

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

V. BAGDONAVIČIUS

L. GERVILLE-RÉACHE

V. NIKOULINA

M. NIKULIN

Expériences accélérées: analyse statistique du modèle standard de vie accélérée

Revue de statistique appliquée, tome 48, n° 3 (2000), p. 5-38

http://www.numdam.org/item?id=RSA_2000__48_3_5_0

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPÉRIENCES ACCÉLÉRÉES : ANALYSE STATISTIQUE DU MODÈLE STANDARD DE VIE ACCÉLÉRÉE

V. Bagdonavičius*, L. Gerville-Réache**, V. Nikoulina**, M. Nikulin**, ***

* Université de Vilnius, Département de Statistiques, Vilnius, Lituanie

** Université Victor Segalen, Bordeaux, France

*** Steklov Mathematical Institute, St.Petersbourg, Russia

RÉSUMÉ

Nous étudions l'estimation paramétrique, semiparamétrique et non-paramétrique dans les expériences accélérées. Le modèle standard de vie accélérée (SVA) est utilisé pour décrire la durée de vie sous des stress divers. On considère deux plans d'expérience possibles.

Mots-clés : Estimation paramétrique, estimation nonparamétrique, estimation semiparamétrique, expériences accélérées, plan d'expérience, stress

ABSTRACT

We consider parametric, semiparametric and nonparametric estimation in accelerated life testing. The accelerated failure time model is used to describe the dependence of the time-to-failure on a stress. Possible plan of experiments are considered.

Keywords : Accelerated experiments, experiment design, nonparametric estimation, parametric estimation, semiparametric estimation, stress

1. Modèle standard de vie accélérée

Cet article a pour but de présenter l'analyse statistique d'un des modèles les plus simples de vie accélérée : le modèle standard de vie accélérée. La théorie des expériences accélérées est un domaine où la production anglo-saxonne est abondante. Il semble que les articles en français sur le sujet soient rares et c'est pour cela que nous avons décidé de présenter un article complet sur l'étude d'un modèle de vie accélérée (modèle simple qui montre la richesse de ces applications). Nous construisons dans le cas de deux plans d'expériences des estimateurs paramétriques, semiparamétriques et nonparamétriques du modèle standard de vie accélérée. Après avoir déterminé les propriétés asymptotiques de ces estimateurs et construit des intervalles de confiance pour la fonction de survie, nous proposons quelques simulations afin d'appréhender la qualité de ces estimateurs. Enfin, nous avons volontairement réalisé une bibliographie,

riche mais non exhaustive, de livres et d'articles se rapportant à ce sujet. Pour les notions nécessaires à une lecture approfondie de cet article on peut consulter par exemple Voinov V., Nikulin M. (1993), Greenwood P.E., Nikulin M. (1996) on encore Andersen P.K., Borgan D., Gill R.D., Keiding N. (1993).

Supposons que l'on ait des unités très fiables et qu'il n'y ait pas de possibilités d'observer de pannes pendant le temps t donné pour l'expérience. Dans ce cas on effectue des épreuves sous des stress qui sont supérieurs au stress usuel. On appelle ces expériences des *expériences accélérées*. L'application de stress accélérés raccourcit la durée de vie des unités et des pannes peuvent se produire pendant le temps t . Comme exemples de stress citons : la température, le voltage, le poids etc..., voir Nelson (1990) par exemple.

Dans le cas général les stress \mathbf{x} peuvent varier en temps et peuvent être multidimensionnels :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau), \tau \geq 0, \quad \text{où } \mathbf{x} : [0, \infty[\rightarrow B \subset \mathbb{R}^m.$$

Supposons que la durée de vie $T_{\mathbf{x}(\cdot)}$ sous le stress $\mathbf{x}(\cdot)$ est une variable aléatoire non-négative absolument continue de fonction de survie

$$S_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = \mathbf{P}\{T_{\mathbf{x}(\cdot)} > t\}, \quad t \geq 0.$$

Considérons un ensemble de stress \mathcal{E} . Formellement, on dit qu'un stress $\mathbf{x}_1(\cdot)$ est supérieur à un stress $\mathbf{x}_0(\cdot)$, si $S_{\mathbf{x}_0(\cdot)}(t) > S_{\mathbf{x}_1(\cdot)}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Le but des expériences accélérées est d'estimer la fiabilité des unités sous les conditions usuelles \mathbf{x}_0 de fonctionnement en utilisant des observations de ces expériences. La solution de ce problème exige la construction de modèles qui déterminent de quelle façon la fonction de survie $S_{\mathbf{x}(\cdot)}$ ou une autre caractéristique (la densité, le taux de pannes, etc.) change quand on change le stress $\mathbf{x}(\cdot)$.

Soit $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ un ensemble de stress constants dans le temps, $f_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = S_{\mathbf{x}_0}^{-1} \circ S_{\mathbf{x}(\cdot)}(t)$, où $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$,

$$S_{\mathbf{x}_0}^{-1}(p) = \inf\{s : S_{\mathbf{x}_0}(s) \geq p\}$$

est la fonction inverse de $S_{\mathbf{x}_0}$. Alors pour tout $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{E}$

$$\mathbf{P}\{T_{\mathbf{x}_0} \geq f_{\mathbf{x}(\cdot)}(t)\} = \mathbf{P}\{T_{\mathbf{x}(\cdot)} \geq t\}.$$

Pour tout $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{E}$ la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t sous le stress $\mathbf{x}(\cdot)$ est la même que la probabilité de survivre jusqu'à l'instant $f_{\mathbf{x}(\cdot)}(t)$ sous le stress \mathbf{x}_0 . Le nombre $f_{\mathbf{x}(\cdot)}(t)$ est appelé *la ressource utilisée sous le stress $\mathbf{x}(\cdot)$ jusqu'à l'instant t* . Il est clair que $f_{\mathbf{x}(\cdot)}(0) = 0$ pour tout $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{E}$. La variable aléatoire $R = f_{\mathbf{x}(\cdot)}(T_{\mathbf{x}(\cdot)})$ est la ressource utilisée sous le stress $\mathbf{x}(\cdot)$ jusqu'à la panne. La fonction de survie de R est $S_{\mathbf{x}_0}$ et ne dépend pas de $\mathbf{x}(\cdot)$.

Le modèle standard de vie accélérée (SVA) est vérifié sur \mathcal{E} s'il existe une fonction $r : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{E}$ (Bagdonavičius (1978), Cox and Oakes (1984), Bagdonavičius and Nikulin (1994))

$$\frac{d}{dt} f_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = r[\mathbf{x}(t)]. \quad (1)$$

Le modèle SVA signifie que la vitesse d'utilisation de la ressource à l'instant t ne dépend que de la valeur du stress appliqué à l'instant t . La formule (1) implique que

$$S_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = S_{\mathbf{x}_0} \left(\int_0^t r[\mathbf{x}(\tau)] d\tau \right). \quad (2)$$

Nous nous bornons au modèle (2). Pour de nombreuses généralisations (comme, par exemple, le modèle CRUR (Changing Rate Utilisation Ressource)), applications, recommandation et analyses statistiques, voir Chaouki, Gerville-Réache & Nikoulina (1999), Gerville-Réache & Nikoulina (2000), Bagdonavičius & Nikulin (1995, 1997, 1998a, 2000a, 2000b), Meeker & Escobar (1993, 1998), Viertl (1988), Schabe & Viertl (1995), Meeker & Luvalle (1995), Nelson (1990), etc...

Dans le cas où $\mathbf{x}(\tau) \equiv \mathbf{x} = \text{const}$ le modèle (2) implique

$$S_{\mathbf{x}}(t) = S_{\mathbf{x}_0}(r(\mathbf{x})t), \quad (3)$$

donc le stress ne change que l'échelle. Notons que $r(\mathbf{x}_0) = 1$.

2. Plans d'expériences

Considérons les deux plans d'expériences suivants.

Le premier plan est classique (voir Nelson (1990)). Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ des stress constants accélérés : $\mathbf{x}_1 < \dots < \mathbf{x}_k$ et \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1$) le stress usuel. k groupes d'unités sont observés. On teste le i ème groupe sous le stress $\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}_0$. Le stress usuel \mathbf{x}_0 n'est pas utilisé.

Si la fonction r est complètement inconnue et que l'on utilise le premier plan d'expériences, la fonction $S_{\mathbf{x}_0}$ ne peut pas être estimée même si l'on connaît la famille de distributions à laquelle $S_{\mathbf{x}_0}$ appartient.

Par exemple, si $S_{\mathbf{x}_0}(t) = e^{-(t/\theta)^\alpha}$, alors, pour le stress constant \mathbf{x}

$$S_{\mathbf{x}}(t) = \exp \left[- \left(\frac{r(\mathbf{x})}{\theta} t \right)^\alpha \right].$$

Les paramètres $\alpha, \frac{r(\mathbf{x}_1)}{\theta}, \dots, \frac{r(\mathbf{x}_k)}{\theta}$ et les fonctions $S_{\mathbf{x}_1}, \dots, S_{\mathbf{x}_k}$ peuvent être estimés mais puisque r est complètement inconnu, $r(\mathbf{x}_0)$ et donc $S_{\mathbf{x}_0}(t)$ ne peuvent pas être estimés.

Donc la fonction r doit être choisie dans une certaine classe de fonctions.

Considérons quelques choix possibles de la fonction $r(\mathbf{x})$. Si le modèle (3) est vérifié sur un ensemble de stress \mathcal{E} , alors pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_0$

$$S_{\mathbf{x}_2}(t) = S_{\mathbf{x}_1}(\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)t),$$

où $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = r(\mathbf{x}_2)/r(\mathbf{x}_1)$.

D'abord supposons que le stress $x \in \mathcal{E}_0 \subset \mathbb{R}$ soit unidimensionnel. Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée (voir Viertl (1988)) *

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(x, x + \Delta x) - \rho(x, x)}{\Delta x} = [\log r(x)]'.$$

Donc pour tout $x \in \mathcal{E}$

$$r(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \delta(v) dv \right\}.$$

Supposons que $\delta(x)$ soit proportionnelle à une fonction connue $u(x)$ du stress :

$$\delta(x) = \beta_1 u(x), \quad \beta_1 > 0. \quad (4)$$

Alors

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(x)},$$

où $z(x)$ est une fonction primitive de $u(x)$, β_0, β_1 sont des paramètres inconnus.

Quelques cas particuliers :

a) $\delta(x) = \beta_1$, i.e. le taux de changement de l'échelle est constant. Alors

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x},$$

où $\beta_1 > 0$. C'est le *modèle loglinéaire*. Ce modèle est appliqué pour analyser des données de fatigue, testant divers composants électroniques.

b) $\delta(x) = \beta_1/x$, alors

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 \log x} = \alpha x^{\beta_1}$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$ et $\beta_1 > 0$. C'est le *modèle de la règle de puissance* («power rule model»).

