lambda,\beta} \underset{\nu}{C}{}^\lambda_{\alpha\gamma} = a_{\alpha\gamma,\beta} - a_{\alpha\gamma,\beta}$$

ed infine

$$f_\beta(t) \times D_\gamma f_\alpha(t) = 0 \, , \text{ se } \rho_\gamma = 1 \text{ e } \rho_\beta < \nu \, , \tag{27}$$

e risulta così in altro modo la proprietà dei ricciani già citata al n. 14.

I risultati delle formule (26) e (27) non si conservano completamente quando $\rho_\gamma > 1$. Essi vanno via via svanendo col crescere di ρ_γ [3].

17. - Siano α e β varianti nella classe ν, e sia γ un qualunque indice di derivazione.

(1) *GH.* p. 156 e p. 167.
(2) *GH.* p. 200, n. 1.
(3) V. § 3, Appendice 1.

Per la Def. 3 del n. 12, si ha

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = f_\alpha(\tau) f^\beta(\theta) \times \Delta_\gamma \Sigma_{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha'}^{\beta'} \cdot f^{\alpha'}(\tau) f_{\beta'}(\theta),$$

la Σ essendo estesa al variare di α' e β' nella classe ν. Tenendo conto dei valori di $\delta_{\alpha'}^{\beta'}$

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = f_\alpha(\tau) f^\beta(\theta) \times \Delta_\gamma \Sigma_{\alpha'} f^{\alpha'}(\tau) f_{\alpha'}(\theta) \tag{28}$$

e da questa relazione si ricavano indifferentemente le seguenti

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = f_\alpha(\tau) \times D_\gamma f^\beta(\tau) \tag{29}$$

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = f^\beta(\theta) \times D_\gamma f_\alpha(\theta). \tag{29'}$$

Dalla (29') e dalla (21) si ha

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = 0, \text{ se } \rho_\gamma = 1. \tag{30}$$

Quest'ultimo risultato figura anche in *GH*, p. 194, n. 3.

18. - Teor. 7. - Il derivato covariante di un reciproco di un sistema assoluto (1) è uguale allo stesso reciproco del derivato covariante di (1).

Dim. - Basterà dimostrare il teor. per il caso in cui si eseguisca una sola reciprocità. Si indichi con K il reciproco del sistema (1) rispetto all'indice α_h, con U_1 e V_1 le U e V associate ad H, e con U_2 e V_2 quelle associate a K. Dal fatto evidente che V_1 si ottiene da V_2 eseguendo la reciprocità rispetto all'indice α_h risulta subito che

$$[H, f] = [K, f],$$

e quindi che

$$\Delta_\gamma [H, f] = \Delta_\gamma [K, f]$$

ed infine perchè anche U_2 risulta da U_1 eseguendo la reciprocità rispetto all'indice α_h, si ha tosto

$$[\Sigma_{\alpha_h} a^{\alpha_h, \alpha'_h} D_\gamma H]_{\alpha'_h = \alpha_h} = D_\gamma K.$$

Così è dimostrato il teor. quando si reciproca rispetto ad un solo indice. In modo analogo si dimostra il teor. quando si reciproca rispetto ad un solo apice.

Il teorema vale adunque in generale.

19. - Se $S^{\beta_1,\dots}_{\alpha_1,\dots}$ è la somma di (1) e del sistema assoluto $K^{\beta_1,\dots}_{\alpha_1,\dots}$ si ha evidentemente

$$[S,f]=[H,f]+[K,f]$$

e conseguentemente

$$D_\gamma S=D_\gamma H+D_\gamma K,$$

e si ha il

Teor. 8. - La derivazione covariante è distributiva rispetto alla addizione.

In modo analogo si dimostra il

Teor. 9. - La derivazione covariante è distributiva rispetto alla sottrazione.

20. - Teor. 10. Se (15) è il prodotto di (1) e di (14), si ha

$$D_\gamma P=\Sigma'' D_\zeta H\cdot D_\eta K, \tag{31}$$

le ζ, η e Σ'' avendo il solito significato (n. 10).

Dim. - Infatti se si indica con U_1, U_2, U_3 le U associate rispettivamente ai sistemi H, K e P, si ha

$$U_3=U_1\cdot U_2.$$

Inoltre per (16) è

$$[P,f]=[H,f]\cdot[K,f]$$

e quindi

$$\begin{aligned} D_\gamma P=U_3\times\Delta_\gamma[P,f]&=U_1\cdot U_2\times\Delta_\gamma([H,f][K,f])\\ &=\Sigma''(U_1\Delta_\zeta[H,f]\cdot U_2\Delta_\eta[K,f]) \qquad [\text{v.}(17)]\\ &=\Sigma'' D_\zeta H\cdot D_\eta K. \qquad \text{c. d. d.}\end{aligned}$$

21. – Supponiamo che nel sistema assoluto (1) l'indice α_1 e l'apice β_1 variino nella stessa classe ν, e poniamo

$$K^{\beta_2,\dots}_{\alpha_2,\dots} = \Sigma_\xi H^{\xi,\beta_2,\dots}_{\xi,\alpha_2,\dots},$$

la Σ_ξ essendo estesa al variare di ξ nella classe ν.

