ANNIBALE COMESSATTI

Note critiche sui postulati della geometria proiettiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 196-216

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__196_0>

NOTE CRITICHE
SUI POSTULATI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

di ANNIBALE COMESSATTI

§ 1. - Sugli spazî grafici che contengono un numero finito di punti.

1. La presente Nota è dedicata all'esame di due questioni suggerite dall' analisi critica dei postulati d' appartenenza e dell' ordine della geometria proiettiva, e ad alcune osservazioni di contorno [1].

Conveniamo anzitutto di chiamare *spazio grafico* ogni classe, finita od infinita, di elementi (di natura qualunque) da dirsi *punti*, entro alla quale *sian soddisfatti i postulati d' appartenenza*, in relazione ad opportune sottoclassi da chiamarsi *rette* e *piani*.

Notoriamente *esistono spazî grafici contenenti un numero finito di punti*, o, come diremo brevemente, *finiti*; e l' esempio più semplice si ha assumendo come punti quattro oggetti qualunque A, B, C, D, come rette le coppie, come piani le terne con essi formate. Ma non ci risulta che il problema di *costruire tutti gli spazî grafici finiti* sia stato finora risolto.

[1] Intendiamo riferirci alla forma che hanno quei postulati per lo *spazio proiettivo completo*. Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva* [Bologna, Zanichelli (1926), 4ª ediz.]. F. SEVERI, *Geometria proiettiva*, [Firenze, Vallecchi (1926)], segnatamente l'*Appendice*, dedicata, nella prima parte, ad una interessante analisi critica dei postulati fondamentali; e le nostre *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva* [Padova, Cedam] Parte 1ª (1929), Cap. III, § 1. In seguito si richiamerà più volte la Parte 2ª (Cap. IV) d' imminente pubblicazione.

Da elementari osservazioni combinatorie, che risalgono allo Staudt [2], si desume che se in uno dei nostri spazî una retta, e quindi ogni altra, contiene $n+1$ punti, ogni piano deve contenerne n^2+n+1, e lo spazio (che si dirà *d'indice* n) n^3+n^2+n+1. Per $n=1$ si ritrova l'esempio addotto; i casi $n=2, 3$ assai notevoli per le anomalie che in essi presentano i gruppi armonici (delle quali si tratterà anche in seguito, da un punto di vista che conduce a precisarne l'estensione) sono stati considerati dal Fano [3], il quale ha pure indicata una genesi combinatoria degli spazî in discorso, per ogni valore *primo* dell'indice n.

Ciò, a meno di omissioni, crediamo rappresenti lo stato attuale delle conoscenze in argomento; e resta quindi in particolare ancor dubbio se esistano spazî grafici finiti per *ogni* valor di n.

Il problema è, se si vuole, combinatorio; ma sotto tale aspetto puro non sembra agevolmente affrontabile. Comunque la risoluzione che qui ne esponiamo, procede da un altro punto di vista, che conferisce notevolmente al suo significato, ed ai suoi rapporti con altre questioni aritmetiche e geometriche.

Premesso che ogni *spazio numerico* (vedasi il n. 1) relativo ad un *corpo numerico* K [4], è uno spazio grafico, è chiaro che da ogni K *finito* si può dedurre un tipo di spazio grafico finito, il cui indice n è eguale al numero degli elementi del corpo. Ma il più importante - ed il meno immediato - sta in ciò che *tal costruzione è generale*, giacchè inversamente:

Ogni spazio grafico contenente un numero finito (>4) *di punti, è proiettivo allo spazio numerico relativo ad un corpo finito* [5].

(2) G. K. Ch. v. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage* [Nürnberg (1856-60)] § 8. Cfr. anche Severi, loc. cit. (1), *Appendice* 1, § 1.

(3) G. Fano, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni* [Giornale di Mat. XXX (1892) pp. 106-132].

(4) Per la definizione e le proprietà dei corpi numerici, v. G. Scorza, *Corpi numerici ed algebre* [Messina, Principato (1921)] Parte 1ª, B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* [Grundlehren der Math. Wiss. Bd XXXIII, Berlin, Springer (1930)] Cap. III, V, VIII.

(5) Diciamo *proiettivi* due spazî grafici, quando tra essi è posta una cor-

Insomma in ogni spazio grafico finito si possono introdurre le *coordinate proiettive*, che risultan (liberamente) variabili entro ad un corpo finito.

Dal teorema predetto, che costituisce il risultato essenziale di questo §, segue che gli spazî numerici in discorso dànno *tutti i tipi di spazî grafici finiti;* dopo di che basta ricordare che il numero degli elementi d'un corpo finito è potenza d'un numero primo, e che due corpi finiti contenenti lo stesso numero di elementi sono isomorfi ([6]), per vedere che:

Gli spazî grafici finiti esistono soltanto per i valori dell'indice n che son potenze di numeri primi; e per ogni valore siffatto ve n'ha un sol tipo.

Dalla dimostrazione risulterà poi anche che *gli spazî grafici finiti sono pascaliani*, mentre ciò non può dirsi degli spazî grafici infiniti, giacchè per essi il teorema di Pappo-Pascal (e conseguentemente il teorema fondamentale della geometria proiettiva *in senso ristretto*) ([7]) non è necessariamente vero, cioè non è conseguenza dei soli postulati d'appartenenza. E nell'occasione si vedrà l'interessante significato geometrico di tal circostanza.

2. Alla discussione della questione principale premettiamo alcuni richiami intorno agli *spazî numerici* ([8]), e l'esame di alcuni casi particolari.

Assunto a base un corpo numerico K, finito od infinito, si chiamerà *punto* dello *spazio numerico* S associato a K, ogni

rispondenza biunivoca puntuale che muta punti allineati (coplanari) in punti allineati (coplanari).

([6]) Cfr. Scorza, loco cit. ([4]), nn. 159-60.

([7]) Circa il teorema fondamentale in senso ristretto, vedasi la Nota dell'A., *Geometria non staudtiana* [Bollettino di Matematica (1930) pp. 1-23] od anche le citate *Lezioni*, Parte 2ª, Cap. IV, § 1, IV. L'equivalenza fra il teorema fondamentale in senso ristretto ed il teorema di Pappo-Pascal (presupposti i soli postulati d'appartenenza) è stata dimostrata da F. Schur; si vedano i suoi *Grundlagen der Geometrie* cit. ([15]) § 4.