Ce modèle est appliqué quand le stress est le voltage ou la charge mécanique.

c) $\delta(x) = -\beta_1/x^2$, alors

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1/x} = \alpha e^{\beta_1/x},$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$ et $\beta_1 < 0$. C'est le *modèle d'Arrhénius*.

Ce modèle est largement appliqué quand le stress est la température.

S'il n'est pas facile de choisir parmi ces trois paramétrisations de $r(x)$, on peut considérer une paramétrisation plus large :

$$\delta(x) = \beta_1 x^\gamma,$$

qui est équivalente à

$$r(x) = \begin{cases} e^{\beta_0 + \beta_1(x^\varepsilon - 1)/\varepsilon}, & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ e^{\beta_0 + \beta_1 \log x}, & \text{si } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

avec $\varepsilon = \gamma + 1$.

Le stress peut être multidimensionnel : $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$. Alors on considère des caractéristiques infinitésimales $\delta_i(\mathbf{x})$ données par des égalités :

$$\delta_i(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i) - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\Delta x_i} = \frac{\partial \log r(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

où $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$. L'unité est dans la i -ème coordonnée.

Généralisant le cas unidimensionnel, $\delta_i(\mathbf{x})$ peut être paramétré de la façon suivante :

$$\delta_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} u_{ij}(\mathbf{x}),$$

où les $u_{ij}(\mathbf{x})$ sont des fonctions connues, α_{ij} – des constantes inconnues. Dans ce cas

$$r(\mathbf{x}) = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} z_{ij}(\mathbf{x})\right\},$$

où les $z_{ij}(\mathbf{x})$ sont des fonctions connues et les β_{ij} des constantes inconnues.

Exemples

a) $\delta_1(\mathbf{x}) = 1/x_1 + (\beta_{11} + \beta_{12}x_2)/x_1^2$, $\delta_2(\mathbf{x}) = \beta_{21} + \beta_{22}/x_1$.

C'est le *modèle d'Eyring généralisé*. On l'applique pour certains matériels liés à des semiconducteurs, quand x_1 est la température et x_2 est le voltage.

b) $\delta_i(\mathbf{x}) = \beta_i u_i(x_i)$,

où les u_i sont connues. Alors

$$r(\mathbf{x}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^m \beta_i \int_{x_i^0}^{x_i} u_i(v) dv\right\} = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i z_i(x_i)\right\},$$

où les z_j sont les fonctions primitives de u_j . C'est le *modèle d'Arrhénius généralisé*.

Donc dans tous les cas considérés les modèles (2) et (3) peuvent s'écrire :

$$S_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = S_{\mathbf{x}_0} \left(\int_0^t e^{\beta^T \mathbf{z}(\tau)} d\tau \right), \quad (5)$$

ou

$$S_{\mathbf{x}}(t) = S_{\mathbf{x}_0} \left(e^{\beta^T \mathbf{z}_t} \right), \quad (6)$$

où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$ est un vecteur de paramètres et

$$\mathbf{z}(t) = (z_0(t), \dots, z_m(t))^T = (\varphi_0(\mathbf{x}(t)), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}(t)))^T, \quad \mathbf{z} = (\varphi_0(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))^T.$$

Les fonctions φ_i sont spécifiées, la première composante z_0 est égale à 1.

Les modèles (5) et (6) peuvent être considérés comme paramétriques, si la fonction $S_{\mathbf{x}_0}$ appartient à une certaine classe de répartitions, ou comme semiparamétriques si $S_{\mathbf{x}_0}$ est complètement inconnue.

Le premier plan d'expérience a ses points faibles :

1) On fait des hypothèses strictes sur la forme de la fonction $r(x)$. Ces hypothèses ne peuvent être vérifiées car on manque d'expérience sous le stress usuel.

2) Comme dans le cas de tous les modèles de régression la prédiction de la variable dépendante pour la valeur de stress x_0 peut être mauvaise parce que cette valeur n'appartient pas à la région des stress utilisés pendant des expériences.

Nous proposons le deuxième plan d'expériences qui peut être utilisé quand la fonction $r(\mathbf{x})$, donnée dans le modèle (2), est *complètement inconnue*.

Supposons que la durée de vie sous le stress usuel \mathbf{x}_0 est longue et que la plupart des pannes se produisent après l'instant t_2 , donné pour l'expérience. Alors on peut observer deux groupes d'unités : le premier sous un stress accéléré \mathbf{x}_1 et le deuxième sous le stress en escalier : sous le stress \mathbf{x}_1 jusqu'à l'instant $t_1 < t_2$ et sous le stress usuel \mathbf{x}_0 à partir de l'instant t_1 . Les unités utilisent beaucoup de leurs «ressources» jusqu'à l'instant t_1 sous le stress accéléré \mathbf{x}_1 donc même sous le stress usuel \mathbf{x}_0 on peut obtenir des pannes dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. La figure 1 traduit ce phénomène, \mathbf{x}_2 correspondant au stress en escalier (\mathbf{x}_1 avant t_1 , \mathbf{x}_0 entre t_1 et t_2), $f_{\mathbf{x}_0}$, $f_{\mathbf{x}_1}$ et $f_{\mathbf{x}_2}$ étant respectivement les densités sous les stress \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .

L'instant t_1 peut être aléatoire comme, par exemple, une statistique d'ordre déterminée par la deuxième expérience, correspondant au stress \mathbf{x}_2 .

Dans le cas du deuxième plan la paramétrisation de $r(\mathbf{x})$ n'est pas nécessaire. Si le premier groupe est testé sous le stress accéléré \mathbf{x}_1 et le deuxième groupe sous le stress

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_1, & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ \mathbf{x}_0, & t_1 < \tau \leq t_2, \end{cases}$$

alors le modèle (2) implique que

$$S_{\mathbf{x}_1}(u) = S_{\mathbf{x}_0}(ru), \quad (7)$$

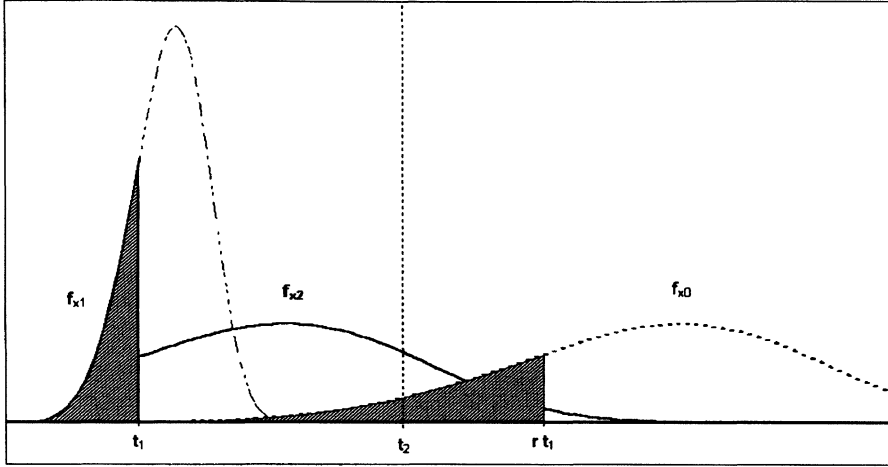


FIGURE 1

où $r = r(x_1)/r(x_0)$, et

$$S_{x_2(\cdot)}(u) = \begin{cases} S_{x_0}(ru), & 0 \leq u \leq t_1, \\ S_{x_0}(rt_1 + u - t_1), & t_1 < u \leq t_2, \end{cases}$$

ou encore :

$$S_{x_2(\cdot)}(u) = S_{x_0}(r(u \wedge t_1) + (u - t_1) \vee 0), \quad 0 \leq u \leq t_2 \quad (8)$$

avec $a \wedge b = \min(a, b)$ et $a \vee b = \max(a, b)$. On verra plus tard que des estimateurs de r et consécutivement de S_{x_0} peuvent être obtenus même dans le cas où la fonction S_{x_0} est complètement inconnue.

3. Estimation paramétrique

On suppose, que le modèle (6) est considéré et que la fonction S_{x_0} appartient à une famille spécifiée de fonctions de survie. Dans le cas du premier plan d'expériences avec des lois concrètes l'estimation est considérée dans une quantité d'articles (voir, par exemple, Nelson (1990) pour les références). Dans la Partie 3.1. nous considérons l'unification de ces résultats en supposant que la fonction de survie S_{x_0} appartient à une classe de fonctions qui ne dépend que des paramètres d'échelle et de la forme.

Dans la Partie 3.2 nous considérons l'estimation paramétrique dans le cas du deuxième plan d'expériences.

3.1. Premier plan d'expérience

On considère le modèle (6). On suppose que k groupes d'unités sont observés; on fixe la durée maximale d'expérience t_i du i -ème groupe et on teste ce groupe d'effectif n_i sous le stress accéléré \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, k$). Notons $z_{il} = \varphi_l(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{z}^{(i)} = (z_{i0}, \dots, z_{im})^T$ ($i = 1, \dots, k$; $l = 0, \dots, m$).

On suppose que $S_{\mathbf{x}_0}$ appartient à une classe de fonctions de survie de la forme :

$$S_{\mathbf{x}_0}(t) = S_0((t/\theta)^\nu), \quad (\theta, \nu > 0). \quad (8')$$

Par exemple, si $S_0(t) = e^{-t}$, $(1+t)^{-1}$, $1 - \Phi(\ln t)$, alors on obtient les classes des fonctions de survie de Weibull, loglogistique, lognormale respectivement. Ici Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. Donc le modèle (6) peut être écrit sous la forme :

$$S_{\mathbf{x}}(t) = S\left(\frac{\ln t - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}}{\sigma}\right), \quad t > 0,$$

où

$$S(u) = S_0(e^u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \sigma = 1/\nu, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_m), \quad \gamma_0 = \ln \theta - \beta_0, \\ \gamma_l = -\beta_l \quad (l = 1, \dots, m).$$

Dans les cas des lois de Weibull, loglogistique et lognormale on a respectivement $S(u) = e^{-e^u}$, $(1 + e^u)^{-1}$, $1 - \Phi(u)$.