Il sistema K è, per il principio di saturazione (*GH.* p. 176), un sistema assoluto.

Indichiamo con U_1 e V_1 la U e la V associate a K e poniamo

$$M^{\beta_1}_{\alpha_1} = \Sigma\, V_1 H,$$

la Σ essendo estesa al variare di tutti gli indici e gli apici di V_1 nelle rispettive classi.

Se nella (22) facciamo $\alpha_1 = \beta_1 = \xi$, e sommiamo rispetto a ξ (ξ variando nella classe ν) abbiamo

$$\Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi,\beta_2,\dots}_{\xi,\alpha_2,\dots} = \tag{32}$$

$$-\varepsilon(\gamma)\{\Delta_\gamma K - \Sigma_{\alpha_1\beta_1} f^{\alpha_1}(\tau_1) f_{\beta_1}(\theta_1) M^{\beta_1}_{\alpha_1} \cdot \Delta_\gamma [U_1 \times \Sigma_\xi f_\xi(\tau_1) f^\xi(\theta_1)]\} -$$

$$- \Sigma' \varepsilon(\gamma_i) \Delta_{\gamma_i} \Sigma_\xi D_\zeta H^{\xi,\beta_2,\dots}_{\xi,\alpha_2,\dots}$$

Ma per la (17)

$$\Delta_\gamma [U_1 \times \Sigma_\xi f_\xi(\tau_1) f^\xi(\theta_1)] = \Sigma'' \Delta_{\gamma_i} U_1 \Delta_\zeta [\Sigma_\xi f_\xi(\tau_1) f^\xi(\theta_1)]$$

e per la (28) e la (30)

$$f^{\alpha_1}(\tau_1) f_{\beta_1}(\theta_1) \times \Delta_\gamma [U_1 \times \Sigma_\xi f_\xi(\tau_1) f^\xi(\theta_1)] =$$

$$= \Sigma'' \Delta_{\gamma_i} U_1 \cdot D_\zeta \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} =$$

$$= \Delta_\gamma U_1 \cdot \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} + \Sigma^* \Delta_{\gamma_i} U_1 \cdot D_\zeta \delta^{\alpha_1}_{\beta_1},$$

dove Σ^* è la Σ'' limitata ai soli termini corrispondenti ai ζ con più di una cifra.

Sostituendo in (32) si ha

$$\Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi, \beta_2, \ldots}_{\xi, \alpha_2, \ldots} = -\varepsilon(\gamma) \cdot \Delta_\gamma K - [K, f] \Delta_\gamma U_1 -$$

$$-\varepsilon(\gamma) \Sigma^* \Delta_{\gamma_i} U_1 \cdot \Sigma_{\alpha_1 \beta_1} M^{\beta_1}_{\alpha_1} D_\zeta \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} - \Sigma' \varepsilon(\eta) \Delta_{\gamma_i} \Sigma_\xi D_\zeta H^{\xi, \beta_2, \ldots}_{\xi, \alpha_2, \ldots}$$

Sottraendo da questa la (22) in cui al posto di H sia messo K, si ha

$$(33) \qquad \Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi, \beta_2, \ldots}_{\xi, \alpha_2, \ldots} - D_\gamma K =$$

$$-\varepsilon(\gamma) \Sigma^* \Delta_{\gamma_i} U_1 \cdot \Sigma_{\alpha_1 \beta_1} M^{\beta_1}_{\alpha_1} D_\zeta \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} -$$

$$-\Sigma' \varepsilon(\eta) \Delta_\eta [\Sigma_\xi D_\zeta H^{\xi, \beta_2, \ldots}_{\xi, \alpha_2, \ldots} - D_\zeta K].$$

22. – Se nella (33) si suppone $\rho_\gamma = 1$ mancano i termini sotto le Σ' e Σ^*, e quindi si ha

$$(34) \qquad \Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi, \beta_2, \ldots}_{\xi, \alpha_2, \ldots} = D_\gamma K.$$

La (34) costituisce il *principio della permutabilità della saturazione e della derivazione covariante* con indice di derivazione di classe 1 (*GH.* p. 191).