([8]) Per i dettagli rinviamo alle nostre *Lezioni*, Parte 2ª, Cap. IV, § 1, I od agli *Elementi di geometria analitica* di G. Scorza [Messina, Principato (1925)], Parte 2ª, Cap. 1. In queste trattazioni si fa riferimento ai corpi reale e complesso, ma le considerazioni con cui si stabiliscono le proprietà appresso richiamate, sussistono in relazione ad un corpo qualunque.

quaderna ordinata (x_1, x_2, x_3, x_4) di numeri non tutti nulli estratti da K, considerandosi al riguardo identiche due quaderne proporzionali (più rigorosamente ognuna delle *classi* i cui elementi sono le quaderne proporzionali (in K) ad una data). All' occasione i valori di x_1, x_2, x_3, x_4 si diranno coordinate (primitive) del punto da essi definito.

Le *rette* ed i *piani* si definiscono in S mediante la loro rappresentazione analitica; dopo di che, poggiando sulle proprietà delle operazioni in K, e sulla teoria delle equazioni lineari, che ivi sussiste integralmente, si stabiliscono i capisaldi seguenti:

a) In S son verificati i postulati d'appartenenza, cioè S *è uno spazio grafico*. Di conseguenza son pure verificati i teoremi dei triangoli e dei quadrangoli omologici [9], quindi può porsi la nozione di *gruppo armonico*, della quale si riconosce il carattere proiettivo. Ed anzi si può asserire che *due quaderne armoniche sono sempre proiettive*; bastando all' uopo avvertire che due terne (ordinate) di elementi distinti appartenenti a due forme di prima specie, son sempre deducibili una dall'altra mediante proiezioni e sezioni.

b) Se la quaderna ordinata $ABCD$ è armonica, la definizione stessa richiede che gli elementi A, B, C siano distinti, ed implica che D sia distinto da A e B, mentre non consente di dedurre (col fondamento dei soli postulati d'appartenenza) che D è distinto da C: ed anzi, come si vedrà, esistono spazî grafici, anche infiniti, nei quali $C = D$. Devesi però notare che, in forza dell' ultima osservazione al capoverso precedente, appena in uno spazio grafico S esiste un gruppo armonico del tipo $ABCC$, in tal situazione si trovano anche tutti gli altri [10], quindi appena esiste una quaderna armonica costituita da elementi distinti, così è pure di tutte.

Dalla definizione segue inoltre che se la quaderna $ABCD$ è armonica, lo è pure la $BACD$; mentre per la $CDAB$ l' affermazione è vera soltanto quando C e D sono distinti.

c) Se (x_1, x_2, x_3, x_4) (y_1, y_2, y_3, y_4) son due punti di S,

[9] Ciò anche se K è finito, e per i valori più piccoli di n, fatte le debite convenzioni per l' interpretazione dei casi degeneri.

[10] Cfr. G. Fano, loc. cit. [3] n. 6.

le coordinate (primitive) di ogni punto P della retta congiungente possono scriversi sotto la forma $\lambda x_i + \mu y_i$, λ, μ essendo due numeri (qualunque) di K non nulli. Da ciò si è subito condotti, sulla retta considerata, alla definizione delle *coordinate proiettive;* facile è poi estendere la nozione alle altre forme di prima specie, e stabilirne il carattere proiettivo. Inoltre si vede che la trasformazione fra due sistemi di coordinate proiettive della stessa forma, si effettua mediante una sostituzione lineare (a modulo non nullo) coi coefficienti in K.

d) Ad ogni quaderna ordinata di elementi d'una forma di 1ª specie, dei quali almeno tre siano distinti, si può associare un numero di K (o il simbolo convenzionale ∞) da dirsene il *birapporto,* il quale si definisce mediante la solita espressione riferita ad un sistema di coordinate proiettive delle forma stessa; di fatto il valore di quell'espressione risulta indipendente dal sistema di riferimento, ed ha carattere proiettivo. Fissati sulla forma gli elementi A, B, C, e dato un numero β di K, è ivi determinato *un* elemento D, per cui $(ABCD) = \beta$.

Si conferma poi l'abituale comportamento del birapporto di fronte alle permutazioni tra gli elementi della quaderna, come pure il fatto che le quaderne degeneri (con tre soli elementi distinti) son caratterizzate dai valori $\infty, 0', 1'$ del birapporto. Coi simboli $0', 1'$, indichiamo lo zero e l'unità del corpo K.

e) Poichè una quaderna $ABCD$ armonica, è proiettiva alla quaderna, pure armonica, $BACD$, così, se β ne è il birapporto, si avrà $\beta = \frac{1'}{\beta}$, quindi $\beta = \pm 1'$. Il valore $+1'$ non si può escludere, ed è effettivamente assunto in quegli spazî S nei quali le quaderne armoniche son degeneri, cioè del tipo $ABCC$; vedremo però tra poco che allora i numeri $+1', -1'$ del corpo K sono eguali, talchè può concludersi che il birapporto d'una quaderna armonica è *sempre* eguale a $-1'$.

f) Una corrispondenza biunivoca tra due forme di prima specie d'uno spazio S che sia generabile mediante proiezioni e sezioni, conserva i birapporti, quindi è individuata da tre coppie di elementi corrispondenti e si rappresenta mediante una sostituzione lineare (coi coefficienti in K) tra le coordinate proiettive delle due forme. Pertanto *negli spazî numerici vale il teorema* *fondamentale della geometria proiettiva in senso ristretto*, o in altre parole *gli spazi numerici sono pascaliani* ([11]).

Ne consegue, attraverso alla solita dimostrazione, che se A, B, C, D son elementi distinti d' una forma di prima specie, ed $(ABCD) = (BACD)$, quindi $ABCD \barwedge BACD$ (la relazione espressa dal segno $\barwedge$ andrà sempre intesa in senso ristretto) la quaderna $ABCD$ è armonica.

3. Quando il corpo K è finito, e contiene n elementi, le quaderne (x_1, x_2, x_3, x_4) sono in numero di $n^4 - 1$, ed ogni classe di quaderne proporzionali ne contiene $n - 1$; dunque il numero dei punti di S è $\dfrac{n^4 - 1}{n - 1} = n^3 + n^2 + n + 1$. Alla stessa guisa si vede che il piano $x_4 = 0'$ contiene $n^2 + n + 1$ punti, e la retta $x_4 = x_3 = 0'$ ne contiene $n + 1$: così si ritrovano i numeri di STAUDT.