Notons T_{ij} la durée de vie (pas nécessairement observée) de la j ème unité du i ème groupe,

$$X_{ij} = \ln(T_{ij} \wedge t_i), \quad \delta_{ij} = I\{T_{ij} \leq t_i\}, \quad f(u) = -S'(u), \quad \lambda(u) = \frac{f(u)}{S(u)}.$$

La fonction de survie et la densité de $\ln T_{ij}$ sont

$$S_i(u; \boldsymbol{\gamma}, \sigma) = S\left(\frac{u - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}^{(i)}}{\sigma}\right), \quad f_i(u; \boldsymbol{\gamma}, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{u - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}^{(i)}}{\sigma}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Donc la fonction de vraisemblance

$$L(\boldsymbol{\gamma}, \sigma) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left[\frac{1}{\sigma} \lambda\left(\frac{X_{ij} - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}^{(i)}}{\sigma}\right) \right]^{\delta_{ij}} S\left(\frac{X_{ij} - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}^{(i)}}{\sigma}\right).$$

En dérivant par rapport à γ_i et σ la fonction $\ln L(\gamma, \sigma)$, on obtient

$$U_l(\gamma; \sigma) = \frac{\partial \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^k z_{il} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}(\gamma, \sigma), \quad (l = 1, \dots, m),$$

$$U_{m+1}(\gamma; \sigma) = \frac{\partial \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \{v_{ij}(\gamma, \sigma) a_{ij}(\gamma, \sigma) - \delta_{ij}\},$$

où

$$v_{ij}(\gamma, \sigma) = \frac{X_{ij} - \gamma^T \mathbf{z}^{(i)}}{\sigma}, \quad a_{ij}(\gamma, \sigma) = \lambda(v_{ij}(\gamma, \sigma)) - \delta_{ij} (\ln \lambda)'(v_{ij}(\gamma, \sigma)).$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}$, $\hat{\gamma}$ peuvent être obtenus en résolvant le système d'équations

$$U_l(\gamma, \sigma) = 0 \quad (l = 1, \dots, m+1).$$

Notons $\mathbf{I}(\gamma, \sigma) = (I_{ls}(\gamma, \sigma))_{(m+1) \times (m+1)}$ la matrice avec des éléments suivants :

$$I_{ls}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_s}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k z_{il} z_{is} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}(\gamma, \sigma), \quad l, s = 0, \dots, m;$$

$$I_{l, m+1}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma_l \partial \sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma} U_l(\gamma, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k z_{il} \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}(\gamma, \sigma) c_{ij}(\gamma, \sigma), \quad l = 0, \dots, m;$$

$$I_{m+1, m+1}(\gamma, \sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma^2}$$

$$= \frac{2}{\sigma} U_{m+1}(\gamma, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (v_{ij}^2(\gamma, \sigma) c_{ij}(\gamma, \sigma) + \delta_{ij}),$$

où $c_{ij}(\gamma, \sigma) = \lambda'(v_{ij}(\gamma, \sigma)) - \delta_{ij} (\ln \lambda)''(v_{ij}(\gamma, \sigma))$.

Si T_{x_0} suit les lois de Weibull, loglogistique ou lognormale respectivement, alors on a

$$\lambda(t) = e^t; (1 + e^{-t})^{-1}; \varphi(t)/(1 - \Phi(t)), \quad \text{où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Si les estimateurs de maximum de vraisemblance sont $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$, alors les estimateurs de la fonction de survie $S_{\mathbf{x}_0}$ et du p -quantile $t_p(\mathbf{x}_0)$ sont

$$\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = S\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)}}{\hat{\sigma}}\right), \quad \hat{t}_p(\mathbf{x}_0) = e^{\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)}} [S_0^{-1}(1-p)]^{\hat{\sigma}}.$$

La loi asymptotique de $(\hat{\gamma}, \hat{\sigma})^T$ quand les n_i sont grands est approchée par la loi normale $N((\gamma, \sigma)^T, \Sigma(\gamma, \sigma))$ et la matrice de covariance $\Sigma(\gamma, \sigma)$ peut être estimée par $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) = (I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}))_{(m+2) \times (m+2)}$, voir par exemple Greenwood & Nikulin (1996). L'estimateur $\hat{t}_p(\mathbf{x}_0)$ est une fonction régulière de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$, donc la loi asymptotique de $\hat{t}_p(\mathbf{x}_0)$ est aussi normale. Mais $t_p(\mathbf{x}_0)$ prend des valeurs positives, donc la vitesse de convergence vers la loi normale est plus grande si on considère la loi limite de

$$\hat{K}_p(\mathbf{x}_0) = \ln\{\hat{t}_p(\mathbf{x}_0)\} = \hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)} + \hat{\sigma} \ln[S_0^{-1}(1-p)].$$

La loi de $\hat{K}_p(\mathbf{x}_0)$ est approximée par la loi normale $N(K_p(\mathbf{x}_0), \sigma_{K_p}^2)$, où $K_p(\mathbf{x}_0) = \ln\{t_p(\mathbf{x}_0)\}$ et la variance $\sigma_{K_p}^2$ peut être estimée par

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{K_p}^2 &= \left(\frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\gamma}_0}, \dots, \frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\gamma}_m}, \frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\sigma}} \right) \mathbf{I}^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) \times \\ &\quad \left(\frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\gamma}_0}, \dots, \frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\gamma}_m}, \frac{\partial \hat{K}_p(\mathbf{x}_0)}{\partial \hat{\sigma}} \right)^T = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) + \\ &\quad 2 \ln[S_0^{-1}(1-p)] \sum_{l=0}^m z_{0l} I^{l, m+1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) + \ln^2[S_0^{-1}(1-p)] I^{m+1, m+1}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}). \end{aligned}$$

La loi de

$$\frac{\hat{K}_p(\mathbf{x}_0) - K_p(\mathbf{x}_0)}{\hat{\sigma}_{K_p}}$$

est approchée par la loi $N(0, 1)$. L'intervalle approximatif de confiance de niveau de confiance $(1 - \alpha)$ pour $K_p(\mathbf{x}_0)$ est donné par la formule

$$\hat{K}_p(\mathbf{x}_0) \pm \hat{\sigma}_{K_p} w_{1-\alpha/2},$$

où w_α est la α -quantile de la loi de $N(0, 1)$. L'intervalle approximatif de niveau $(1 - \alpha)$ pour $t_p(\mathbf{x}_0)$ est donné par la formule

$$\hat{t}_p(\mathbf{x}_0) \exp\{\pm \hat{\sigma}_{K_p} w_{1-\alpha/2}\}.$$

L'estimateur $\hat{S}_{x_0}(t)$ est aussi une fonction régulière de γ et σ . Notons

$$\hat{Q}_{x_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{x_0}(t)}{1 - \hat{S}_{x_0}(t)} \quad \text{et} \quad Q_{x_0}(t) = \ln \frac{S_{x_0}(t)}{1 - S_{x_0}(t)}.$$

La fonction $Q_{x_0}(t)$ prend ses valeurs dans \mathbb{R} donc la vitesse de convergence de $\hat{Q}_{x_0}(t)$ vers la loi limite est plus grande que celle de $\hat{S}_{x_0}(t)$ vers sa loi limite. Comme dans le cas de $t_p(x_0)$ on obtient que la loi de $(\hat{Q}_{x_0}(t) - Q_{x_0}(t))/\hat{\sigma}_{Q_0}$ est approximée par la loi normale $N(0, 1)$; ici

$$\hat{\sigma}_{Q_0} = \frac{S'(S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t)))}{\hat{\sigma}^2 \hat{S}_{x_0}(t)(1 - \hat{S}_{x_0}(t))} \times \sqrt{\hat{\sigma}^4 \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma}, \hat{\sigma}) - 2\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)} \sum_{l=0}^m z_{0l} I^{l, m+1} \hat{\sigma}^2 + (\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)})^2 I^{m+1, m+1}}.$$

Donc les $(1 - \alpha)$ -intervalles approximatifs de confiance pour $Q_{x_0}(t)$ et $S_{x_0}(t)$ sont $\hat{Q}_{x_0}(t) \pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}$ et

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp\{\pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}\} \right)^{-1}.$$

Exemple 1. – Si T_{x_0} suit la loi de Weibull, *i.e.*

$$S_{x_0}(t) = e^{-(t/\theta)^\nu}, \quad t \geq 0,$$

et que l'on choisit la paramétrisation d'Arrhénius (le stress est la température, par exemple), *i.e.*

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1/x},$$

alors $S(t) = \exp\{-\exp(t)\}$, $z_{00} = 1$, $z_{10} = 1/x_0$, donc

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1/x_0}{\hat{\sigma}}\right\}\right\}, \quad \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1/x_0} (-\ln(1-p))^{\hat{\sigma}}.$$

Exemple 2. – Si T_{x_0} suit la loi loglogistique, *i.e.*

$$S_{x_0}(t) = (1 + (t/\theta)^\nu)^{-1}, \quad t \geq 0,$$

et que l'on choisit la paramétrisation de la règle de puissance (le stress est le voltage, par exemple), *i.e.*

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 \ln x},$$

alors $S(t) = (1 + e^t)^{-1}$, $z_{00} = 1$, $z_{10} = \ln x_0$, donc

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \left[1 + \exp\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_0}{\hat{\sigma}}\right) \right]^{-1}, \quad \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_0} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\hat{\sigma}}.$$

Exemple 3. – Si T_{x_0} suit la loi lognormale et que l'on choisit la paramétrisation d'Eyring, *i.e.*

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 \ln x + \beta_2/x},$$

alors $z_{00} = 1$, $z_{10} = \ln x_0$, $z_{20} = 1/x_0$, $S(t) = 1 - \Phi(t)$ et

$$\begin{aligned} \hat{S}_{x_0}(t) &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_0 - \hat{\gamma}_2/x_0}{\hat{\sigma}}\right), \\ \hat{t}_p(x_0) &= e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_0 + \hat{\gamma}_2/x_0 + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(p)}. \end{aligned}$$

Exemple 4. – Supposons que la durée de vie T_{x_0} suit la loi de Weibull, que le stress $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ est bidimensionnel (le voltage et la température, par exemple) et que l'on choisit le modèle d'Arrhénius généralisé avec $\delta_1(x) = \alpha_1/x_1$, $\delta_2(x) = \alpha_2/x_2^2$. Alors

$$z_{00} = 1, \quad z_{10} = \ln x_{10}, \quad z_{20} = 1/x_{20}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) &= \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\ln t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \ln x_{10} - \hat{\gamma}_2/x_{20}}{\hat{\sigma}}\right\}\right\}, \\ \hat{t}_p(\mathbf{x}_0) &= e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_{10} + \hat{\gamma}_2/x_{20}} (-\ln(1-p))^{\hat{\sigma}}. \end{aligned}$$

Les formules sont plus simples, si $\nu = 1$ dans (8'). Par exemple dans le cas de la loi exponentielle :

$$S_{\mathbf{x}_0}(t) = e^{-t/\theta}, \quad t \geq 0, \quad t_p(\mathbf{x}_0) = -e^{-\gamma^T \mathbf{z}^{(0)}} \ln(1-p).$$

Le modèle (6) peut être écrit

$$S_{\mathbf{x}}(t) = \exp\{-\exp(\gamma^T \mathbf{z})t\},$$

où $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)^T$, $\gamma_0 = \beta_0 - \ln \theta$, $\gamma_i = \beta_i$, ($i = 1, \dots, m$). La fonction de survie et le taux de pannes de T_{i_j} sont

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}_i}(t) &= \exp\{-\exp(\gamma^T \mathbf{z}^{(i)})t\}, \\ \lambda_{\mathbf{x}_i}(t) &= e^{-\gamma^T \mathbf{z}^{(i)}}. \end{aligned}$$

Notons $X_{ij} = T_{ij} \wedge t_i$, $\delta_{ij} = I(T_{ij} \leq t_i)$. La fonction de vraisemblance

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} [\lambda_{\mathbf{x}_i}(X_{ij})]^{\delta_{ij}} S_{\mathbf{x}_i}(X_{ij}) \\ &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\delta_{ij} \gamma^T \mathbf{z}^{(i)} + e^{\gamma^T \mathbf{z}^{(i)}} X_{ij})\right\}. \end{aligned}$$

Les fonctions score s'écrivent

$$U_l(\gamma) = \frac{\partial \ln L(\gamma)}{\partial \gamma_l} = -\sum_{i=1}^k z_{il} (\delta_i + e^{\gamma^T \mathbf{z}^{(i)}} X_i),$$

où $\delta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij}$, $X_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ et la matrice d'information de Fisher a pour expression :

$$\mathbf{I}(\gamma) = (I_{ls}(\gamma)), \quad (l, s = 0, \dots, m),$$

où

$$\begin{aligned} I_{ls}(\gamma) &= -\mathbf{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln L(\gamma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_s} \right\} = \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^k z_{il} z_{is} e^{\gamma^T \mathbf{z}^{(i)}} X_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k n_i z_{il} z_{is} \left(1 - e^{-e^{\gamma^T \mathbf{z}^{(i)}} t_i} \right). \end{aligned}$$

S'il n'y a pas de censures, i.e. $t_i = \infty$, alors $I_{ls}(\gamma) = \sum_{i=1}^k n_i z_{il} z_{is}$ ne dépend pas de γ .

