

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. LETERME

A. VAN HOECKE

**Étude des risques d'erreur de décision (risques client et fournisseur) lors de contrôles unitaires de produits en fonction de l'aptitude du procédé de fabrication et de l'aptitude du moyen de mesure**

*Revue de statistique appliquée*, tome 41, n° 3 (1993), p. 85-91

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1993\\_\\_41\\_3\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1993__41_3_85_0)

© Société française de statistique, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ÉTUDE DES RISQUES D'ERREUR DE DÉCISION  
(RISQUES CLIENT ET FOURNISSEUR)  
LORS DE CONTRÔLES UNITAIRES DE PRODUITS  
EN FONCTION DE L'APTITUDE DU PROCÉDÉ  
DE FABRICATION ET DE L'APTITUDE  
DU MOYEN DE MESURE**

F. Leterme, A. Van Hoecke

*TELEMECANIQUE* Direction Centrale de la Qualité  
33 bis Avenue du Maréchal JOFFRE BP 204  
92002 NANTERRE CEDEX

**RÉSUMÉ**

Cet article quantifie les deux risques d'erreur de décision (risque client et risque fournisseur) lors du contrôle unitaire de produits en fonction de l'aptitude du procédé de fabrication et du moyen de contrôle. On y démontre que ces risques sont très sensibles à la qualité des deux procédés concernés : procédé de fabrication et procédé de mesure, mais restent acceptables lorsque les exigences minimales de qualification de ces procédés sont respectées.

**Mots clés :** *risque client, risque fournisseur, aptitude du procédé, aptitude du moyen de contrôle*

**SUMMARY**

This paper quantifies the two risks of error in decision (producer's and consumer's risks) during 100 % inspection as a function of the capabilities of the manufacturing process and the inspection mean. One shows that these risks are very responsive to the quality of the two processes involved : manufacturing process and measurement process, but remain acceptable when the minimum qualification requirements are met.

**Key Words :** *consumer's risk, producer's risk, process capability, repeatability and reproducibility (R & R) of measurement system.*

**1. Introduction**

Dans de nombreuses industries manufacturières de grande série (électronique, électricité, électro-ménager, automobile,...) la dernière opération réalisée sur les

lignes de production est couramment un contrôle unitaire (souvent automatisé) des caractéristiques fonctionnelles de chaque unité produite.

Compte tenu du fait que le produit, à ce stade, est terminé et prêt à être livré, il est intéressant de connaître précisément les risques d'erreur de décision dans l'opération de contrôle :

- Risque qu'un produit non conforme soit déclaré «bon» :

Risque client =  $R_c$  qui influencera directement le taux de retour clientèle ou le taux de clients insatisfaits.

- Risque qu'un produit conforme soit déclaré «mauvais» :

Risque fournisseur =  $R_f$  qui influencera directement le taux de refus et de retouche interne à l'entreprise.

C'est l'objet de cette étude.

Les risques d'erreur de décision lors du contrôle ont été quantifiés en fonction de :

- $Cpk$  = Indice d'aptitude du procédé.
- $Camc$  = Indice d'aptitude du moyen de contrôle (par mesure).

## 2. Hypothèses

- Les distributions de la production et des mesures sont Normales.

– Le moyen de mesure est correctement étalonné, de sorte que l'erreur de justesse peut être négligée.

– La production est distribuée selon  $N(m, \sigma_v)$  où  $\sigma_v$  est l'écart-type «vrai» du procédé (et rien que du procédé), sans aucune composante liée à la variabilité des mesures.

– Les mesures sont distribuées selon  $N(0, \sigma_f)$  où  $\sigma_f$  est l'écart-type global de fidélité de la mesure.  $\sigma_f$  peut avoir plusieurs composantes.