Questo principio non conserva la veste semplice che ha nella (34) quando è $\rho_\gamma > 1$ (v. appendice III).

23. – Se nella (33) si suppone $\rho_\gamma = 2$, poichè per la (34) si annullano in essa i termini della Σ', si ha

$$(35) \qquad \Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi, \beta_2}_{\xi, \alpha_2} - D_\gamma K = - U_1 \Sigma_{\alpha_1 \beta_1} M^{\beta_1}_{\alpha_1} D_\gamma \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}$$

e poichè

$$U_1 \times M^{\beta_1}_{\alpha_1} = H,$$

ed evidentemente

$$\Sigma_\xi D_\gamma H^{\xi,\beta_2,\dots}_{\xi,\alpha_2,\dots} = \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdot D_\gamma H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$$

si ottiene, isolando $D_\gamma K$,

$$D_\gamma K = \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdot D_\gamma H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} + \Sigma_{\alpha_1\beta_1} H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} D_\gamma \delta^{\alpha_1}_{\beta_2},$$

o più schematicamente

$$(35') \qquad D_\gamma K = \Sigma_{\alpha_1\beta_1}(\delta \cdot D_\gamma H + H \cdot D_\gamma \delta).$$

Questa relazione si può anche scrivere

$$(36) \qquad D_\gamma \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} H = \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \left\{ D_\gamma \left(\delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} \right) \right\}_{\substack{\alpha'_1 = \alpha_1 \\ \beta'_1 = \beta_1}},$$

e ciò per il teor. 4 e per la (30).

La (36) scritta con $\rho_\gamma = 1$ diventa la (34).

Allora evidentemente si ha

$$(37) \qquad D_\gamma \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \left(\delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} \right)_{\substack{\alpha'_1 = \alpha_1 \\ \beta'_1 = \beta_1}}$$

$$= \Sigma_{\alpha_1\beta_1} \left\{ D_\gamma \left(\delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} \right) \right\}_{\substack{\alpha'_1 = \alpha_1 \\ \beta'_1 = \beta_1}} \qquad \rho_\gamma \leq 2$$

Questa relazione dice che per $\rho_\gamma \leq 2$ le due operazioni D_γ e $\Sigma_{\alpha_1\beta_1}(\,)_{\substack{\alpha'_1 = \alpha_1 \\ \beta'_1 = \beta_1}}$ eseguite sul sistema $\delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} H^{\beta_1,\beta_2,\dots}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$ sono fra loro permutabili.

§ 3. - Sulla derivazione covariante dei sistemi I_α ed f_α

(Appendice I di Rina Baldoni)

24. – Teor. 11. – Se I è un invariante, se α varia nella classe ν e γ è un qualunque stato del campo Ω con $\rho_\gamma < \nu$, gli elementi di $D_\gamma I_\alpha(t)$ per i quali è $\rho_\alpha + \rho_\gamma < \nu + 1$, sono nulli.

Dim. – Intanto è noto [v. (26)] che il teor. è vero quando $\rho_\gamma = 1$ perchè in questo caso esso significa che la $D_\gamma I_\alpha(t)$ ha nulli tutti i termini per cui $\rho_\alpha < \nu$.

Per dimostrare il teor. in generale, procederemo per via ricorrente.

Supponiamo che il teor. sia vero quando $\rho_\gamma = m$ e dimostriamo che esso è vero anche per $\rho_\gamma = m + 1$. Indichi dunque γ uno stato con $\rho_\gamma = m + 1$, e sia

$$\rho_\alpha < \nu + 1 - \rho_\gamma = \nu + 1 - (m+1) = \nu - m\,.$$

Se noi ora scriviamo per tale γ la $D_\gamma I_\alpha(t)$ come è data dalla formula (24), vediamo che per i termini che sono sotto la Σ', essendo $\rho_\zeta < \rho_\gamma$, è $\rho_\alpha + \rho_\zeta < \nu + 1$ e quindi $D_\zeta I_\alpha(t) = 0$ ed infine tutti i termini sotto la Σ' sono nulli. Resterebbe ora da provare che

$$I_{\alpha\gamma}(t) - \Sigma_\lambda I_\lambda(t) \cdot f^\lambda(\tau) \times f_{\alpha\gamma}(\tau) = 0\,.$$

Il primo membro di questa eguaglianza vale

$$I_{\alpha\gamma}(t) - \Sigma_\lambda I_\lambda(t)\, \delta^\lambda_{\alpha\gamma} = I_{\alpha\gamma}(t) - I_{\alpha\gamma}(t) = 0$$

appunto perchè

$$\delta^\lambda_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{se} \quad \begin{matrix} \lambda \neq \alpha\gamma \\ \lambda = \alpha\gamma \end{matrix}\,.$$

c. v. d.