Notons $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I}(\hat{\gamma})$ la matrice d'information de Fisher estimée.

La loi asymptotique de $\hat{\gamma}$ quand les n_i sont grands est approximée par la loi normale $N(\gamma, \hat{\mathbf{I}}^{-1}(\gamma))$ et donc la loi de

$$\hat{K}_p(\mathbf{x}_0) = \ln \hat{t}_p(\mathbf{x}_0) = -\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)} + \ln(-\ln(1-p))$$

est approximée par la loi normale $N(K_p(\mathbf{x}_0), \sigma_{K_p}^2)$, où

$$\sigma_{K_p}^2 = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m I^{ls}(\gamma) z_{0l} z_{0s},$$

Notons $\hat{\sigma}_{K_p}^2 = \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m I^{ls}(\hat{\gamma}) z_{0l} z_{0s}$.

Donc

$$\frac{\hat{K}_p(\mathbf{x}_0) - K_p(\mathbf{x}_0)}{\hat{\sigma}_{K_p}}$$

est approximée par la loi $N(0, 1)$. L'intervalle approximatif de confiance du niveau $1 - \alpha$ pour $t_p(\mathbf{x}_0)$ est donné par la formule

$$\hat{t}_p(\mathbf{x}_0) \exp\{\pm \hat{\sigma}_{K_p} w_{1-\alpha/2}\}.$$

L'estimateur $\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)$ est aussi une fonction régulière de γ . Notons

$$\hat{Q}_{\mathbf{x}_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)}{1 - \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)} \quad \text{et} \quad Q_{\mathbf{x}_0}(t) = \ln \frac{S_{\mathbf{x}_0}(t)}{1 - S_{\mathbf{x}_0}(t)}.$$

Comme dans le cas du quantile $t_p(\mathbf{x}_0)$ on obtient que la loi de

$$\frac{\hat{Q}_{\mathbf{x}_0}(t) - Q_{\mathbf{x}_0}(t)}{\hat{\sigma}_{Q_0}}$$

peut être approximée par la loi $N(0, 1)$; ici

$$\hat{\sigma}_{Q_0} = -\frac{\ln \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)}{1 - \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)} \sqrt{\sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^m z_{0l} z_{0s} I^{ls}(\hat{\gamma})}.$$

Donc les $(1 - \alpha)$ -intervalles de confiance approximatifs pour $Q_{\mathbf{x}_0}(t)$ et $S_{\mathbf{x}_0}(t)$ sont

$$\hat{Q}_{\mathbf{x}_0}(t) \pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}$$

et

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)}{\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)} \exp\{\pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}\}\right)^{-1}.$$

Si $\hat{\gamma}$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance pour γ , alors

$$\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = \exp\{-e^{\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)}} t\}, \quad \hat{t}_p(\mathbf{x}_0) = -\exp\{-e^{\hat{\gamma}^T \mathbf{z}^{(0)}} \ln(1 - p)\}.$$

Par exemple, dans le cas de modèles d'Arrhénus et de la règle de puissance il faut prendre $z_{il} = 1/x_{il}$ et $z_{il} = \ln x_{il}$ respectivement et on a

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp\{-e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1/x_0} t\}, \quad \hat{S}_{x_0}(t) = \exp\{-e^{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln x_0} t\}$$

respectivement.

3.2. Deuxième plan d'expérience

Supposons qu'on utilise le deuxième plan : le premier groupe d'articles de taille n_1 est testé sous le stress accéléré \mathbf{x}_1 et un échantillon complet (*i.e.* sans censure) $T_{11} \leq \dots \leq T_{1n_1}$ est obtenu, le deuxième groupe de taille n_2 est testé sous le stress

$$\mathbf{x}_2(\tau) = \begin{cases} \mathbf{x}_1, & \text{si } 0 \leq \tau \leq t_1, \\ \mathbf{x}_0, & \text{si } t_1 \leq \tau \leq t_2 \end{cases}$$

et un échantillon censuré du premier type $T_{21} \leq \dots \leq T_{2m_2}$ est obtenu ($m_2 \leq n_2$).

Supposons que

$$S_{\mathbf{x}_0}(t) = S_0((t/\theta)^\alpha),$$

donc le modèle (2) peut être écrit

$$S_{\mathbf{x}(\cdot)}(t) = S_0 \left(\left(\int_0^t r[\mathbf{x}(t)] d\tau / \theta \right)^\alpha \right). \quad (9)$$

Les formules (7)-(9) impliquent que

$$S_{\mathbf{x}_1}(t) = S_0 \left(\left(\frac{rt}{\theta} \right)^\alpha \right), \quad S_{\mathbf{x}_2}(t) = S_0 \left(((r(t_1 \wedge t) + (t - t_1) \vee 0) / \theta)^\alpha \right).$$

Notons

$$\rho = \ln r, \quad \psi = \ln \theta, \quad S(t) = S_0(e^t), \quad f(t) = -S'(t), \quad \lambda(t) = f(t)/S(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}_1}(t) &= S(\alpha(\ln t + \rho - \psi)); \\ S_{\mathbf{x}_2}(t) &= \begin{cases} S(\alpha(\ln t + \rho - \psi)), & t \leq t_1, \\ S(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t - t_1) - \psi)), & t > t_1; \end{cases} \\ f_{\mathbf{x}_1}(t) &= f(\alpha(\ln t + \rho - \psi)) \frac{\alpha}{t}; \\ f_{\mathbf{x}_2}(t) &= \begin{cases} f(\alpha(\ln t + \rho - \psi)) \frac{\alpha}{t}, & t \leq t_1, \\ f(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t - t_1) - \psi)) \frac{\alpha}{e^\rho t_1 + t - t_1}, & t > t_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons r_2 le nombre de pannes du deuxième groupe jusqu'au moment t_1 .

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L = \prod_{j=1}^{n_1} f(\alpha(\ln T_{1j} + \rho - \psi)) \frac{\alpha}{T_{1j}} \prod_{j=1}^{r_2} f(\alpha(\ln T_{2j} + \rho - \psi)) \frac{\alpha}{T_{2j}} \times \\ \prod_{j=r_2+1}^{m_2} f(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1) - \psi)) \frac{\alpha}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} \times \\ S^{n_2 - m_2}(\alpha(\ln(e^\rho t_1 + t_2 - t_1) - \psi)).$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance vérifient le système d'équations

$$U_i(\alpha, \rho, \psi) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Les expressions des fonctions score U_i sont données en annexe.

Si les estimateurs de maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\psi}$ sont obtenus, alors l'estimateurs de la fonction de survie S_{x_0} et du p -quantile $t_p(x_0)$ sont

$$\hat{S}_{x_0}(t) = S(\hat{\alpha}(\ln t - \hat{\psi})), \quad \hat{t}_p = \exp\{\hat{\psi} + \frac{1}{\hat{\alpha}} S^{-1}(1 - p)\}.$$

Dans les cas des lois de Weibull, loglogistique et lognormale

$$S^{-1}(1 - p) = \ln(-\ln(1 - p)); \quad -\ln\left(\frac{1}{p} - 1\right); \quad \Phi^{-1}(p),$$

Φ^{-1} étant l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale standard. Notons $\mathbf{I}(\alpha, \rho, \psi) = (I_{ij}(\alpha, \rho, \psi))$ la (3×3) matrice des dérivés secondes partielles de $\ln L$ par rapport à α , ρ et ψ . Les expressions de I_{ij} sont données en annexe.

Si n est grand, la loi de $(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi})$ peut être approchée par la loi normale de moyenne (α, ρ, ψ) et la matrice de covariance estimée par $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi}) = (I^{ls}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi}))_{3 \times 3}$.

Notons $\hat{Q}_{x_0}(t) = \ln \frac{\hat{S}_{x_0}(t)}{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}$. De la même façon que pour la statistique $\hat{K}_p(x_0)$ dans la Partie 3.1, on peut montrer que la loi de

$$(\hat{Q}_{x_0}(t) - Q_{x_0}(t)) / \hat{\sigma}_{Q_0}(t) \text{ avec } Q_{x_0}(t) = \ln \frac{S_{x_0}(t)}{1 - S_{x_0}(t)}$$

est approchée par la loi normale $N(0, 1)$; ici

$$\hat{\sigma}_{Q_0}(t) = \frac{S'_0(S_0^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t))) S_0^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t))}{\hat{S}_{x_0}(t)(1 - \hat{S}_{x_0}(t))} \times \\ \sqrt{(\ln t - \hat{\psi})^2 I^{11}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi}) - 2\hat{\alpha}(\ln t - \hat{\psi}) I^{13}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi}) + \hat{\alpha}^2 I^{33}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\psi})}.$$

Donc les intervalles de confiance approximatifs de niveau $(1 - \alpha)$ pour $Q_{x_0}(t)$ et $S_{x_0}(t)$ sont $\hat{Q}_{x_0}(t) \pm \hat{\sigma}_{Q_0}(t)w_{1-\alpha/2}$ et

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp\{\pm \hat{\sigma}_{Q_0} w_{1-\alpha/2}\}\right)^{-1},$$

respectivement. Notons $\hat{K}_p(x_0) = \ln \hat{t}_p(x_0) = \hat{\psi} + \frac{1}{\alpha} S^{-1}(1-p)$.