- La variabilité du procédé, estimée au travers des mesures, est caractérisée par

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_f^2}$$

- Les indices d'aptitude sont :

- pour le moyen de contrôle :  $Camc = \frac{IT}{6\sigma_f} = \frac{TS - TI}{6\sigma_f}$
- pour le procédé de fabrication :  $Cap = \frac{IT}{6\sigma_p}$

$$Cpk = \text{Min}\left(\frac{TS - m}{3\sigma_p}; \frac{m - TI}{3\sigma_p}\right)$$

où  $TS$  = limite supérieure de tolérance

$TI$  = limite inférieure de tolérance

$IT$  = intervalle de tolérance =  $TS - TI$

On peut aussi définir

$Cpk_v = \text{Min}\left(\frac{TS - m}{3\sigma_v}, \frac{m - TI}{3\sigma_v}\right)$  qui est l'aptitude «réelle» du procédé, sans aucune composante liée à la dispersion des mesures nécessaires pour estimer cette aptitude.

### 3. Formulation

Nous nous placerons dans le cas unilatéral : nous n'étudierons le risque que par rapport à une seule limite de tolérance. S'il y a lieu ( $Cap$  insuffisant), le risque total (bilatéral) sera obtenu par la somme des 2 risques unilatéraux.

– Le risque du client est le risque de se voir livrer un produit intrinsèquement non conforme mais accepté par le moyen de contrôle :  $R_c = \beta$ .

– Le risque du fournisseur est de refuser, au travers de la mesure, un produit intrinsèquement conforme :  $R_f = \alpha$ .

Si l'on appelle :

Evènement  $A = 1$  produit est intrinsèquement conforme

Evènement non  $A = 1$  produit est intrinsèquement non conforme

Evènement  $B = 1$  produit est déclaré conforme par la mesure

Evènement non  $B = 1$  produit est déclaré non conforme par la mesure.

Alors :

$$\begin{aligned} R_c = \beta &= P(B \cap \text{non}A) \\ &= P(B/\text{non}A) \times P(\text{non}A) \\ R_f = \alpha &= P(\text{non}B \cap A) \\ &= P(\text{non}B/A) \times P(A) \end{aligned}$$

La méthode de calcul de ces risques est développée ci-après pour le risque client.

– Soit  $X$  la variable aléatoire représentant la distribution intrinsèque de la production pour une caractéristique donnée.

$X$  suit une distribution gaussienne  $N(m, \sigma_v)$ . Sa densité de probabilité s'écrit

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m}{\sigma_v}\right)^2\right)$$

➤ Nous nous plaçons dans le cas unilatéral et nous n'étudions la conformité des produits que par rapport à une seule limite de tolérance,  $T$ , par exemple.

Nous pouvons donc écrire :

$$\text{Probabilité (1 produit est intrinsèquement conforme)} = P(A) = \int_{T_i}^{+\infty} N(x)dx$$

$$\text{et } P(\text{non}A) = \int_{-\infty}^{T_i} N(x)dx = 1 - P(A)$$

Ces 2 probabilités dépendent, bien sûr, de la position de  $m$  par rapport à  $T_i$  et de  $\sigma_v$ .

– La mesure transforme chaque valeur  $x$  de  $X$  en une valeur  $z$  telle que  $z = x + y$  où  $y$  est une valeur d'une variable aléatoire  $Y$  représentant la distribution de la mesure.  $Y$  suit une distribution gaussienne  $N(o, \sigma_f)$  de densité de probabilité égale à

$$M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_f} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_f}\right)^2\right)$$

Nous pouvons donc écrire

Probabilité ( $x$  soit déclaré conforme/ $x$  est fixé et intrinsèquement non conforme)

$$= \int_{T_i-x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_f} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_f}\right)^2\right) dy = \int_{T_i-x}^{+\infty} M(y)dy$$

Elle dépend de la distance relative entre  $x$  et  $T_i$  (Si, par exemple,  $x$  est égal à  $T_i$ , elle vaut 0,5; ce qui tombe dans le sens puisque le produit a alors une chance sur 2 d'être déclaré conforme (ou non conforme)).

Le risque client  $R_c = \beta = P(B/\text{non}A) \times P(\text{non}A)$

$$\int_{-\infty}^{T_i} \int_{T_i-x}^{+\infty} M(y)N(x)dydx$$

Cette équation n'étant pas aisément intégrable, nous avons donc procédé par calcul numérique, sur les bases décrites ci-dessus.