25. – Teor. 12. – Se α varia nella classe ν e γ è un qualunque stato del campo Ω, con $\rho_\gamma < 2\nu$, gli elementi di $D_\gamma f_\alpha(t)$ che non sono nulli, sono ortogonali al $\sigma_{2\nu+1-\rho_\gamma-\rho_\alpha}$, ossia sono ortogonali agli f_β con $\rho_\beta \leq 2\nu + 1 - \rho_\gamma - \rho_\alpha$.

Dim. - Intanto il teor. è vero quando $\rho_\gamma = 1$, (v. [27]). Anche per la dimostrazione di questo teor. procederemo per via ricorrente. Supponiamo che il teor. sia vero quando $\rho_\gamma = m$ e dimostriamo che esso è vero anche per $\rho_\gamma = m + 1$.

Indico dunque con γ uno stato con $\rho_\gamma = m + 1$ e suppongo che β sia tale che

$$\rho_\beta \leqq 2\nu + 1 - \rho_\gamma - \rho_\alpha = 2\nu + 1 - (m+1) - \rho_\alpha = 2\nu - m - \rho_\alpha .$$

Dalla (25) si ha

$$(38) \qquad f_\beta(t) \cdot D_\gamma f_\alpha(t) = -\varepsilon(\gamma)\left[a_{\beta,\alpha\gamma} - \Sigma_\lambda a_{\beta,\lambda}\delta^\lambda_{\alpha\gamma}\right] -$$

$$- \Sigma' \varepsilon(\eta) \cdot f_\beta(t) \cdot \Delta_\eta D_\zeta f_\alpha(t) =$$

$$= -\varepsilon(\gamma)\left[a_{\beta,\alpha\gamma} - a_{\beta,\alpha\gamma}\right] - \Sigma' \varepsilon(\eta) \cdot f_\beta(t) \cdot \Delta_\eta D_\zeta f_\alpha(t) =$$

$$= - \Sigma' \varepsilon(\eta) \cdot f_\beta(t) \cdot \Delta_\eta D_\zeta f_\alpha(t) .$$

Osserviamo che, per l'ipotesi fatta, deve essere

$$(\alpha) \qquad f_\beta(t) \cdot D_\zeta f_\alpha(t) = 0 ,$$

poichè essendo $\rho_\beta \leqq 2\nu + 1 - (m+1) - \rho_\alpha$ è anche evidentemente $\rho_\beta \leqq 2\nu + 1 - \rho_\zeta - \rho_\alpha$.

Supponiamo ora che i_1, $i_2, \ldots i_r$ siano le cifre di η, e deriviamo la (α) rispetto ad u_{i_1}; abbiamo

$$f_{\beta i_1}(t) \cdot D_\zeta f_\alpha(t) + f_\beta(t) \cdot \Delta_{i_1} D_\zeta f_\alpha(t) = 0 ,$$

ed essendo il primo addendo nullo poichè anche $\rho_{\beta i_1}$ è $\leqq$ di $2\nu + 1 - \rho_\zeta - \rho_\alpha$, si conclude che

$$(\alpha_1) \qquad f_\beta(t) \cdot \Delta_{i_1} D_\zeta f_\alpha(t) = 0 .$$

Derivando ora la (α_1) rispetto a u_{i_2} con analoghe considerazioni si arriva a provare che

$$(\alpha_2) \qquad f_\beta(t) \cdot \Delta_{i_1 i_2} D_\zeta f_\alpha(t) = 0 ,$$

e ripetendo si giunge alla formula

$$f_\beta(t) \cdot \Delta_\eta D_\zeta f_\alpha(t) = 0 .$$

Allora sono nulli tutti i termini sotto la Σ' in (38) e quindi

$$f_\beta(t) \cdot D_\gamma f_\alpha(t) = 0 . \qquad \text{c. v. d.}$$

§ 4. – Derivate covarianti di sistemi notevoli.

(Appendice II di Margherita Licini)

26. – Se α e β variano in una medesima classe ν, è evidente che

$$a_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'}\, a_{\alpha',\beta}\, \delta_\alpha^{\alpha'} .$$

Allora per il teor. 7 si ha, qualunque sia γ,

$$(39) \qquad D_\gamma a_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'}\, a_{\alpha',\beta}\, D_\gamma \delta_\alpha^{\alpha'} ,$$

e, per la (29′),

$$D_\gamma a_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'}\, a_{\alpha',\beta}\, f^{\alpha'}(t) \times D_\gamma f_\alpha(t) ,$$

e dalla (3) risulta

$$(40) \qquad D_\gamma a_{\alpha,\beta} = f_\beta \times D_\gamma f_\alpha .$$

Evidentemente, data la simmetria del sistema $a_{\alpha,\beta}$ rispetto ai due indici, nel secondo membro della (40) si possono scambiare α e β.