La loi de $(\hat{K}_p(x_0) - K_p(x_0))/\hat{\sigma}_{K_p}$ est approchée par la loi normale $N(0, 1)$; ici

$$\hat{\sigma}_{K_p}^2 = \left(\frac{S^{-1}(1-p)}{\alpha^2}\right)^2 I^{11} - 2\frac{S^{-1}(1-p)}{\alpha^2} I^{13} + I^{33}.$$

Donc les intervalles de confiance approximatifs de niveau $(1 - \alpha)$ pour $K_p(x_0) = \ln t_p(x_0)$ et $t_p(x_0)$ sont

$$\hat{K}_p(x_0) \pm w_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{K_p} \text{ et } \hat{t}_p(x_0) \exp\{\pm \hat{\sigma}_{K_p} w_{1-\alpha/2}\}.$$

4. Estimation semiparamétrique. Premier plan d'expérience

On suppose que le modèle (6) est considéré et la fonction S_{x_0} est inconnue. On considère le premier plan d'expériences. La fonction de survie sous le stress x_i est

$$S_{x_i}(t) = S_{x_0}(e^{\beta^T z_i} t).$$

L'analyse semiparamétrique du modèle SVA dans le cas du premier plan d'expérience a été considérée par Basu et Ebrahimi (1982), Schmoyer (1986, 1991), Sethuraman et Singpurwalla (1982), Shaked et Singpurwalla (1983).

Notons $N_i(\tau)$ le nombre de pannes observées du i -ème groupe dans l'intervalle $[0, \tau]$, $Y_i(\tau)$ le nombre d'unités «à risque» (en état de fonctionnement et non-censurés) avant le moment τ , $T_{i1} \leq \dots \leq T_{im_i}$ les moments de pannes du i -ème groupe et $m_i = N_i(t_i)$. Les variables aléatoires

$$e^{\beta^T z_i} T_{ij} \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m_i)$$

peuvent être considérées comme des pseudo-pannes «observées» dans une expérience

où $n = \sum_{i=1}^k n_i$ unités avec la fonction de survie S_{x_0} ont été testés et $n_i - m_i$ parmi

elles ont été censurées au moment $e^{\beta^T z_i} t_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Alors

$$N^R(\tau, \beta) = \sum_{i=1}^k N_i(e^{-\beta^T z_i} \tau)$$

est le nombre des pannes observées dans l'intervalle $[0, \tau]$ et

$$Y^R(\tau, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^k Y_i(e^{-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i, \tau})$$

est le nombre des unités à risque avant l'instant τ .

La fonction de survie $S_{\mathbf{x}_0}$ peut être « estimée » par l'estimateur de Kaplan-Meier : pour tous $s \leq \max_i \{e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} t_i\}$

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(s, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{\tau \leq s} \left(1 - \frac{\Delta N^R(\tau, \boldsymbol{\beta})}{Y^R(\tau, \boldsymbol{\beta})} \right) = \prod_{\tau \leq s} \left(1 - \frac{\sum_{l=1}^k \Delta N_l(e^{-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_l, \tau})}{\sum_{l=1}^k Y_l(e^{-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_l, \tau})} \right),$$

où

$$\Delta N^R(\tau, \boldsymbol{\beta}) = N^R(\tau, \boldsymbol{\beta}) - N^R(\tau-, \boldsymbol{\beta}), \Delta N_l(u) = N_l(u) - N_l(u-).$$

On écrit \tilde{S}_0 de façon suivante :

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(s, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{(i,j): T_{i,j} \leq \exp\{-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i\} s} \left(1 - \frac{1}{\sum_{l=1}^k Y_l(e^{\boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_l)} T_{i,j})} \right).$$

La fonction de vraisemblance est

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} [\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} T_{i,j}, \boldsymbol{\beta}) - \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} T_{i,j}, \boldsymbol{\beta})] \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}^{n_i - m_i}(e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} t_i, \boldsymbol{\beta}),$$

où

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(u-, \boldsymbol{\beta}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(u - \varepsilon, \boldsymbol{\beta}).$$

Le facteur qui correspond à une panne est le saut de la fonction $\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}$ parce que la densité $f_{\mathbf{x}_0} = -S'_{\mathbf{x}_0}$ est inconnue et peut être approchée dans les points $e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} T_{i,j}$ par un facteur proportionnel à

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} T_{i,j}, \boldsymbol{\beta}) - \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i} T_{i,j}, \boldsymbol{\beta}).$$

Si on a des *ex aequo*, alors on note $T_1^*(\beta) < \dots < T_q^*(\beta)$ les moments différents parmi $\exp\{\beta^T \mathbf{z}_i\} T_{ij}$, d_j – le nombre des pseudopannes au moment $T_j^*(\beta)$. Alors pour tout $s \leq \max_i \{e^{\beta^T \mathbf{z}_i} t_i\}$

$$\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(s, \beta) = \prod_{j: T_j^*(\beta) \leq s} \left(1 - \frac{d_j}{\sum_{l=1}^k Y_l(e^{-\beta^T \mathbf{z}_l} T_j^*(\beta))} \right)$$

et

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^q [\tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(T_{j-1}^*(\beta), \beta) - \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(T_j^*(\beta), \beta)]^{d_j} \prod_{i=1}^k \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}^{m_i - m_i}(e^{\beta^T \mathbf{z}_i} t_i, \beta).$$

Notons

$$\hat{\beta} = \text{Argmax}_{\beta} L(\beta).$$

La fonction de survie sous le stress normal est estimée pour tout

$$s \leq \max_i \{e^{\hat{\beta}^T \mathbf{z}_i} t_i\}$$

par

$$\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(s) = \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(s, \hat{\beta}).$$

Au lieu d'utiliser l'estimations par la méthode de maximum de vraisemblance on peut considérer la méthode des moments modifiée.

Si β est connu, le taux de pannes cumulé $A_{\mathbf{x}_0}(t) = -\ln\{S_{\mathbf{x}_0}(t)\}$ peut être estimé par l'estimateur de Nelson-Aalen :

$$\tilde{A}_{\mathbf{x}_0}(t, \beta) = \int_0^t \frac{dN^R(u)}{Y^R(u)} = \int_0^t \frac{d \sum_{i=1}^k N_i(e^{-\beta^T \mathbf{z}_i} u)}{\sum_{i=1}^k Y_i(e^{-\beta^T \mathbf{z}_i} u)}, \quad t \leq \max\{e^{\beta^T \mathbf{z}_i} t_i\}.$$

L'égalité

$$\mathbf{E} \sum_{i=1}^k \mathbf{z}_i \int_0^{\infty} dN_i(u) - Y_i(u) dA_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T \mathbf{z}_i} u) = 0$$

implique que l'estimateur de β peut être trouvé en considérant la fonction

$$\tilde{U}(\beta) = \sum_{i=1}^k \mathbf{z}_i \int_0^{\infty} dN_i(u) - Y_i(u) d\tilde{A}_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T \mathbf{z}_i} u, \beta). \quad (11)$$

C'est une fonction en escaliers et ces valeurs sont dispersées autour du zéro. L'estimateur de β peut être déterminé comme $\hat{\beta} = \text{Argmin}_{\beta} \{ \tilde{U}(\beta) \}$.

Le choix des poids z_i peut être justifié de façon suivante. Si $A_{\mathbf{x}_0}$ est connue, alors la fonction de vraisemblance pour β est

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_{\mathbf{x}_i}^{\delta_{ij}}(X_{ij}) S_{\mathbf{x}_i}(X_{ij})$$

et donc les fonctions score s'écrivent

$$U_l(\beta) = \frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta_l} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij} z_{il} [1 + e^{\beta^T z_i} X_{ij} \frac{\alpha'_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} X_{ij})}{\alpha_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} X_{ij})} - \alpha_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} X_{ij}) e^{\beta^T z_i} X_{ij}] = \sum_{i=1}^k \int_0^{\infty} W_i(u) (dN_i(u) - Y_i(u) dA_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} u)),$$

où

$$W_{il}(u) = z_{il} \left(1 + e^{\beta^T z_i} u \frac{\alpha'_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} u)}{\alpha_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} u)} \right).$$

Les poids optimaux W_{il} dépendent de la loi de $T_{\mathbf{x}_0}$. Si $T_{\mathbf{x}_0}$ suit la loi de Weibull, alors $W_{il}(u) = z_{il}$.

Notons $U(\beta) = (U_0(\beta), \dots, U_m(\beta))^T$, $W_i(u) = (W_{i0}, \dots, W_{im}(u))$.

Alors

$$\mathbf{U}(\beta) = \sum_i^k \int_0^{\infty} W_i(u) (dN_i(u) - Y_i(u) dA_{\mathbf{x}_0}(e^{\beta^T z_i} u)). \quad (12)$$

Remplaçant dans (12) la fonction inconnue $A_{\mathbf{x}_0}(v)$ par le pseudoestimateur $\tilde{A}_{\mathbf{x}_0}(v, \beta)$ et en prenant des poids $W_{il}(u) = z_{il}$, on obtient la fonction score modifiée $\tilde{U}(\beta)$, donnée par la formule (11).

Le choix de ces poids influence un peu l'efficacité mais pas la validité des procédures inférentielles. Les poids optimaux dépendent de la dérivée du taux de pannes et donc ne peuvent pas être bien estimés quand la loi est inconnue. Donc on utilise les poids les plus simples $W_{il}(u) = z_{il}$ qui sont optimaux comme on vient de dire pour la loi de Weibull.

Après avoir trouvé l'estimateur $\hat{\beta}$ par une des méthodes considérées on obtient un estimateur de la fonction de survie :

$$\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(t, \hat{\beta}) \text{ ou, de façon alternative, } \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = \exp\{-\tilde{A}_0(t, \hat{\beta})\}.$$

5. Estimation nonparamétrique. Deuxième plan d'expérience

Considérons le deuxième plan d'expériences. Le premier groupe d'articles de taille n_1 est testé sous le stress accéléré x_1 et un échantillon complet (sans censure) $T_{11} \leq \dots \leq T_{1n_1}$ est obtenu. Le deuxième groupe de taille n_2 est testé sous le stress x_2 jusqu'à l'instant t_2 et un échantillon censuré $T_{21} \leq \dots \leq T_{2m_2}$ est obtenu ($m_2 \leq n_2$). Notons $N_i(\tau)$ et $Y_i(\tau)$ les nombres de pannes observées dans l'intervalle $[0, \tau]$ et $Y_i(\tau)$ les nombres d'unités «à risque» avant le moment τ du i ème groupe :

$$N_1(\tau) = \sum_{j=1}^{n_1} I(T_{1j} \leq \tau), \quad N_2(\tau) = \sum_{j=1}^{m_2} I(T_{2j} \leq \tau),$$

$$Y_1(\tau) = \sum_{j=1}^{n_1} I(T_{1j} \geq \tau), \quad Y_2(\tau) = \left[\sum_{j=1}^{m_2} I(T_{2j} \geq \tau) + n_2 - m_2 \right] I(\tau \leq t_2).$$

