

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. MAURIN

## À propos de la modélisation des niveaux de bruit

*Revue de statistique appliquée*, tome 39, n° 2 (1991), p. 69-74

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1991\\_\\_39\\_2\\_69\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1991__39_2_69_0)

© Société française de statistique, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## A PROPOS DE LA MODÉLISATION DES NIVEAUX DE BRUIT

M. MAURIN

*Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité,  
Laboratoire Energie Nuisances, (INRETS-LEN), case 24,  
69675 Bron Cedex*

### RÉSUMÉ

L'hypothèse que les niveaux de bruit au voisinage d'un axe routier sont gaussiens est courante en Acoustique. Dans cette note nous reprenons la modélisation des niveaux de bruit à l'aide des processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), il est montré que la normalité postulée est une conséquence du modèle dans une grande classe de PAIS.

**Mots-clés :** PAIS, fonctions caractéristiques, acoustique routière, niveaux de bruit équivalents (Leq).

### SUMMARY

Noise levels measured near by roads and motorways are commonly supposed Gaussian in environmental acoustics. Here we use a recent model of noise levels based upon stochastic processes with independent and stationary increments (Lévy Khintchine), and show that in a large class of such processes the normality of noise levels is a consequence of the model.

**Key-words :** Processes with independent and stationary increments, characteristics function, road traffic noise, noise equivalent levels

### Introduction

Dans un article initial (Bastide, 1988) il est apparu une modélisation très intéressante des niveaux de bruit équivalents (en abrégé Leq), lesquels sont en pratique les niveaux mesurés par des sonomètres intégrateurs. Pour cela l'auteur pose les hypothèses (M) d'un modèle qui correspond en substance à la notion de processus à accroissements indépendants et homogène (le processus) dans le temps. Cette présentation nous est apparue originale et porteuse de nouveauté, mais elle est en quelque sorte gachée par la présence d'une hypothèse complémentaire qui énonce que les niveaux de bruit suivent une loi normale. A l'inverse des hypothèses (M) l'hypothèse de normalité fait partie de la routine acoustique en milieu routier ou en milieu professionnel.

Dans un premier temps nous avons discuté et contesté cette hypothèse complémentaire au modèle (M), (Maurin, 1989). En l'occurrence il est montré que l'hypothèse complémentaire est inutile puisque on arrive aux mêmes résultats d'échantillonnage avec ou sans cette hypothèse, et souligné en même temps qu'une telle conclusion ne doit pas masquer le grand mérite du modèle (M) qui permet de mener une discussion simple à propos de l'hypothèse gaussienne.

Ci-contre nous poursuivons la discussion, il est montré que dans une grande classe de processus à accroissements indépendants homogènes dans le temps «l'hypothèse» en question n'est autre qu'une conséquence du modèle. C'est donc le statut de la propriété de normalité qui est clarifié; au-lieu d'être une hypothèse de départ dans un modèle cette propriété se révèle être une conclusion des autres hypothèses du modèle en question; au passage ceci permet de comprendre aussi pourquoi la normalité a priori est inutile (!).

## 1. Un bref rappel d'acoustique

En tout point de l'espace il y a un niveau de bruit instantané  $L(t)$  qui peut être considéré comme un processus stochastique. En fait le signal physique proprement dit est lié à la variation de la pression acoustique<sup>1</sup> au carré  $p(t)^2$ ; mais comme cette quantité prend ses valeurs dans un domaine extrêmement étendu, il est d'usage de considérer le «niveau» de pression au carré  $(p(t)/p_0)^2$  rapporté à une pression de référence  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa, et de définir par convention le niveau de bruit en décibel par la formule  $L(t) = 10 \log (p(t)/p_0)^2$ ; de la sorte les niveaux de bruit ont des valeurs numériques comprises entre 20 et 100 environ. En pratique les niveaux de bruit mesurés sont des niveaux moyens équivalents  $Leq$  sur des durées  $\Delta t$  dont la formule de définition est la suivante :

$$10^{Leq/10} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} 10^{L(t)/10} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} (p(t)/p_0)^2 dt.$$

En suivant Bastide nous posons  $V(t) = 10^{L(t)/10} = (p(t)/p_0)^2$  la puissance acoustique rayonnée, ce qui donne

$$Leq_{\Delta t} = 10 \log \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} V(t) dt \right\} = 10 \log \left\{ \Delta \int V / \Delta t \right\}.$$

## 2. La modélisation des niveaux équivalents

**2.1** L'originalité du modèle (M) tient dans la modélisation de l'intégrale de la puissance  $V(t)$ , par opposition à une modélisation de  $p(t), p(t)^2, L(t) \dots$ , et au vu de la définition des  $Leq$  il ne semble pas du tout contre indiqué de chercher à les modéliser par l'intermédiaire des accroissements  $\Delta \int V$ .