27. – Analogamente si avrà

$$\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'}\, \underset{\nu}{a}^{\alpha',\beta}\, \delta_{\alpha'}^{\alpha} ,$$

e per il teor. 7,

$$D_\gamma \underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'}\, \underset{\nu}{a}^{\alpha',\beta}\, D_\gamma \delta_{\alpha'}^{\alpha} ,$$

e per la (29),

$$D_\gamma \underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = \Sigma_{\alpha'} \underset{\nu}{a}^{\alpha',\beta} f_{\alpha'} \times D_\gamma f^\alpha ,$$

e infine

$$D_\gamma \underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = \underset{\nu}{f}^\beta \times D_\gamma \underset{\nu}{f}^\alpha . \tag{41}$$

Anche qui, per la simmetria del sistema $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$, nel secondo membro della (41) si possono scambiare i due apici α e β.

28. - Dalla

$$a_{\alpha,\beta} = f_\alpha(t) \times f_\beta(t)$$

in virtù della (31) risulta

$$D_\gamma a_{\alpha,\beta} = \Sigma'' D_\xi f_\alpha \times D_\eta f_\beta ,$$

o anche

$$D_\gamma a_{\alpha,\beta} = f_\alpha \times D_\gamma f_\beta + f_\beta \times D_\gamma f_\alpha + \Sigma' D_\xi f_\alpha \times D_\eta f_\beta$$

dove la Σ' ha lo stesso significato che al n. 15.

Quindi, tenendo conto della (40), si ha

$$D_\gamma a_{\alpha,\beta} = -\Sigma' D_\xi f_\alpha \times D_\eta f_\beta . \tag{42}$$

In modo analogo, poichè evidentemente

$$\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = \underset{\nu}{f}^\alpha(t) \times \underset{\nu}{f}^\beta(t) ,$$

sarà

$$D_\gamma \underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta} = -\Sigma' D_\eta \underset{\nu}{f}^\alpha \times D_\xi \underset{\nu}{f}^\beta \tag{43}$$

e così pure, poichè

$$\delta_\alpha^\beta = f_\alpha(t) \times \underset{\nu}{f}^\beta(t) ,$$

sarà

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta = -\Sigma' D_\eta f_\alpha \times D_\xi \underset{\nu}{f}^\beta . \tag{44}$$

29. – Dal teor. 12 e dalle (29), (40), (41) risulta facilmente il

TEOR. 13. – «Se $\rho_\gamma < 2\nu$, i termini dei sistemi

$$D_\gamma \delta_\alpha^\beta\,, \quad D_\gamma a_{\alpha,\beta}\,, \quad D_\gamma \underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}\,,$$

quando α, β, γ soddisfano alla relazione

$$\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma \leq 2\nu + 1\,,$$

risultano nulli ».

In particolare se $\rho_\gamma = 1$ tutti i termini dei sistemi predetti sono nulli e si hanno risultati noti. (GH, pp. 193-194).

Dalle considerazioni precedenti risulta in particolare che se $\nu = 2$ e $\rho_\gamma = 2$, posto

$$\alpha = rs \qquad\qquad \beta = pq \qquad\qquad \gamma = hk$$

il sistema $D_\gamma\ a_{\alpha,\beta}$ diventa un sistema

$$A_{r,s,p,q,h,k} = D_{h\cdot k}\ a_{rs,pq}\,,$$

che si può considerare come un sistema covariante di RICCI con 6 indici di classe 1. Questo sistema è simmetrico rispetto agli indici di ciascuna coppia rs, pq, hk, ed è simmetrico anche rispetto alle prime due coppie.

§ 5. – Sul principio di permutazione della saturazione e della derivazione.

(Appendice III di GIUSEPPE ALIPRANDI).

30. – Consideriamo un sistema assoluto H_α^β in cui α e β sono della stessa classe ν e applichiamo a esso la formula (35).