Le modèle (2) implique que

$$S_{x_1}(t) = S_{x_0}(rt), \quad S_{x_2}(t) = S_{x_0}(r(t \wedge t_1) + (t - t_1) \vee 0),$$

où $r = r(x_1)/r(x_0)$. Les instants $R_{ij} = rT_{ij}$ et $R_{2j} = r(T_{2j} \wedge t_1) + (T_{2j} - t_1) \vee 0$ peuvent être interprétés comme les moments de pannes obtenus dans une expérience pendant laquelle $n = n_1 + n_2$ «unités» de fonction de survie S_{x_0} ont été observés et le temps de censure pour les dernières n_2 «unités» a été égal à $(rt_1 + t_2 - t_1)$. Le nombre de pannes, «observées» dans un intervalle $[0, u]$ serait

$$N^R(u) = N_1(u/r) + N_2((u/r) \wedge t_1 + (u - rt_1) \vee 0)$$

le nombre des «unités à risque» étant donné par

$$Y^R(u) = Y_1(u/r) + Y_2((u/r) \wedge t_1 + (u - rt_1) \vee 0).$$

Donc le pseudoestimateur $\tilde{A}_0(s, r)$, dépendant de r , de la fonction de pannes cumulées $A_0(s) = -\ln S_0(s)$ est

$$\tilde{A}_0(s, r) = \int_0^s \frac{dN_1(u/r) + dN_2((u/r) \wedge t_1 + (u - rt_1) \vee 0)}{Y_1(u/r) + Y_2((u/r) \wedge t_1 + (u - rt_1) \vee 0)}$$

et le pseudoestimateur $\tilde{S}_0(s, r)$ de la fonction de survie S_0 est l'estimateur de Kaplan-Meier

$$\tilde{S}_0(s, r) = \prod_{(i,j) \in B(s)} \left(1 - \frac{1}{Y_1(T_{1i}) + Y_2(t_1 \wedge T_{1i} + r((T_{1i} - t_1) \vee 0))} \right) \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{Y_2(T_{2j}) + Y_1(t_1 \wedge T_{2j} + (\frac{T_{2j} - t_1}{r}) \vee 0)} \right),$$

où $B(s) = \{(i, j) \mid rT_{1i} \leq s \text{ et } r(T_{2j} \wedge t_1) + (T_{2j} - t_1) \vee 0 \leq s\}$.

Alors les pseudoestimateurs pour $S_1 = S_{x_1}$ et $S_2 = S_{x_2}$ sont

$$\tilde{S}_1(s, r) = \tilde{S}_0(rs, r), \quad \tilde{S}_2(s) = \tilde{S}_0(r(s \wedge t_1) + (s - t_1) \vee 0, r).$$

La fonction de vraisemblance observée est

$$L(r) = \prod_{i=1}^{n_1} [\tilde{S}_0(rT_{1i-}, r) - \tilde{S}_0(rT_{1i}, r)] \prod_{j=1}^{m_2} [\tilde{S}_0((r(T_{2j} \wedge t_1) + (T_{2j} - t_1) \vee 0)-, r) - \tilde{S}_0(r(T_{2j} \wedge t_1) + (T_{2j} - t_1) \vee 0, r)] [\tilde{S}_0(rt_1 + t - t_1, r)]^{n_2 - m_2}.$$

Considérons la méthode des moments modifiée. De la même façon que dans le cas du premier plan, l'égalité

$$\mathbf{E} \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty x_i(\tau) (dN_i(\tau) - Y_i(\tau) dA_i(t)) = x_1 \mathbf{E} \int_0^\infty (dN_1(\tau) - Y_1(\tau) dA_0(r\tau)) + \mathbf{E} \int_0^\infty x_2(\tau) \{dN_2(\tau) - Y_2(\tau) dA_0(r(\tau \wedge t_1) + (\tau - t_1) \vee 0)\} = 0$$

implique que l'estimateur de r peut être trouvé en considérant la fonction

$$\hat{U}(r) = \frac{1}{x_1 - x_0} \left\{ x_1 \int_0^\infty (dN_1(\tau) - Y_1(\tau) d\tilde{A}_0(r\tau, r)) + \int_0^\infty x_2(\tau) \{dN_2(\tau) - Y_2(\tau) d\tilde{A}_0(r(\tau \wedge t_1) + (\tau - t_1) \vee 0, r)\} \right\}.$$

En utilisant la définition de \tilde{A}_0 on en tire que

$$\hat{U}(r) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Y_2(\tau) dN_1(t_1 + \frac{\tau - t_1}{r}) - Y_1(t_1 + \frac{\tau - t_1}{r}) dN_2(\tau)}{Y_1(t_1 + \frac{\tau - t_1}{r}) + Y_2(\tau)}$$

ou encore

$$\hat{U}(r) = \sum_{j: T_{1j} > t_1} \frac{Y_2(t_1 + r(T_{1j} - t_1))}{Y_1(T_{1j}) + Y_2(t_1 + r(T_{1j} - t_1))} - \sum_{j: T_{2j} > t_1} \frac{Y_1(t_1 + \frac{T_{2j} - t_1}{r})}{Y_1(t_1 + \frac{T_{2j} - t_1}{r}) + Y_2(T_{2j})}.$$

La fonction \hat{U} est décroissante et en escaliers, $\hat{U}(0) > 0$, $\hat{U}(\infty) < 0$ avec probabilité 1.

L'estimateur du paramètre r est donné par

$$\hat{r} = \hat{U}^{-1}(0) = \sup \{r : \hat{U}(r) \geq 0\}.$$

Alors l'estimateur de la fonction cumulée de pannes est

$$\begin{aligned} \hat{A}_0(s) &= \int_0^s \frac{dN_1\left(\frac{u}{\hat{r}}\right) + dN_2\left[\frac{u}{\hat{r}} \wedge t_1 + (u - \hat{r}t_1) \vee 0\right]}{Y_1\left(\frac{u}{\hat{r}}\right) + Y_2\left[\frac{u}{\hat{r}} \wedge t_1 + (u - \hat{r}t_1) \vee 0\right]} \\ &= \sum_{j: T_{1j} \leq \frac{s}{\hat{r}}} \frac{1}{Y_1(T_{1j}) + Y_2[T_{1j} \wedge t_1 + \hat{r}(T_{1j} - t_1) \vee 0]} \\ &\quad + \sum_{j: T_{2j} \leq \frac{s}{\hat{r}} \wedge t_1 + (s - \hat{r}t_1) \vee 0} \frac{1}{Y_1[T_{2j} \wedge t_1 + \frac{T_{2j} - t_1}{\hat{r}} \vee 0] + Y_2(T_{2j})}. \end{aligned}$$

La fonction de survie $S_{\mathbf{x}_0}$ peut être estimée par l'estimateur

$$\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = \tilde{S}_{\mathbf{x}_0}(t, \hat{r}) \text{ ou, de façon alternative, } \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t) = \exp\{-\hat{A}_0(t)\}.$$

Posons $n = n_1 + n_2$ et $a_n = n_1 n_2 / n$. Bagdonavičius et Nikulin (1998b) ont obtenu la variance asymptotique de ces estimateurs. Sous certaines hypothèses ils démontrent que :

$$a_n(\hat{A}_0(t) - A_0(t)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_t^2), \quad a_n(\hat{S}_0(t) - S_0(t)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_t^2 S_0^2(t)),$$

où \xrightarrow{D} correspond à la convergence en loi et où l'expression de σ_t^2 donnée dans Bagdonavičius et Nikulin (1998a) est :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \left(\frac{l_1 t \lambda_0(t) + l_2 (t \wedge (r_0 t_1)) \lambda_0(t \wedge (r_0 t_1 + t_2 - t_1))}{r_0 U'(r_0)} \right)^2 (S_0(t_1) - S_0(r_0 t_1 + t_2 - t_1)) \\ &\quad + l_1 l_2 \left(\frac{l_1 (1 - S_0(t))}{S_0(t)} + \frac{l_2 (1 - S_0(t \wedge (r_0 t_1 + t_2 - t_1)))}{S_0(t \wedge (r_0 t_1 + t_2 - t_1))} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

quand $n_i \rightarrow \infty$, $n_i/n \rightarrow l_i \in (0, 1)$ ($i = 1, 2$); ici $\lambda_0 = \lambda_{\mathbf{x}_0}$, $S_0 = S_{\mathbf{x}_0}$, r_0 est la vraie valeur de r pour le SVA et

$$\begin{aligned} r_0 U'(r_0) &= -(t_2 - t_1) \lambda_0(r_0 t_1 + t_2 - t_1) S_0(r_0 t_1 + t_2 - t_1) \\ &\quad + \int_0^{t_2 - t_1} v \lambda_0(r_0 t_1 + v) dS_0(r_0 t_1 + v). \end{aligned}$$

L'intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1 - \alpha)$ pour $S_{\mathbf{x}_0}(t)$ est :

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)}{\hat{S}_{\mathbf{x}_0}(t)} \exp\{\pm \hat{\sigma}_t w_{1-\alpha/2}\} \right)^{-1},$$

où $\hat{\sigma}_t$ est un estimateur de σ_t obtenu en remplaçant S_0 et λ_0 respectivement par $\hat{S}_0(s)$ et

$$\hat{\lambda}_0(t) = b^{-1} \int_0^\infty K\left(\frac{t-u}{b}\right) d\hat{A}_0(u)$$

dans (13); ici K est un noyau avec une fenêtre de taille b . Par exemple on peut utiliser le noyau d'Epanechnikov :

$$K(x) = 0.75(1 - x^2)\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}.$$

Dans ce cas on a :

$$\hat{\lambda}_0(t) = b^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} \frac{K\left(\frac{t - \hat{r}T_{1j}}{b}\right)}{Y_1(T_{1j}) + Y_2[T_{1j} \wedge t_1 + \hat{r}(T_{1j} - t_1) \vee 0]} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{K\left(\frac{t - \hat{r}(T_{2j} \wedge t_1) + (T_{2j} - t_1) \vee 0}{b}\right)}{Y_1(T_{2j} \wedge t_1 + \frac{T_{2j} - t_1}{\hat{r}} \vee 0) + Y_2(T_{2j})} \right\}.$$

6. Simulations numériques

Nous avons étudié les trois familles de lois introduites dans l'analyse mathématique du modèle SVA : loi de Weibull, loglogistique et lognormale.

Les simulations numériques sont obtenues sur des échantillons de 100 unités ($n_1 = 100$) utilisées sous le stress accéléré x_1 et 100 unités ($n_2 = 100$) utilisées sous le stress en escalier x_2 . Les paramètres des trois lois simulées sont les mêmes : $\alpha = 5$, $\theta = 2000$ et $r = 20$. Dans le cas du deuxième plan d'expériences nous simulons les échantillons et construisons l'estimateur paramétrique (sous la bonne hypothèse) et l'estimateur non paramétrique. Les résultats pour les trois lois (estimations nonparamétriques et estimations paramétrique par maximisation de la vraisemblance notées sur les graphiques MLE ou MV) sont identiques et l'on peut observer que les deux estimateurs sont corrects quelle que soit la loi.