Tra i corpi finiti hanno notoriamente importanza fondamentale, i corpi $C(p)$ (colla notazione di SCORZA) i cui elementi son le *classi* nelle quali si ripartiscono gl' interi relativi ordinarî di fronte al *modulo primo* p. Un corpo $C(p)$ contiene p elementi, che indicheremo con $0', 1', 2', \dots, (p-1)'$; essi si comportano nelle operazioni, come gl' interi $0, 1, 2, \dots, p - 1$ di fronte alle leggi del cosidetto « calcolo mod. p ». Lo spazio numerico relativo al corpo $C(p)$ s' indicherà con $S(p)$.

Consideriamo in particolare lo spazio $S(2)$. In esso ogni retta contiene 3 punti, ed ogni piano 7; in particolare nel piano $x_4 = 0'$ si hanno i punti $A, \dots, G$ di coordinate (scritte senza apici)

$$A\,(100),\ B\,(010),\ C\,(110),\ D\,(001),\ E\,(011),\ F\,(101),\ G\,(111).$$

Due punti qualunque del sistema sono allineati con un terzo, il quale si determina sommando (mod. 2) le coordinate omonime dei dati. Ne risultano gli allineamenti ABC, ADF, AEG, BDE, BFG, CDG, CEF, i quali mostrano che (ad esem-

([11]) Viceversa è sostanzialmente noto, e sarà, nei termini precisi, assodato più avanti, che *ogni spazio (grafico) pascaliano, è proiettivo ad uno spazio numerico.*

pio) *il quadrangolo completo di vertici DEFG ha i tre punti diagonali* A, B, C *allineati*, talchè le quaderne degeneri $ABCC$, $BCAA$, $CABB$ sono armoniche. E lo stesso è delle quaderne analoghe formate coi tre punti d'una retta qualunque di $S(2)$.

Pertanto in $S(2)$ il birapporto β d'una quaderna armonica vale $+1'$; ma devesi osservare che si può anche scrivere $\beta = -1'$, giacchè nel corpo $C(2)$ si ha $+1' = -1'$, in quanto $1' + 1' = 0'$.

È interessante anche il comportamento delle quaderne armoniche nello spazio $S(3)$. Ricorrendo ad un particolare quadrangolo si può ivi costruire una quaderna armonica di elementi *distinti*; quindi in tal situazione si trovano tutte le altre. Non è il caso di entrare in particolari, tanto più che le osservazioni del successivo numero saranno, in proposito, esaurienti.

Pertanto se A, B, C sono, in $S(3)$, tre punti allineati, il relativo quarto armonico D cadrà necessariamente nel quarto punto della retta in oggetto, e poichè su essa A, B, C sono arbitrarî così si conclude che *nello spazio* $S(3)$ *tutte le quaderne di elementi di cui si compongono le forme di prima specie, prese in qualunque ordine, sono armoniche* ([12]).

La spiegazione aritmetica di questa curiosa circostanza, è facile, e si precisa in ciò che *nel corpo* $C(3)$ *i tre numeri* $-1'$, $2'$, $\frac{1'}{2'}$ *sono eguali*, quindi il birapporto d'una quaderna armonica (che vale $-1'$ perchè gli elementi della quaderna son distinti) non si altera per qualunque permutazione degli elementi.

4. È facile infine caratterizzare gli spazî numerici in cui si presentano le anomalie riscontrate negli esempî precedenti. A norma del teorema ricordato alla nota ([11]) le conclusioni si estendono a tutti gli *spazi pascaliani* ([13]).

Ricordiamo al proposito che entro ad ogni corpo numerico K è definito un particolare *sottocorpo*, detto *fondamentale* (*Primkörper*), il quale è l'insieme dei numeri che si deducono dall'unità di K mediante le quattro operazioni fondamentali. Tal sottocorpo può essere finito ed infinito; nel primo caso è isomorfo

([12]) Cfr. Fano, loc. cit. ([3]), n. 8.

([13]) Parlando di *spazî pascaliani* la qualifica di *grafici* verrà sottintesa.

ad uno dei corpi $C(p)$, nel secondo al corpo razionale. Lo diremo il *sottocorpo fondamentale associato allo spazio* (*pascaliano*) S che si considera.

Orbene, i casi di degenerazione delle quaderne armoniche, restano così precisati :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè in uno spazio numerico (o, il che è lo stesso, in uno spazio pascaliano) le quaderne armoniche sian costituite da elementi distinti, è che il relativo sottocorpo fondamentale contenga più di 2 elementi (non sia isomorfo al corpo $C(2)$).

Tanto val dire che nel corpo K associato allo spazio S che si considera, i due numeri $+1', -1'$ devon esser differenti.

Intanto se quei due numeri sono eguali, cioè se il sottocorpo fondamentale è isomorfo a $C(2)$, le quaderne armoniche in quanto hanno il birapporto $\pm 1' = +1'$ sono degeneri, del tipo $ABCC$.

Se i due numeri $+1', -1'$ sono differenti, presi in S tre punti A, B, C distinti ed allineati, sarà determinato sulla loro retta il punto D per cui $(ABCD) = -1'$ (n. 2, *d*), ed esso sarà *distinto* da A, B, C perchè $-1'$ è distinto dai valori che caratterizzano le quaderne degeneri. Ma dalla $(ABCD) = -1'$, segue la $(BACD) = -1'$, quindi la $(ABCD) = (BACD)$ ed infine, (n. 2, *f*) l'*armonicità* della quaderna $ABCD$; si ha così una quaderna armonica non degenere, e tanto basta per concludere che così è di tutte (n. 2, *b*).

Resta poi anche confermato (cfr. n. 2, *e*) che *il birapporto d' una quaderna armonica è sempre eguale a* $-1'$. Ed inoltre si vede che gli spazî numerici (pascaliani) in cui le quaderne armoniche son degeneri, son tutti e solo quelli il cui sottocorpo fondamentale è $C(2)$. Tra questi ve ne sono anche d' infiniti; giacchè esistono, e si costruiscono subito corpi infiniti il cui sottocorpo fondamentale è un qualunque $C(p)$. Tale è ad esempio l'insieme delle funzioni razionali d'un *parametro* t [14] coi coefficienti in $C(p)$.