Abbiamo allora

$$\Sigma_\xi\, D_\gamma H_\xi^\xi - D_\gamma K = - \Sigma_{\alpha,\beta} H_\alpha^\beta D_\gamma \delta_\beta^\alpha\,,$$

dove γ è uno stato per cui $\rho_\gamma = 2$ e

$$K = \Sigma_\xi\, H_\xi^\xi\,.$$

In tal caso se si potesse applicare il principio della saturazione e della derivazione come per $\rho_\gamma = 1$ è enunciato in *GH*, p. 191 si dovrebbe avere

$$\Sigma_{\alpha,\beta} H_\alpha^\beta \, D_\gamma \, \delta_\beta^\alpha = 0 ,$$

qualunque sia il sistema H_α^β. Ma siccome per un particolare sistema di variabili si può scegliere H_α^β in modo che i suoi termini sieno funzioni arbitrarie, si vede che perchè valga il suddetto principio, dovrà essere

$$D_\gamma \, \delta_\beta^\alpha = 0 ,$$

e per la (39) dovrebbe essere

$$D_\gamma \, a_{\alpha,\beta} = 0 ,$$

e per la (42), supposto che sia $\gamma = pq$

$$D_p f_\alpha \cdot D_q f_\beta + D_q f_\alpha \cdot D_p f_\beta = 0 .$$

In particolare se $\alpha = \beta , p = q$, si dovrebbe avere

$$(D_p f_\alpha)^2 = 0 .$$

Se la varietà base è sufficentemente generale, non è possibile si abbia, per ogni α e per ogni p, $D_p f_\alpha = 0$. c. v. d.

§ 6. – Influenza dell'ordine delle derivazioni con indici di derivazione di classe 1.

(Appendice IV di Ines Sacilotto)

31. – In un mio lavoro (v. nota a p. 47), ho fatto lo studio della differenza

$$D_p D_q H_\alpha - D_q D_p H_\alpha ,$$

dove H_α è un covariante e p e q sono indici di classe 1, studio che mi ha condotto a una estensione dei *simboli di Riemann* nel calcolo assoluto finora noto (v. anche GH, pp. 206-208).

I risultati di quella nota si possono ottenere in modo più agile, ricorrendo alla rappresentazione sintetica della derivazione, cosa che mi propongo di fare in questa appendice.

Intanto si ha

$$D_p H_\alpha = f_\alpha(t) \times \Delta_p \left[\Sigma_\gamma \; H_\gamma f^\gamma(t)\right] \qquad \text{(Def. 3)}$$

e quindi

$$D_q D_p H_\alpha =$$

$$= f_\alpha(\tau) \cdot f_p(\tau_1) \times \Delta_q \left\{\left[\Sigma_{\delta r} \cdot \Delta_r \Sigma_\gamma \; H_\gamma f^\gamma(t)\right] \cdot \left[f^\delta(\tau) f^r(\tau_1) f_\delta(t)\right]\right\} =$$

$$= \Sigma_{\delta r \gamma} \left\{ f_\alpha(\tau) \cdot f_p(\tau_1) \cdot \left[f_\delta(t) \cdot f^\delta(\tau) \cdot f^r(\tau_1) \Delta_{rq} H_\gamma f^\gamma(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta_q\left(f^\delta(\tau) f^r(\tau_1) f_\delta(t)\right) \cdot \Delta_r H_\gamma f^\gamma(t) \right]\right\} =$$

$$= \Sigma_\gamma f_\alpha(t) \cdot \Delta_{pq}\left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) + \Sigma_{\delta r \gamma} f_\alpha(\tau) \cdot f_p(\tau_1) \cdot \left[\Delta_q\left(f^\delta(\tau) f_\delta(t)\right) \cdot f^r(\tau_1) + \right.$$

$$\left. + \left(f^\delta(\tau) f_\delta(t)\right) \cdot \Delta_q f^r(\tau_1)\right] \cdot \Delta_r \left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) =$$

$$= \Sigma D_{pq} H_\alpha + \Sigma_{\delta\gamma} f_\alpha(\tau) \cdot \Delta_q\left(f^\delta(\tau) f_\delta(t)\right) \cdot \Delta_p\left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) -$$

$$- \Sigma_{r\gamma} \underset{1}{C^r_{pq}} f_\alpha(t) \cdot \Delta_r\left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) \text{(1)} =$$

$$= \Sigma_\gamma D_{pq} H_\alpha - \Sigma_{r\gamma} C^r_{pq} f_\alpha(t) \cdot \Delta_r \left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) + \Sigma_\gamma D_q f_\alpha(t) \cdot \Delta_p \left(H_\gamma f^\gamma(t)\right).$$

Se si osserva che

$$\Delta_p\left(H_\gamma f^\gamma(t)\right) = f^\gamma(t) \cdot \Delta_p H_\gamma + H_\gamma \cdot \Delta_p f^\gamma(t),$$

(1) V. (Lemma 3).