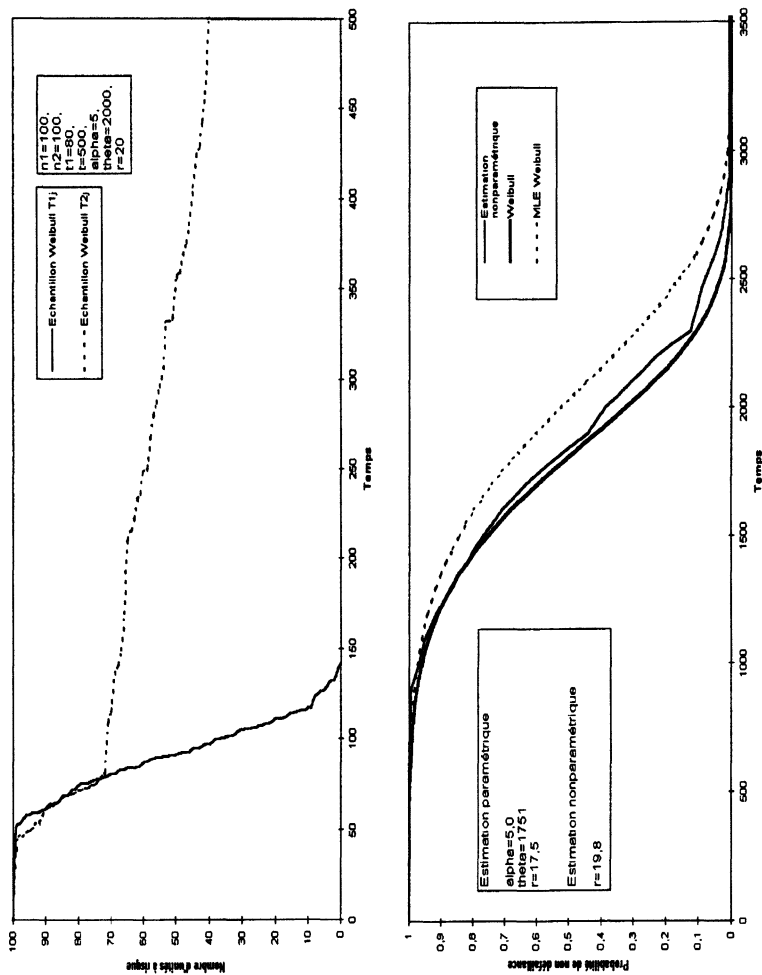


FIGURE 2
Loi de Weibull

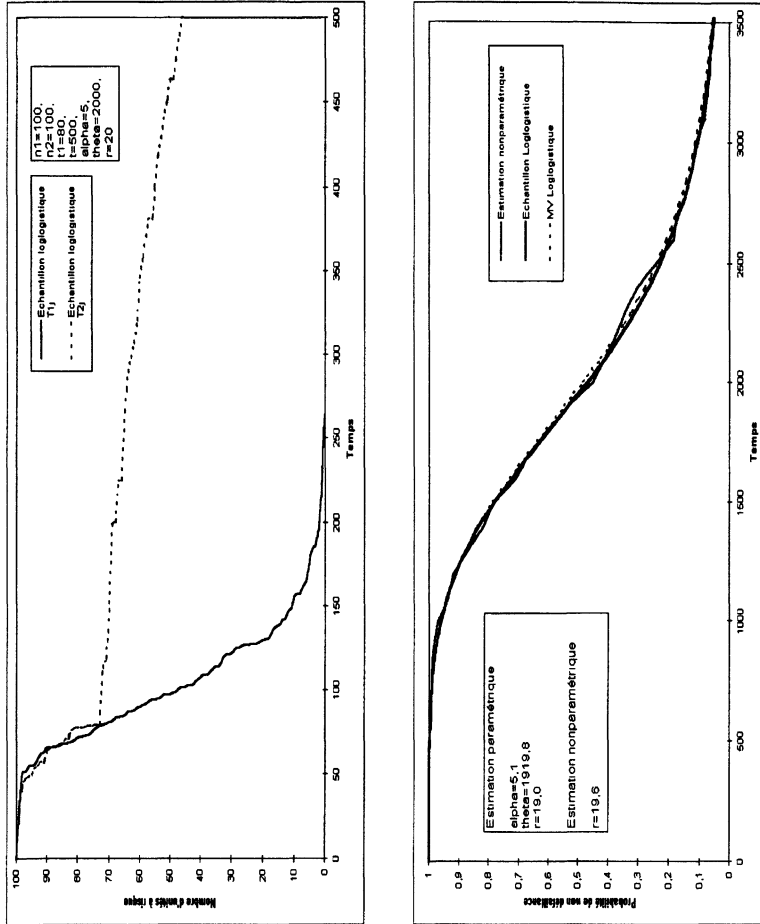


FIGURE 3
Loi log-logistique

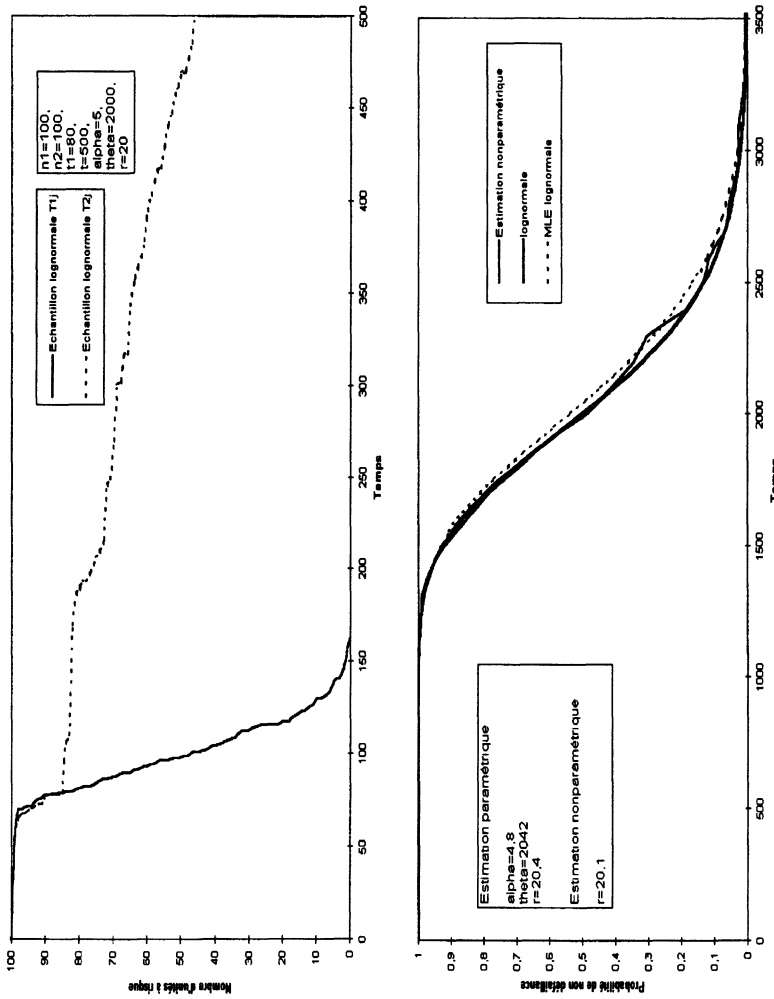


FIGURE 4
Loi lognormale

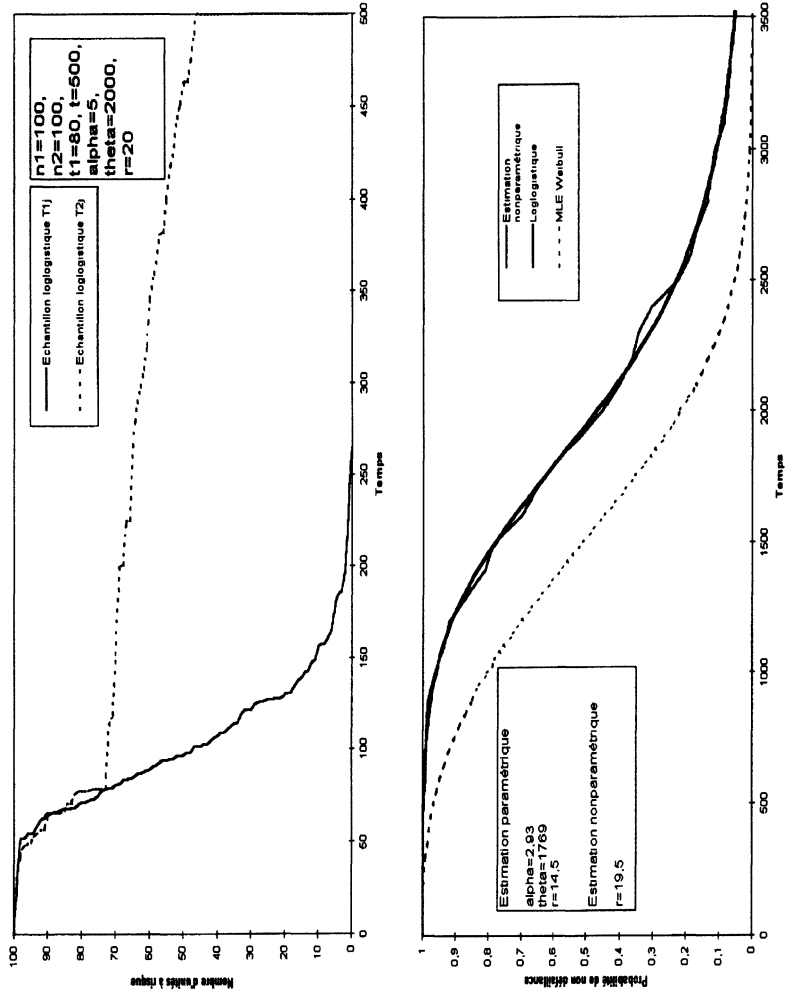


FIGURE 5

Ce n'est pas le cas lorsqu'on fait une mauvaise hypothèse dans le cas paramétrique. Le graphique ci-dessus illustre ce cas (figure 5). La loi des unités est une loi loglogistique et l'hypothèse paramétrique est la loi de Weibull. On voit bien dans ce cas que l'estimateur paramétrique est mauvais alors que l'estimateur non paramétrique reste bien évidemment correct.

Dans le cas de petits échantillons il est assez difficile de comparer les variances des deux estimateurs d'un point de vue théorique, mais il paraît nécessaire d'avoir une idée de la variance de ces deux estimateurs dans les conditions de ces simulations. Nous avons alors généré une vingtaine d'échantillons de la loi de Weibull et construit les estimateurs paramétriques et non paramétriques correspondants. Les variabilités semblent proches.