Si vede infine facilmente che gli unici spazî numerici (pa-

[14] Più rigorosamente delle « *frazioni algebriche* » nel senso di SCORZA, in quanto t si considera come una *pura indeterminata*.

scaliani) in cui una quaderna armonica rimane tale anche per effetto di qualche permutazione anomala (diversa dalle 8 normali) degli elementi, son quelli il cui sottocorpo fondamentale è $C(3)$. Invero ciò implica che nel corpo K sia $-1' = 2'$, oppure $-1' = \frac{1'}{2'}$, il che porge in ogni caso la conclusione enunciata.

5. Rivolgiamoci ora al problema principale di questo §, cioè alla determinazione di tutti gli spazî grafici finiti. Vi perverremo, nel senso del teorema enunciato al n. 1, mediante il ravvicinamento di due conclusioni, ciascuna, nel suo campo, assai espressiva.

Il primo e fondamentale punto d'appoggio è fornito dal cosidetto *calcolo dei segmenti proiettivi* di Hilbert-Schur ([15]), il cui risultato, nella forma a noi più conveniente, può così enunciarsi: In uno *spazio grafico* S, i punti d'una punteggiata u (gli elementi d'una forma di 1ª specie) diversi da un fissato punto U *(punto limite)* posson considerarsi come elementi d'un *sistema numerico* (non diciamo ancora un *corpo*) nel senso che su di essi si posson definire, col solo appoggio dei postulati di appartenenza, le operazioni di *addizione* e di *moltiplicazione*, in modo da soddisfare alle proprietà formali appresso precisate, che son poi le proprietà caratteristiche dei corpi numerici, *tolta la commutatività della moltiplicazione.* Oltre al punto limite U sono arbitrarî sulla u altri due punti O ed I che adempiono all'ufficio di *elemento nullo* ed *elemento unità* del sistema

Per ragioni di chiarezza, trattandosi d'un'applicazione in condizioni, per dir così, delicate, e per talune esigenze del seguito, ricordiamo in linee sommarie i capisaldi dei procedimenti dello Schur, la cui trattazione s'addice perfettamente ai nostri scopi.

Da due punti S, S' allineati con U si proiettino sulla u i punti d'una retta g passante per U. Si determina così sulla u una corrispondenza proiettiva che chiameremo un'*equivalenza*

([15]) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* [Leipzig-Berlin, Teubner (1909) 3ª ediz.] Cap. V, VI, F. Schur, *Grundlagen der Geometrie* [ibid (1909)] nn. 18, 21.

diretta relativa al punto limite U (*Prospektivität* secondo SCHUR) ([16]).

Se A, A' son due punti distinti della u (diversi da U) per costruire un'equivalenza diretta in cui ad A corrisponda A' si può scegliere ad arbitrio la retta g per U ed il punto S nel piano ug, dopo di che l'equivalenza è determinata. Ora lo SCHUR dimostra, sempre in base ai soli postulati d'appartenenza, che in effetto tale equivalenza risulta indipendente da g e da S, ed è quindi *individuata* dalla coppia AA'.

Se BB' è un'altra coppia corrispondente nell'equivalenza predetta (cioè se, colla terminologia delle nostre *Lezioni*, le coppie AA', BB' son *direttamente equivalenti* rispetto ad U) si vede subito graficamente che U ha lo stesso coniugato armonico V rispetto alle due coppie AB', $A'B$. Quando si è sicuri che V è distinto da U, si può affidare a tal proprietà una definizione delle equivalenze dirette indipendente da elementi estranei (quali S, S', g), ch'è quella adottata nelle *Lezioni* or ricordate; però essa diviene illusoria se V coincide con U il che attualmente non può escludersi, onde nel nostro presupposto convien che ci atteniamo alla definizione dello SCHUR.

Ciò premesso, e dopo aver fissato sulla u un punto O (*elemento nullo* del sistema, come s'è già detto) si dirà *somma del punto A col punto B,* il punto C corrispondente di A nell'equivalenza diretta in cui ad O corrisponde B ([17]). Si definisce poi subito la somma (ordinata) di più punti e se ne dimostrano le *proprietà associativa* e *commutativa*; inoltre si prova che per ogni A è determinato un unico A' che sommato ad A dà il punto O (risolubilità dell'equazione $a+x=0$) ([18]).

La definizione di *prodotto* si riattacca alla nozione di *omologia piana* (individuata da un centro U, da un asse a, e da

([16]) La denominazione di *equivalenza* è quella adottata nelle nostre *Lezioni* (Cap. IV, § 1, V): essa è dovuta a M. PASCH.

([17]) HILBERT e SCHUR parlano di somma, ed analogamente di prodotto dei *segmenti proiettivi* OA, OB (non contenenti U): a noi conviene più semplicemente considerare i punti, come elementi del sistema numerico.

([18]) Si noti che A' può anche coincidere con A, cioè che può essere $A+A=O$; ciò si verifica negli spazî numerici in cui ogni elemento coincide col proprio opposto, che son poi quelli il cui sottocorpo fondamentale è $C(2)$.

due punti corrispondenti A, A' allineati con U) la quale notoriamente può porsi col solo appoggio dei postulati d'appartenenza. Supposto che l'asse a passi per il punto O della nostra u, e che A, A' sian presi su di essa, lo SCHUR dimostra che la corrispondenza indotta dall'omologia sulla u è *indipendente* dall'asse a, quindi è individuata da U, O, e dalla coppia AA'. La diremo, coll'A., una *similitudine proiettiva (Projektive Ähnlichkeit)* di centro O e punto limite U.

Se ora sulla u è fissato anche il punto I (*elemento unità* del sistema) si definirà quale *prodotto del punto A per il punto B*, il punte C corrispondente di B nella similitudine proiettiva in cui ad I corrisponde A. La definizione si estende subito a più fattori; lo SCHUR ne dimostra l'adeguamento alla *proprietà associativa* ed alle due *leggi distributive* (destra e sinistra); inoltre anche l'esistenza dei due *inversi* (pure destro e sinistro) relativi ad un punto A si stabilisce immediatamente.