e che

$$D_q f_\alpha(t)\cdot f^\gamma(t)=0\,, \qquad \text{[v. n. 13, form. (21)]}$$

si ha subito

$$D_q D_p H_\alpha - D_p D_q H_\alpha =$$

$$=\Sigma_\gamma H_\gamma \left[D_q f_\alpha(t)\cdot \Delta_p f^\gamma(t) - D_p f_\alpha(t)\cdot \Delta_q f^\gamma(t)\right] =$$

$$=\Sigma_\gamma H_\gamma \left[D_q f_\alpha(t)\cdot D_p f^\gamma(t) - D_p f_\alpha(t)\cdot D_q f^\gamma(t)\right] \overset{(1)}{=}$$

$$=\Sigma_{\gamma,\eta} H_\gamma a^{\eta,\gamma}\left[f_{\alpha,q} f_{\eta,p} - f_{\alpha,p} f_{\eta,q}\right], \qquad \text{(v. teor. 7)}$$

e l'espressione fra [ ] non è altro che il simbolo di Riemann di 1 specie $(\alpha,\ \eta;\ q,\ p)_v$.

§ 7. - Sulla D_γ con $\rho_\gamma \leq 2$.

(Appendice V di Giuseppe Aliprandi).

32. - Supposto $\rho_\gamma = 1$, dalla (23) si ha per un qualunque sistema (1),

$$D_\gamma H = \Delta_\gamma H - U\Delta_\gamma[H, f] =$$

$$=\Delta_\gamma H - \sum_1^r{}_i [H,f]\cdot\Delta_\gamma f_{\alpha_i}(\tau_i) W_i - \sum_1^s{}_i [H,f]\cdot \Delta_\gamma f^{\beta_i}_v(\theta_i) W^i\,,$$

dove W_i $[W^i]$ indica il sistema U associato ad H in cui si è soppresso il fattore $f_{\alpha_i}(\tau_i)$ $[f^{\beta_i}(\theta_i)]$.

Applicando ripetutamente le (4), (5), (7) si ha:

$$D_p = \Delta_p H - \sum_1^r{}_i \Sigma_{\alpha'_i} \underset{v}{C}{}^{\alpha'_i}_{\alpha_i p} H^{\beta_1,\ldots\beta_s}_{\alpha_1,\ldots\alpha_{i-1},\ \alpha'_i\ \alpha_{i+1},\ldots\alpha_r} + \tag{45}$$

$$+\sum_1^s{}_i \Sigma_{\beta'_i} \underset{v}{C}{}^{\beta_i}_{\beta'_i p} H^{\beta_1,\ldots\beta_{i-1}\beta'_i,\ \beta_{i+1},\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \qquad \text{(c. v. d.)}$$

(1) Basta osservare che $\Delta_q f^\gamma(t) - D_p f^\gamma$ è una combinazione delle f^γ. [V. anche la successiva formula (45)].

Si vede così che il *derivato covariante definito in forma sintetica quando* $\rho_\gamma = 1$, *coincide con quello descritto in GH*, p. 185.

33. – Se H_α è un covariante a un indice α di classe ν e $\rho_\gamma = 2$ $(\gamma = pq)$ dalla (22) si ha

$$D_\gamma H_\alpha = -\left(\Delta_{pq} H_\alpha - \left[\Sigma_\xi H_\xi f^\xi(\tau)\right] \cdot \Delta_{pq} f_\alpha(\tau)\right) +$$

$$+ \Delta_p D_q H_\alpha + \Delta_q D_p H_\alpha ,$$

ossia indicando con $H_{\alpha,p}$ il sistema $D_p H_\alpha$ e posto

$$(*) \qquad C^\xi_{\alpha\gamma} = \Sigma_\delta\, a_{\alpha\gamma,\delta}\, a^{\delta\xi} ,$$

si ha inoltre

$$(46) \qquad D_\gamma H_\alpha = \Delta_p H_{\alpha,q} + \Delta_q H_{\alpha,p} - \Delta_{pq} H_\alpha + \Sigma_\xi H_\xi C^\xi_{\alpha\gamma} .$$

La (46) è la forma sotto cui il prof. Vitali ha incontrato per la prima volta la $D_\gamma H_\alpha$.

Riproduco la dimostrazione che Egli ha dato per provare il carattere assoluto del 2° membro della (46).