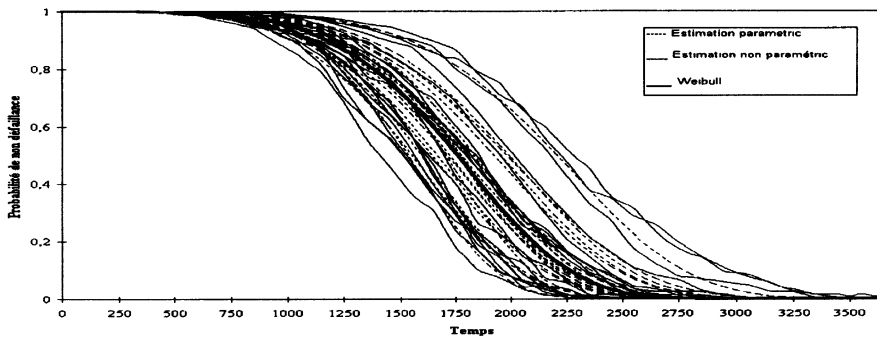


FIGURE 6

Remerciements

Les auteurs adressent leurs remerciements les plus sincères à Pierre Cazes, Catherine Hubert et aux Réferees pour leurs conseils et leurs participations à la clarté de cet article.

Bibliographie

- ANDERSEN P.K., BORGAN D., GILL R.D., KEIDING N. (1993), *Stochastic Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, N.Y.
- BAGDONAVIČIUS V. (1978), *Testing the hypothesis of the additive accumulation of damages*. *Probab. Theory and its Appl.*, **23**, No. 2, pp. 403-408.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1994), *Stochastic models in accelerated life*, *Advanced Topics in Stochastic Modeling*, (Eds : J. Gutierrez, M. Valderrama), World Scientific, Singapore, pp. 73-87.

- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1995), Semiparametric models in accelerated life testing, Queen's papers in pure and applied mathematics, **98**, Canada, 70 p.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1997), *Transfer functional and semiparametric regression models*, Biometrika, **84**, No. 2, pp. 365-378.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1998), *Model Building in Accelerated Experiments*, In : Statistical and Probabilistic Models in Reliability, Birkhauser, Boston (Eds : D. Ionescu, N. Limnios).
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1998a), Additive and multiplicative semiparametric models in accelerated live testing and survival analysis. Queen's papers in pure and applied mathematics, **108**, Canada, 109 p.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1998b), *On semiparametric estimation of reliability from accelerated life data*, Statistical and Probabilistic Models in Reliability (Eds : Ionescu D., Limnios N.) Birkhauser, pp. 75-89.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (1999), *Accelerated Life Models*, Preprint 9907, Statistique Mathématique, UFR M12S, Université Victor Ségalen Bordeaux 2.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (2000a), *On Nonparametric Estimation in Accelerated Experiments with Step-Stresses*, Statistics, **33**, pp. 349-365.
- BAGDONAVIČIUS V., NIKULIN M. (2000b), *Semiparametric Estimation in Accelerated Life Testing*, Recent Advances in Reliability Theory (Eds. Limnios N., Nikulin M.), Birkhauser, pp. 405-418.
- BASU A.P., EBRAHIMI N. (1982), *Nonparametric accelerated life testing*, IEEE Trans. on Reliability, **31**, pp. 432-435.
- CHAOUKI F., GERVILLE-RÉACHE L., NIKOULINA V. (1999), *Analyse statistique d'un modèle de vie accélérée*, Proceeding des XXXI^{ème} journées de statistique, Grenoble, France, pp. 821-824.
- COX D.R., OAKES D., (1984), *Analysis of survival Data*, Chapman & Hall, London, 201 p.
- ESCOBAR L.A., MEEKER W.Q. (1995). *Planning accelerated life tests with two or more experimental factors*, Technometrics, **37**, N°4, pp. 411-427.
- GERVILLE-RÉACHE L., NIKOULINA V. (1998), *Analysis of reliability characteristics estimators in accelerated life testing*, Statistical and Probabilistic Models in Reliability (Eds : Ionescu D., Limnios N.) Birkhauser, pp. 91-99.
- GERVILLE-RÉACHE L., NIKOULINA V. (2000), *About Accelerated Life Testing under the Generalized Linear Proportional Hazards Model Assumption*, Bordeaux-MMR'2000, Abstract's Book, v.1, pp. 447-450.
- GREENWOOD P.E., NIKULIN M. (1996), *A Guide to Chi-Squared Testing*, J. Wiley and Sons, N.Y. 280 p.
- LIN D.Y., YING Z. (1995), *Semiparametric inference for the accelerated life model with time dependent covariates*, Journal of Statistical Planning and Inference, **44**, pp. 47-63.

- MEEKER W.Q., ESCOBAR L.A. (1993), *A Review of Recent Research and Current Issue in Accelerated Testing*, International Statistical Review, **61**, N1, pp. 147-168.
- MEEKER W.Q., ESCOBAR L.A. (1998), *Pitfalls of Accelerated Testing*, ITEE Transaction on Reliability, **47**, No. 2, pp. 114-118.
- MEEKER W.Q., LUVALLE M.J. (1995), *An Accelerated life test model based on reliability kinetics*, Technometrics, **37**, N°2, pp. 133-146.
- NELSON W. (1990), *Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plan and Data Analysis*, John Wiley & Sons, N.Y., 601 p.
- NELSON W., MEEKER W.Q. (1978), *Theory for optimum accelerated censored life tests for weibull and extreme value distribution*. Technometrics, **20**, N°2, pp. 171-177.
- SCHABE H., VIERTL R. (1995), *An axiomatic approach to models of accelerated life testing*, Engineering Fracture Mechanics, **50**, N°2, pp. 203-217.
- SCHMOYER R. (1986), *An exact distribution-free analysis for accelerated life testing at several levels of a single stress*, Technometrics, **28**, No 2, pp. 165-175.
- SCHMOYER R. (1991), *Nonparametric analysis for two-level single-stress accelerated life tests*, Technometrics, **33**, pp. 175-186.
- SETHURAMAN J., SINGPURWALLA N.D. (1982), *Testing of hypotheses for distributions in accelerated life tests*, JASA, **77**, pp. 204-208.
- SHAKED M., SINGPURWALLA N.D. (1983), *Inference for step-stress accelerated life tests*, J. Statist. Plann. Inference, **7**, pp. 295-306.
- SINGPURWALLA N.D. (1973a), *Inference from accelerated life tests when observations are obtained from censored samples.*, Technometrics, **13**, pp. 161-170.
- SINGPURWALLA N.D. (1973b), *Inference from accelerated life tests using arrhenius type re-parametrisations.*, Technometrics, **15**, 2, pp. 289-299.
- VIERTL R. (1988), *Statistical methods in accelerated life testing*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 134 p.
- VOINOV V., NIKULIN M. (1993), *Unbiased Estimators and Their Applications*, Vol. 1 : Univariate Case, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Annexe

Les expressions des fonctions score U_i (voir § 3.2) sont les suivantes :

$$U_1(\alpha, \rho, \psi) = \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)'(c(T_{1j})) \frac{c(T_{1j})}{\alpha} + \frac{n_1 + m_2}{\alpha} + \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)'(c(T_{2j})) \frac{c(T_{2j})}{\alpha} + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)'(d(T_{2j})) \frac{d(T_{2j})}{\alpha} - (n_2 - m_2) \lambda(d(t_2)) \frac{d(t_2)}{\alpha},$$

$$\begin{aligned}
U_2(\alpha, \rho, \psi) &= \frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)'(c(T_{1j}))\alpha + \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)'(c(T_{2j}))\alpha \\
&\quad + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)'(d(T_{2j})) \frac{\alpha e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} \\
&\quad - \sum_{j=r_2+1}^{m_2} \frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} - (n_2 - m_2)\lambda(d(t_2)) \frac{\alpha e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + t_2 - t_1}, \\
U_3(\alpha, \rho, \psi) &= \frac{\partial \ln L}{\partial \psi} = -\alpha \left[\sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)'(c(T_{1j})) + \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)'(c(T_{2j})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)'(d(T_{2j})) - (n_2 - m_2)\lambda(d(t_2)) \right],
\end{aligned}$$

où $c(u) = \alpha(\ln u + \rho - \psi)$, $d(u) = \alpha(\ln(e^\rho t_1 + u - t_1) - \psi)$.

Les expressions des fonctions I_{ij} (voir § 3.2) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
I_{11} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j})) [c(T_{1j})]^2 - n_1 - m_2 \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j})) [c(T_{2j})]^2 + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j})) [d(T_{2j})]^2 \\
&\quad \left. - (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2)) [d(t_2)]^2 \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} = I_{21} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \rho} = -\sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j})) c(T_{1j}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j})) c(T_{2j}) \\
&\quad - \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j})) d(T_{2j}) \frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} \\
&\quad + (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2)) d(t_2) \frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + t_2 - t_1} \\
&\quad - \frac{1}{\alpha} U_2(\alpha, \rho, \psi) - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=r_2+1}^{m_2} \frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} = I_{31} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \psi} = \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j}))c(T_{1j}) \\
&+ \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j}))c(T_{2j}) + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j}))d(T_{2j}) \\
&- (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2))d(t_2) - \frac{1}{\alpha}U_3(\alpha, \rho, \psi), \\
I_{22} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \rho^2} = -\alpha^2 \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j})) \\
&- \alpha^2 \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j})) - \alpha^2 \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j})) \left(\frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} \right)^2 \\
&- \sum_{j=r_2+1}^{m_2} [\alpha (\ln f)'(d(T_{2j})) - 1] \frac{e^\rho t_1 (T_{2j} - t_1)}{(e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1)^2} \\
&+ (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2)) \left(\frac{\alpha e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + t_2 - t_1} \right)^2 \\
&+ (n_2 - m_2)\lambda(d(t_2)) \frac{\alpha e^\rho t_1 (t_2 - t_1)}{(e^\rho t_1 + t_2 - t_1)^2}, \\
I_{23} = I_{32} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \rho \partial \psi} = \alpha^2 \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j})) \right. \\
&+ \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j})) + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j})) \frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1 + T_{2j} - t_1} \\
&\left. - (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2)) \frac{e^\rho t_1}{(e^\rho t_1 + t_2 - t_1)} \right\}, \\
I_{33} &= -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \psi^2} = -\alpha^2 \left[\sum_{j=1}^{n_1} (\ln f)''(c(T_{1j})) + \sum_{j=1}^{r_2} (\ln f)''(c(T_{2j})) \right. \\
&\left. + \sum_{j=r_2+1}^{m_2} (\ln f)''(d(T_{2j})) - (n_2 - m_2)\lambda'(d(t_2)) \right].
\end{aligned}$$

Dans les cas des lois de Weibull, loglogistique et lognormale

$$(\ln f)''(t) = -e^t; \frac{-2e^t}{(1+e^t)^2}; -1,$$

respectivement, et

$$\lambda'(t) = e^t; \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; -t \frac{\varphi(t)}{1-\Phi(t)} + \left(\frac{\varphi(t)}{1-\Phi(t)} \right)^2,$$

respectivement.