6. Dopo ciò appare chiaro che il sistema numerico in cui restano così inquadrati (a priori in modo dipendente da U, O, I) i punti della u, è quello che taluni Autori chiamano un *corpo non commutativo* [19] o *sghembo* (*Schiefkörper*) e che quì chiameremo un *pseudocorpo*. Esso acquista le qualità di un corpo appena resti assicurata la *commutatività della moltiplicazione*, il cui equivalente geometrico, come hanno provato i nostri A. (HILBERT-SCHUR) è il teorema di Pappo-Pascal, cioè il carattere *pascaliano* dello spazio grafico che si considera.

Possiedono tal carattere i nostri spazî finiti ? Non si vede invero una via geometrico-combinatoria per decidere in merito; ma fortunatamente interviene in aiuto il valido soccorso dell'Algebra, la quale tronca nettamente la questione col

Teorema di WEDDEBURN-ARTIN: *Non esistono pseudocorpi finiti, o, in altre parole, ogni pseudocorpo finito è un corpo* [20].

(19) Cfr. VAN DER WAERDEN, loc. cit (4) §§ 10, 25.

(20) Non risultandomi noto tale teorema, nella forma precisa confacente al caso qui trattato, ne avevo costruita una dimostrazione basata sul teorema di WEDDEBURN secondo il quale *un' algebra primitiva in un corpo finito è necessariamente commutativa* (SCORZA, loco cit. (4), Appendice, § 3). Il prof. E. ARTIN, al quale mi sono successivamente rivolto per avere indica-

Di conseguenza, come già avvertito al n. 1, *gli spazi grafici finiti sono pascaliani*; ed il significato aritmetico di tal carattere geometrico risiede nel teorema or ricordato.

Dalla conclusione raggiunta al teorema enunciato al n. 1 è breve il passo.

Ci riferiremo addirittura ad un qualunque *spazio pascaliano* S; fissata ivi una punteggiata u, e su di essa i tre punti U, O, I, indicheremo con K il corpo numerico determinato in base alle regole esposte. È facile provare che K è sostanzialmente *indipendente* dalla u e dai tre punti fondamentali; o precisamente che se K' è il corpo analogo relativo ad un'altra punteggiata u', ed ai punti U', O', I', i due corpi K, K' sono isomorfi.

All'uopo soccorre il teorema fondamentale in senso ristretto, che come sappiamo (nota (7)) sussiste in ogni spazio pascaliano S. Ed intanto in base a quel teorema è concesso di definire l'equivalenza diretta relativa ad un punto limite U, in cui ad A corrisponde A', come la proiettività $\begin{pmatrix} U\,A\,A' \\ U\,A'A'' \end{pmatrix}$ dove A'' è il coniugato armonico di A rispetto alla coppia $U\,A'$ (e ciò anche se A'' coincide con A), e la similitudine proiettiva di centro O e punto limite U, nella quale ad A corrisponde A' come la proiettività $\begin{pmatrix} U\,O\,A \\ U\,O\,A' \end{pmatrix}$.

Da tali definizioni e da quelle di somma e prodotto dati al n. prec., si deduce che la proiettività $\begin{pmatrix} U\,O\,I \\ U'O'I' \end{pmatrix}$ pone tra gli elementi di K, K' (che son poi i punti di u, u') una corrispondenza biunivoca che muta la somma ed il prodotto di due elementi, nella somma e prodotto dei corrispondenti. Non è naturalmente escluso che tra K e K' possano intercedere più isomorfismi distinti (cioè che K ammetta automorfismi) ma la proiettività predetta ne individua uno ben determinato.

zioni sullo stato della questione, mi ha cortesemente comunicate una sua Nota, *Ueber einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Weddeburn* [Abhandlungen aus d. Math. Sem. der Hamburgischen Universität, Bd V (1927) pp. 245-250] nella quale il teorema in discorso – che l'A. chiama pure « teorema di WEDDEBURN » – è enunciato ed ottenuto proprio nella forma del testo.

Ora siano A, B, C, D quattro elementi d'una forma di 1ª specie u' dei quali, i tre primi distinti; mediante la proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ U\,O\,I \end{pmatrix}$ all'elemento D resta associato un ben determinato punto M di u, cioè un *numero* del corpo K; esso si dirà il *birapporto* di quella quaderna, presa nell'ordine scritto, e s'indicherà con $(ABCD)$. Viceversa dati A, B, C ed un numero di K, cioè un punto M di u, è determinato sulla u' l'elemento D tale che $(ABCD) = M$.

La *proprietà proiettiva* del birapporto è contenuta nella definizione stessa; sussistono del pari le altre proprietà fondamentali relative al comportamento di fronte alle permutazioni delle lettere, che si stabiliscono facilmente, sempre coll' appoggio alle definizioni date al n. precedente per le operazioni in K. Si conferma pure la validità della relazione $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$; con che si ha quanto basta per definire alla solita maniera in S le *coordinate proiettive* (puntuali) relative ad un dato tetraedro fondamentale $A_1 A_2 A_3 A_4$ e ad un punto unità U. Per il tramite di esse i punti di S son collegati biunivocamente alle quaderne numeriche (x_1, x_2, x_3, x_4) estratte dal corpo K (risguardandosi identiche due quaderne proporzionali) cioè ai punti dello spazio numerico S' relativo al corpo K; e poichè in entrambi gli spazî i piani e le rette son rappresentati da equazioni lineari ([21]) così quella corrispondenza è proiettiva. Il nostro teorema è così dimostrato, ed in più n' è rimasta precisata la genesi della conclusione riferita alla nota ([11]).

7. Prima di lasciare l'argomento vogliam trattenerci ancora su questioni particolari.

Il tipo più semplice di spazio grafico finito non relativo ad un corpo $C(p)$, si ha per il più piccolo valore di n non primo, ma potenza d'un numero primo, ch'è il 4. A norma della teoria generale un corpo K contenente 4 elementi ha il sottocorpo fondamentale isomorfo a $C(2)$ e può addirittura identificarsi col

([21]) Ciò per S è ancora conseguenza del teorema fondamentale in senso ristretto. Vedasi per il piano la dimostrazione delle mie *Lezioni*, Cap. IV, n. 396, che si applica al caso attuale.

corpo algebrico derivato da $C\,(2)$ mediante l'*aggiunta* d'un polinomio $P\,(x)$ di 2° grado, coi coefficienti in $C\,(2)$, ed ivi irriducibile ([22]). Tale corpo algebrico può concepirsi come l'insieme delle *classi* in cui si ripartiscono (mod. $P\,(x)$) i polinomî in $C\,(2)$, e per *rappresentanti* di esse si possono prendere i *resti incongrui*, cioè i polinomî incongrui di grado inferiore a quello di $P\,(x)$.