Partiamo dalla formula (*GH*, p. 187)

$$H_{\alpha,p}[v] = \Sigma_{\alpha' p'}\, H_{\alpha',p'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} ,$$

dove la Σ è estesa al variare di α' in classe ν e di p' in classe 1. Derivando rispetto a v_q abbiamo

$$\frac{\partial H_{\alpha,p}[v]}{\partial v_q} = \Sigma_{\alpha' p' q'} \frac{\partial H_{\alpha',p'}[u]}{\partial u_{q'}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_{q'}}{\partial v_q} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \frac{\partial}{\partial v_q} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'}\, H_{\alpha',p'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v_q} \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} .$$

Analoga formula si ha per $\dfrac{\partial H_{\alpha,q}[v]}{\partial v_p}$ e allora, posto

$$\frac{\partial H_{\alpha,p}}{\partial v_q} + \frac{\partial H_{\alpha,q}}{\partial v_p} = {}^{\gamma}H_{\alpha},$$

si ha facilmente

$$(^{**}) \qquad {}^{\gamma}H_{\alpha}[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'}\, {}^{\gamma'}H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_{\gamma}} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial v_q} \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} + \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_q} \right\} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \cdot \Omega ,$$

dove Σ' è estesa al variare di α' in classe ν e di γ' per gli stati di rango 2 e

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial v_q} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} + \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_q} .$$

La (**) si può anche scrivere

$${}^{\gamma}H_{\alpha}[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'}\, {}^{\gamma'}H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_{\gamma}} +$$

$$+ 2\,\Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_{\gamma}} + \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \cdot \Omega .$$

Partiamo ora dalla relazione (3) di *GH*, p. 186, derivando ancora rispetto a v_q si ha

$$(^{***}) \qquad \frac{\partial H_{\alpha}[v]}{\partial v_p\, \partial v_q} = \Sigma'_{\alpha'\gamma'} \frac{\partial H_{\alpha'}[u]}{\partial v_{\gamma'}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_{\gamma}} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'} \frac{\partial H_{\alpha'}[u]}{\partial u_{p'}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_{\gamma}} +$$

$$+\Sigma_{\alpha' p'} \frac{\partial H_{\alpha'}[u]}{\partial u_{p'}} \cdot \Omega + \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_p \partial v_q} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha},$$

dove Σ' e Ω hanno lo stesso significato che nella (**).

Ponendo nella prec. al posto di H_α la f_α si ha

$$\frac{\partial f_\alpha[v]}{\partial v_p \partial v_q} = f_{\alpha\gamma}[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'} f_{\alpha'\gamma'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_\gamma}{\partial v_\gamma} +$$

$$+\Sigma_{\alpha' p'} f_{\alpha' p'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_\gamma} +$$

$$+\Sigma_{\alpha' p'} f_{\alpha' p'}[u] \cdot \Omega + \Sigma_{\alpha' p'} f_{\alpha'}[u] \frac{\partial}{\partial v_p \partial v_q} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha}.$$

Per il principio di saturazione, si ha poi

$$\Sigma a_{\nu}^{\beta,\delta}[v] \cdot f_\beta[v] \cdot H_\delta[v] = \Sigma a_{\nu}^{\beta,\delta}[u] \cdot f_\beta[u] H_\delta[u].$$

Moltiplicando membro a membro e integrando lungo g le ultime relazioni, tenendo presente la (*) si ha

$$\Sigma_\delta C^\delta_{\alpha\gamma}[v] \cdot H_\delta[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'\delta} C^\delta_{\alpha'\gamma'}[u] H_\delta[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_\gamma} +$$

$$+\Sigma_{\alpha' p' \delta} C^\delta_{\alpha' p'}[u] H_\delta[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_\gamma} + \Sigma_{\alpha' p' \delta} C^\delta_{\alpha' p'}[u] H_\delta[u] \cdot \Omega +$$

$$+\Sigma_{p'} H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_p \partial v_q} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha}.$$

Sottraendo quest'ultima relazione dalla (***) e ponendo

$${}_\gamma H_\alpha = \frac{\partial H_\alpha}{\partial v_\gamma} - \Sigma_\eta C^\eta_{\alpha\gamma} H_\eta,$$

si ha

$${}_\gamma H_\alpha[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'}{}_{\gamma'} H_{\alpha'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_\gamma} +$$

$$+\Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha', p'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_\gamma} + \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha', p'}[u] \cdot \Omega.$$

Ma

$$D_\gamma H_\alpha = {}^\gamma H_\alpha - {}_\gamma H_\alpha$$

dunque

$$D_\gamma H_\alpha[v] = \Sigma'_{\alpha'\gamma'} H_{\alpha',\gamma'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_\gamma} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha' p'} H_{\alpha',p'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_\gamma},$$

quindi

$$H_{\alpha,\gamma}[v] = \Sigma_{\alpha'\gamma'} H_{\alpha',\gamma'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma'}}{\partial v_\gamma},$$

dove la Σ è estesa al variare di γ' in classe 2.

(c. v. d.)