On obtient le risque fournisseur par un raisonnement analogue. Ce risque s'écrit

$$R_f = \alpha = \int_{T_i}^{+\infty} \int_{-\infty}^{T_i-x} M(y)N(x)dydx$$

#### 4. Etude du risque client

Les résultats des calculs sont présentés dans le tableau 1 en annexe en fonction de :

– la distance entre la moyenne de la production et la limite de tolérance considérée, exprimée en écarts-types «vrais» de la production ( $\sigma_v$ ), i.e. en fonction de la quantité  $(m - T_i)/\sigma_v$ ,

– l'indice d'aptitude du moyen de mesure.

On s'intéresse généralement à la distance entre la moyenne et la plus proche limite, pour laquelle on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \text{Distance entre la moyenne et la plus proche limite} &= 3 \times Cpk_v \times \sigma_v \text{ par définition} \\ &= 3 \times Cpk \times \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\lambda^2}} \times \sigma_v \\ &= 3 \times Cpk \times Z \times \sigma_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \lambda &= \frac{\sigma_p}{\sigma_f} = \frac{\text{écart - type observé du procédé}}{\text{écart - type de fidélité du moyen de mesure}} \\ \text{et } Z &= \frac{Cpk_v}{Cpk} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\lambda^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Le coefficient  $Z$  permet d'exprimer facilement la distance entre la moyenne et la limite de tolérance considérée en termes de  $\sigma_v$ .

### Exemple

On s'intéresse à une caractéristique tolérancée :  $12^{\pm 0,10}$ .

L'étude du procédé a montré que celui-ci était stable,

avec pour moyenne  $m = 11,955$

et pour écart-type  $\sigma_p = 0,018$  d'où  $Cpk = 1,02$

L'étude d'aptitude du banc de contrôle final unitaire de cette caractéristique avait montré que l'écart-type de fidélité était de  $0,008 = \sigma_f$  et que l'étalonnage était correct d'où  $C_{amc} = 4,17 \simeq 4$ .

On en déduit que  $\frac{\sigma_p}{\sigma_f} = 2,25 = \lambda$

d'où d'après (1)  $Z = 1,12$ .

On en déduit : distance entre la moyenne et la tolérance inférieure

$$= 3 \times Cpk \times Z \times \sigma_v = 3 \times 1,02 \times 1,12 \sigma_v = 3,43 \sigma_v \simeq 3,5 \sigma_v$$

Le tableau 1 de l'annexe nous indique à l'intersection de la colonne 3,5 et de la ligne 4 la valeur 0,0052 %.

Le risque de déclarer conforme, à tort, un produit inférieur à la tolérance inférieure, donc de l'accepter est de 5 pour 100 000.

*Nota* : Le risque d'accepter, à tort, un produit hors tolérance supérieure est quasi nul.

## 5. Risque fournisseur

Les résultats des calculs sont présentés dans le tableau 2 en annexe, de la même façon que pour le risque client.

Avec les chiffres de l'exemple précédent on trouve :  $R_f = 0.016 \%$ .

Le risque de déclarer, à tort, qu'un produit conforme est inférieur à la tolérance inférieure, donc de le refuser est de 16 pour 100 000.

## 6. Valeurs remarquables des risques client et fournisseur

Les valeurs des risques globaux (bilatéraux) client et fournisseur pour quelques valeurs remarquables de  $C_{ap}$  et  $C_{pk}$  sont données dans le tableau ci-dessous, pour un  $C_{amc} = 4$  qui est l'exigence minimale en matière d'aptitude d'un moyen de contrôle d'après les recommandations de la norme française NF E 02-204.

| $C_{pk}$ | 0,8                                | 1,0  | 1,33                                  |
|----------|------------------------------------|--|---------------------------------------|
| $C_{ap}$ |                                    |  |                                       |
| 0,8      | $R_c = 0.28 \%$<br>$R_f = 0.62 \%$ |  |                                       |
| 1,0      | $R_c = 0.13 \%$<br>$R_f = 0.30 \%$ | <b><math>R_c = 0.046 \%</math></b><br><b><math>R_f = 0.126 \%</math></b> |                                       |
| 1,33     | $R_c = 0.11 \%$<br>$R_f = 0.26 \%$ | $R_c = 0.02 \%$<br>$R_f = 0.05 \%$                                       | $R_c = 0.0005 \%$<br>$R_f = 0.002 \%$ |

On constate qu'avec un moyen de contrôle «apte» et un procédé lui aussi apte, les risques d'erreur sont tout à fait acceptables.