Si vede subito che l'unico polinomio di 2° grado irriducibile in $C\,(2)$ è $x^2 + x + 1'$ (si omettono i coefficienti eguali ad $1'$, e la potenza x^0 dell' indeterminata x); talchè gli elementi di K sono individuati dai quattro resti incongrui $0'$, $1'$, x, $x + 1'$. I due primi sono lo zero e l'unità di K e potranno ancora indicarsi con $0'$, $1'$; introdotto per il terzo il simbolo ε, si trova facilmente colle leggi del calcolo, mod. $P\,(x)$, che il quarto è ε^2, e che i quattro elementi si combinano nelle operazioni come appresso

$$1' + 1' = \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon^2 + \varepsilon^2 = 0'\,,\quad 1' + \varepsilon = \varepsilon^2,\quad 1' + \varepsilon^2 = \varepsilon\,,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = 1'\,,\quad \varepsilon\,\varepsilon^2 = 1'\,,$$

dopo di che la determinazione della struttura combinatoria dello spazio S non offre difficoltà.

Un'ultima osservazione ci vien suggerita dalle considerazioni che lo Staudt, nel passo citato, svolge a proposito degl' immaginarî. Egli osserva che se la totalità dei punti (reali) della retta *s'indica con* $n + 1$, e *se si opera con tal notazione come con un numero finito*, si trova che sulla retta stanno $n^2 - n$ punti immaginari, in quanto tant'è il numero delle *rappresentazioni armoniche* di quegli elementi, col primo punto A fisso, visto che le quaderne armoniche $ABCD$ sono in numero di $\frac{1}{2}(n^2 - n)$, e che ciascuna di esso dà luogo a due rappresentazioni $ACBD$, $ADBC$. Si può dare alle osservazioni dello Staudt che, per sua esplicita (per quanto un po' oscura) dichiarazione, sono intese unicamente a fornire una rappresentazione intuitiva degli elementi contenuti in una forma fondamentale, un significato pre-

([22]) Cfr. G. Scorza, loc. cit. ([1]), Parte 1ª, Cap. III.

ciso nel caso degli spazî che contengono *effettivamente* un numere finito di punti?

Ecco cosa dicono alcune rapide considerazioni in proposito. In uno spazio grafico finito S, d'indice n, le quaderne armoniche d'una retta u con un punto fisso A sono effettivamente $\frac{1}{2}(n^2 - n)$; ed ogni quaderna $ABCD$ siffatta, mediante le coppie AB, CD individuata sulla u un' *involuzione*. Se mediante questa si voglion definire due nuovi elementi (da dirsi *punti immaginarî* in relazione ad S) occorrerà che si tratti d'un'involuzione priva, sulla u, di punti doppî. Orbene è facile provare che, a tale effetto, occorre e basta che il polinomio $x^2 + 1'$ sia *irriducibile* nel corpo K associato ad S, cioè che l'equazione $x^2 + 1' = 0$ non abbia soluzioni in K.

Se ciò si verifica, il corpo algebrico $\overline{K}$ *derivato* da K mediante l'*aggiunta* del polinomio $x^2 + 1'$, contiene n^2 elementi, e dà luogo ad uno spazio numerico $\overline{S}$ che si può supporre contenga S (in quanto $\overline{K}$ contiene un sottocorpo isomorfo a K) nel quale le involuzioni predette acquistano i punti doppî mancanti in S; talchè $\overline{S}$ si comporta rispetto ad S come lo spazio complesso di fronte allo spazio proiettivo reale. Ma se il polinomio $x^2 + 1'$ è riducibile in S, talchè le involuzioni considerate hanno punti doppî, un ampliamento di S che presenti analogia col passaggio dallo spazio proiettivo reale allo spazio complesso, non sembra più possibile.

Avvertasi che tra gli spazî dianzi designati con $S(p)$ si prestano all'ampliamento solo quelli per cui p è della forma $4k + 3$; in quanto il polinomio $x^2 + 1'$ è riducibile in $S(p)$ allora e soltanto che -1 è *residuo quadratico* rispetto al modulo p, il che si verifica quando p è della forma $4k + 1$.

§ 2. - Spazî ordinabili. Esempio d'uno spazio ch'è simultaneamente archimedeo e non archimedeo.

8. Dato uno spazio grafico S si presenta la questione di vedere se in esso si possano porre le *nozioni ordinali* in guisa da render soddisfatti i *postulati* (od il postulato) *dell'ordine* ([23]). Tale possibilità implica quella d'una legge atta ad individuare in ogni forma di 1ª specie una coppia di *versi* (circolari) mutuamente opposti ([24]), la cui distribuzione abbia, nell'insieme, *carattere proiettivo*, cioè sia tale che nel passaggio da una forma u ad un'altra u' mediante una catena di proiezioni e di sezioni, i versi definiti sulla u si mutino i quelli definiti sulla u'. Uno spazio grafico che in qualche maniera possa adeguarsi a tal modalità, si dirà uno *spazio ordinabile.*

Si vede subito che non ogni spazio grafico è ordinabile, bastando all'uopo osservare che dalla validità dei postulati dell'ordine si inferisce al separarsi tra le coppie AB, CD d'una quaderna armonica, mentre conosciamo spazî grafici nei quali si ha sempre $C = D$. D'altra parte non è detto che l'adeguamento ai postulati dell'ordine, ove sia concesso, presenti *una sola possibilità* ([25]), talchè non è da escludersi l'esistenza di spazî grafici che siano ordinabili in più modi distinti.

Ma v'ha di più. Ad ogni ordinamento d'uno spazio grafico S appartiene un carattere essenziale ch'è quello d'essere *archimedeo* o *non archimedeo*; giacchè il *postulato d'Archimede,* che qui naturalmente considereremo nella sua *forma proiettiva* ([26]) afferma la possibilità di conseguire, ripetendo determinate costruzioni grafiche, una certa relazione ordinale. Si prospetta così anche l'eventualità che uno stesso spazio S possa ammettere simultaneamente ordinamenti archimedei e non archimedei; ed appunto alla sua attuazione è dedicato il presente paragrafo.