## 7. Conclusion

Cette étude a permis de quantifier les 2 risques d'erreur de décision lors du contrôle de produits :

- risque d'accepter un produit non conforme : risque client =  $R_c$
- risque de refuser un produit conforme : risque fournisseur =  $R_f$

Le risque fournisseur est toujours supérieur au risque client.

Dans les pires conditions étudiées (la moyenne de la production est à cheval sur une des limites de tolérance et la dispersion de mesure est égale à l'intervalle de tolérance de la caractéristique mesurée) les risques observés sont de l'ordre de 13 %.

Les risques d'erreur sont très sensibles à l'aptitude du procédé de fabrication et à l'aptitude du moyen de mesure, ce qui est une raison supplémentaire pour chercher à disposer de moyens de production et de contrôle performants. Dans les conditions

minimales de qualification typiques :  $C_{amc} = 4$  et  $C_{pk} = 1$  les risques sont :  $R_c = 0,046\%$  et  $R_f = 0,126\%$ , ce qui est correct.

Le niveau des risques observés montre qu'il n'est pas justifiable d'inspecter 2 fois les produits jugés non conformes (ni d'inspecter 2 fois ceux qui sont jugés conformes!).

**Annexe**

TABLEAU 1  
Valeurs du risque client unilatéral  $R_c$  (en %)

| $R_c$ (%) |    | Distance, exprimée en écart-type vrai ( $\sigma_v$ ) du procédé, entre la moyenne de la production et la limite de tolérance considérée |        |        |        |       |       |       |      |       |       |
|-----------|----|---|--------|--------|--------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
|           |    | 4   | 3.5    | 3      | 2.5    | 2     | 1.5   | 1     | 0.5  | 0.25  | 0     |
| $C_{amc}$ | 1  | 0.00127   | 0.0092 | 0.052  | 0.232  | 0.83  | 2.3   | 5.06  | 8.88 | 10.83 | 12.5  |
|           | 2  | 0.00105   | 0.0074 | 0.0411 | 0.178  | 0.62  | 1.65  | 3.46  | 5.69 | 6.68  | 7.39  |
|           | 4  | 0.00076   | 0.0052 | 0.0281 | 0.118  | 0.4   | 1.03  | 2.06  | 3.22 | 3.66  | 3.92  |
|           | 10 | 0.0004  | 0.0026 | 0.0137 | 0.0559 | 0.177 | 0.439 | 0.846 | 1.27 | 1.42  | 1.589 |

TABLEAU 2  
Valeurs du risque fournisseur unilatéral  $R_f$  (en %)

| $R_f$ (%) |    | Distance, exprimée en écart-type vrai ( $\sigma_v$ ) du procédé, entre la moyenne de la production et la limite de tolérance considérée |        |        |        |       |       |       |       |       |       |
|-----------|----|---|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|           |    | 4   | 3.5    | 3      | 2.5    | 2     | 1.5   | 1     | 0.5   | 0.25  | 0     |
| $C_{amc}$ | 1  | 0.232   | 0.653  | 1.61   | 3.47   | 6.42  | 10.06 | 13.16 | 14.21 | 13.68 | 12.5  |
|           | 2  | 0.0153  | 0.0717 | 0.272  | 0.829  | 2.03  | 3.96  | 6.15  | 7.57  | 7.7   | 7.39  |
|           | 4  | 0.00283   | 0.0164 | 0.0747 | 0.266  | 0.746 | 1.63  | 2.79  | 3.74  | 3.95  | 3.92  |
|           | 10 | 0.0007  | 0.0044 | 0.0215 | 0.0823 | 0.245 | 0.568 | 1.027 | 1.447 | 1.564 | 1.589 |