9. Ci riferiremo a spazî S *pascaliani*, quindi sostituibili con spazî numerici inerenti ad opportuni corpi K. La questione della

([23]) Nei trattati di ENRIQUES e SEVERI (cit. ([1])) i postulati sono due, riuniti in uno solo nelle mie *Lezioni* (Parte 1ª, n. 228, Post. VII).

([24]) Per la nozione di verso circolare d'una forma chiusa, e relative caratteristiche, vedansi le mie *Lezioni*, Parte 1ª, n. 224 e segg.

([25]) Una condizione sufficiente per l'*unicità* dell'ordinamento, è che lo spazio S sia *continuo*. Vedansi in proposito le interessanti osservazioni nell'*Appendice* del trattato di SEVERI (§ 2).

([26]) Cfr. il n. 4 della mia nota citata in ([7]) e le mie *Lezioni*, Parte 2ª, Cap. IV, § 1, VI.

loro ordinabilità è intimamente connessa ad una fondamentale caratteristica di quei corpi che andiamo a richiamare.

Diremo che un corpo K è *linearmente ordinabile* [27] se in esso si possono definire le relazioni espresse dai segni $>$ e $<$, col loro comportamento ordinario rispetto alle operazioni, in modo preciso se da K si può estrarre una sottoclasse di elementi da dirsi *positivi* ($> 0'$), con rispetto delle condizioni seguenti:

1. Se a è un numero di K diverso da $0'$, dei due numeri $a, -a$, uno ed uno solo è positivo (il che implica $a \neq -a$);
2. Se a e b sono positivi, lo sono anche $a+b$ ed ab.

Naturalmente un numero a non nullo e non positivo, quindi tale che $-a$ è positivo, si dirà *negativo* ($< 0'$).

È chiaro che per un corpo K la proprietà d'esser linearmente ordinabile, è più restrittiva di quella d'esser semplicemente *ordinabile come insieme,* in quanto un ordinamento lineare è vincolato, per il tramite delle operazioni, alla struttura del corpo come tale. Passando allo spazio numerico S si vede che un tal vincolo è equivalente a quello imposto agli ordinamenti circolari dalla condizione d'aver carattere proiettivo, giacchè, come ora proveremo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio numerico (uno spazio pascaliano) S sia ordinabile, è che il relativo corpo K sia linearmente ordinabile.

La *sufficienza* della condizione si dimostra procedendo come nel caso in cui K è il corpo reale. Fatto riferimento, in una forma di 1ª specie u, ad un sistema di coordinate proiettive, si convenga di dire che le due terne ABC, LMN di elementi della u sono *equiverse* o *contraverse*, a seconda che il numero di K dato dall'espressione

$$(1) \qquad \frac{(ab)\,(bc)\,(ca)}{(lm)\,(mn)\,(nl)}, \qquad (ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

formata colle coordinate proiettive $(a_1, a_2) \ldots (n_1, n_2)$ degli elementi considerati è positivo o negativo (l'indipendenza di tal carattere dai fattori di proporzionalità è ovvia). Poggiando sulle

[27] *Angeordneter Körper* secondo VAN DER WAERDEN (loc. cit. [4], § 63) da cui è tratta la definizione che segue.

proprietà delle disuguaglianze, si prova facilmente che la ripartizione così determinata fra le terne di elementi della u soddisfa alle condizioni inerenti alla nozione dei versi (circolari), indi dal fatto che il segno di (1) è invariante per qualsiasi sostituzione lineare (coi coefficienti in K) si desume che quella ripartizione è indipendente dal sistema di coordinate, ed ha carattere proiettivo [28].

Veniamo alla *necessità*. Se lo spazio S è ordinabile, ed in esso è dato un ordinamento Ω, le proiettività tra forme di 1ª specie, in particolare le *equivalenze* e le *similitudini proiettive* sono ivi corrispondenze ordinate; anzi le prime sono *concordi*, come risulta dall'osservare che se $A A' A''$ son tre elementi successivamente corrispondenti in un'equivalenza diretta d'una punteggiata u, relativa al punto limite U, la quaderna $U A' A A''$ è armonica, quindi le coppie $U A', A A''$ si separano. Si suppongano ora fissati sulla u i tre punti U, O, I, quindi anche l'associazione tra i punti u ed i numeri di K, e si osservi che, come risulta facilmente dalla definizione di somma data al n. 5, e dal carattere concorde delle equivalenze dirette, a due numeri opposti corrispondono due punti di u, separati (armonicamente) da U, O. Se pertanto si conviene di chiamar *positivi* i numeri di K associati ai punti del segmento $O U$ che contiene I (estremi esclusi) rimane soddisfatta la condizione 1 della definizione data al principio del numero. Ricorrendo ancora alla definizione geometrica delle operazioni in K (n. 5) e tenendo sempre presenti le osservazioni al principio di questo capoverso, il lettore vedrà facilmente che è soddisfatta anche la condizione 2, talchè il corpo K risulta *linearmente ordinato*, c. d. d.

10. Se un corpo K è linearmente ordinabile il relativo *sottocorpo fondamentale* è infinito (sicchè *gli spazi finiti non sono ordinabili*) quindi isomorfo al corpo razionale, e di conseguenza gl' *interi* $1', 2', \ldots, n', \ldots$ di K sono tutti distinti. Un ordinamento lineare Ω di quel corpo si dirà *archimedeo*, se per ogni numero a di K si può determinare un intero n' tale che (in relazione ad Ω) risulti $n' - a > 0'$ $(n' > a)$; e naturalmente nel caso contrario si dirà che Ω è *non archimedeo* [29].

[28] Per i dettagli vedi le mie *Lezioni*, Parte 2ª, Cap. IV, n. 350.
[29] Cfr. VAN DER WAERDEN, loc. cit. [1], § 63.

Passando allo spazio numerico S, ordinato in relazione ad Ω, si vede che la distinzione collima con quella che si attinge dall'essere o no verificato il *postulato d'Archimede.* Invero se U, O, I, A sono elementi arbitrarî (distinti) d'una forma dî prima specie u, ed a è il numero di K associato ad A (in relazione alla terna fondamentale U, O, I) la disuguaglianza $n' - a > 0'$ esprime, sempre in base al significato geometrico delle operazioni in K, che se A_n è l'elemento d'indice n della *scala armonica* $(U\,O\,I)$, le coppie UA_n, OA non si separano ([30]).

Ricorderemo ancora che, come risulta immediatamente dalla definizione del n. prec., se due corpi K, K' son legati da un *isomorfismo* T, ad ogni ordinamento lineare dell'uno è associato un ordinamento lineare dell'altro; anzi i due ordinamenti sono assieme archimedei o non archimedei, perchè T muta gl'interi di K in quelli di K'. L'osservazione è applicabile al caso in cui K e K' coincidono, quindi ogni *automorfismo* d'un corpo K muta un ordinamento lineare in un'ordinamento lineare dello stesso tipo.

11. Dalle conclusioni dei numeri precedenti risulta che per quanto concerne gli ordinamenti d'uno *spazio pascaliano* S, tant'è riferirsi al corpo associato K, onde d'ora in poi parleremo soltanto di questo.

Ed eccoci a dar l'esempio d'un corpo ch'è suscettibile di infiniti ordinamenti lineari tanto archimedei quanto non archimedei.

Si tratta semplicemente del corpo K i cui elementi sono le *funzioni razionali* $\Phi(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ (P, Q polinomî) d'un parametro (indeterminata) t *a coefficienti razionali.* S'intende che tali funzioni van considerate *sotto l'aspetto puramente formale,* cioè quali « *frazioni algebriche* » nel senso di Scorza; alla stregua del quale la $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$ va considerata come una *rappresentazione* dell'elemento $\Phi(t)$ di K, e due rappresentazioni $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$, $\dfrac{P_1(t)}{Q_1(t)}$

([30]) Vedi i luoghi citati alla nota ([26]).

devon risguardarsi come spettanti al *medesimo* elemento allora e soltanto che *identicamente* si abbia $P(t)\,Q_1(t) \equiv P_1(t)\,Q(t)$.

Sostituendo a t un numero reale ϑ, (esclusi i valori di ϑ che annullano il denominatore dell' espressione di $\Phi(t)$ sotto forma di frazione *irriducibile*) ad ogni elemento di $\Phi(t)$ di K resta associato un *numero reale* $\Phi(\vartheta)$ che potrà dirsi il *valore* di quell' elemento per $t = \vartheta$; e tal valore per ϑ positivo sufficientemente grande ha un segno determinato che si dirà il *segno finale* di $\Phi(t)$. Orbene un primo ordinamento lineare *non archimedeo*, si determina notoriamente (con Hilbert) in K, chiamando *positivi* quegli elementi il cui segno finale è positivo.

Da tale ordinamento se ne deducono infiniti altri, pure *non archimedei*, mediante gl' infiniti *automorfismi* del corpo K generati dalle sostituzioni lineari sul parametro, cioè definiti dall' associare all' elemento $\Phi(t)$ l' elemento $\Phi\left(\frac{a\,t+b}{c\,t+d}\right)$ con a, b, c, d razionali ed $ad - bc \neq 0$ ([31]).

Agli *ordinamenti archimedei* di K si perviene partendo dall' osservare che quando il numero reale ϑ di cui sopra è *trascendente*, la corrispondenza tra gli elementi $\Phi(t)$ di K ed i loro valori $\Phi(\vartheta)$ è *biunivoca*, giacchè appunto per la trascendenza di ϑ non può essere $\frac{P(\vartheta)}{Q(\vartheta)} = \frac{P_1(\vartheta)}{Q_1(\vartheta)}$ se non è identicamente $P(t)\,Q_1(t) \equiv P_1(t)\,Q(t)$. D' altronde è chiaro che i valori $\Phi(\vartheta)$ in discorso riempiono il corpo $R(\vartheta)$ generato *aggregando* ϑ al corpo razionale; ed infine, appena si tenga presente la definizione formale delle operazioni in K si vede che tale corrispondenza è un *isomorfismo.*

Ora il corpo $R(\vartheta)$ come *sottocorpo del corpo reale* è linearmento ordinabile subordinatamente al normale (ed unico) ordinamento lineare del corpo reale, cioè dando alla parola positivo il significato che ha in quel corpo; e tale ordinamento, manifestamente *archimedeo*, si può *trasportare* al corpo K per il tramite del rilevato isomorfismo.

([31]) Questi son tutti gli automorfismi del corpo K. Vedasi il n. 14 della Nota citata in ([7]) avvertendo che tutto va allo stesso modo sostituendo ai due numeri trascendenti ϑ, ϑ_1 ivi considerati, due indeterminate t, t_1.

Gli ordinamenti che così restano *indotti* in K sono poi tutti distinti, perchè se ϑ, ϑ_1 son due numeri trascendenti, ed a un numero razionale tra essi compreso, posto, per fissar le idee, che sia $\vartheta_1 > \vartheta$, l'elemento $a - t$ di K è positivo nell'ordinamento indotto da ϑ, negativo in quello indotto da ϑ_1.

Più espressivamente la cosa si vede con riferimento ad una punteggiata u dello spazio numerico S relativo a K sulla quale siano fissati i soliti tre punti U, O, I. Allora se A, T sono i punti associati ai numeri a, t di K, le due coppie UA, OT si separano rispetto ad uno dei due ordinamenti, non si separano rispetto all'altro. Ad esempio se ϑ e quindi anche ϑ_1 è positivo, il primo caso si verifica per l'ordinamento indotto da ϑ_1, il secondo per quello indotto da ϑ.

Noteremo infine che, potendosi identificare K con uno, $R(\vartheta)$, fra i sottocorpi del corpo reale ad esso isomorfi, *il nostro spazio S può ritenersi immerso nello spazio proiettivo reale.* E poichè ciascuno degl'infiniti ordinamenti in esso costruiti ha carattere proiettivo, così il *carattere ordinato* delle corrispondenze proiettive tra forme di 1ª specie è ivi interpretabile in infinite maniere distinte (32).

(32) A redazione ultimata apprendo da un accenno riposto del trattato di van der Waerden (cit. (4), § 68, Aufg. 2) che la infinita varietà di ordinamenti del corpo K quì considerato è già stata rilevata. Stante il diverso punto di vista di questa esposizione, e le osservazioni premesse al caso specifico, non ho creduto, sia pure in difetto di priorità, di modificarla.