Nous prenons ici un modèle un peu plus général que (M) en posant que  $\int V dt$  est un processus à accroissements indépendants et homogène dans le temps

<sup>1</sup> il s'agit d'une surpression locale de l'air autour de la pression atmosphérique.

(Cox Miller, 1965), également appelé un processus à accroissements indépendants et stationnaires ou PAIS (Bouleau, 1988), (noter que dans la première désignation ce sont les processus qui sont homogènes tandis que dans la seconde ce sont les accroissements qui sont stationnaires). Puisque nous devons considérer le logarithme des accroissements cela nous restreint aux PAIS positifs  $X_t$ , et puisque ce sont les  $\Delta \int V/\Delta t$  qui interviennent dans la définition des Leq nous sommes conduits à étudier les processus moyens  $X_t/t$ .

**2.2** Un PAIS immédiat est le processus de Bachelier-Wiener  $X_t$  dans lequel  $X_t$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(Kt, \sigma_M^2 t)$ , auquel cas tout accroissement  $\Delta X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(K\Delta t, \sigma_M^2 \Delta t)$ ,  $X_t/t$  suit la loi  $\mathcal{N}(K, \sigma_M^2/t)$  et  $\Delta X/\Delta t$  la loi  $\mathcal{N}(K, \sigma_M^2/\Delta t)$ . Ce modèle présente par construction des propriétés de normalité triviales, mais même avec une constante  $K$  positive et un  $K/\sigma_M$  élevé il ne peut en toute rigueur convenir à l'acoustique car il ne conduit pas à des accroissements uniquement positifs.

**2.3** La classe générale des PAIS est décrite par la forme de Lévy-Khintchine (Feller, 1971); il faut noter que c'est uniquement dans le processus de Bachelier-Wiener que les trajectoires sont continues presque sûrement et que dans les autres PAIS les trajectoires sont seulement continues en probabilité.

a) Nous considérons un processus de Poisson  $N_t$  d'intensité  $q$ , tel que par construction sur toute période  $\Delta t$  le nombre d'évènements suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(q\Delta t)$ , et une suite  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  de variables aléatoires (v.a.) indépendantes qui suivent une loi commune. Le processus  $X_t$  somme d'un nombre  $N_t$  de v.a. à l'instant  $t$  est un PAIS, positif si le support de la loi de  $U$  est positif; la fonction caractéristique de la loi de  $X_t$  est  $\Phi_{X_t} = \exp\{qt(\Phi_U(z) - 1)\}$ , en posant  $\Phi_U(z)$  la fonction caractéristique de la loi de  $U$  (Bouleau, 1988, Cox Miller, 1965).

*Lemme 1* : Si la loi de  $U$  possède des moments jusqu'à l'ordre 2, (espérance  $m_u$ , variance  $\sigma_u^2, m_{u2} = m_u^2 + \sigma_u^2$ ), la distribution de  $X_t/t$  converge en loi vers la loi normale de moyenne  $qm_u$  et de variance  $qm_{u2}/t$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En effet la fonction caractéristique  $\Phi_{X_t/t}(z)$  de l'accroissement moyen est donnée par l'expression  $\Phi_{X_t}(z/t) = \exp\{qt(\Phi_U(z/t) - 1)\}$ , et la fonction caractéristique  $\Phi_U(z)$  est de la forme  $1 + im_u z - m_{u2} z^2/2 + o(z^2)$  au voisinage de l'origine pour  $z$  (Renyi, 1966). On en déduit que

$$\begin{aligned} \Phi_U(z/t) - 1 &= im_u z/t - m_{u2} z^2/2t^2 + o(1/t^2) \\ qt\{\Phi_U(z/t) - 1\} &= iqm_u z - qm_{u2} z^2/2t + o(1/t) \end{aligned}$$

et que  $iqm_u z - qm_{u2} z^2/2t$  est la limite uniforme en  $z$  de  $qt\{\Phi_U(z/t) - 1\}$ ; c'est le logarithme de la fonction caractéristique de la loi normale de moyenne  $qm_u$  et de variance  $qm_{u2}/t$ . ■

*Remarque* : l'existence de  $m_u$  et  $m_{u2}$  entraîne aussi que la loi de  $X_t$  a pour premiers moments  $E(X_t) = qtm_u$  et  $\text{var}(X_t) = qtm_{u2}$ ; c'est donc également une

condition suffisante pour souscrire au modèle (M) qui pose que  $E(\Delta \int V) = K\Delta t$  et  $\text{var}(\Delta \int V) = \sigma_M^2 \Delta t$  (Bastide, 1988).

b) dans une généralisation immédiate nous considérons une somme finie de  $H$  processus de Poisson d'intensités  $q_h$  avec des v.a. respectives  $U_h$  dont les lois possèdent toutes des moments d'ordre 2 et les fonctions caractéristiques sont notées  $\Phi_{U_h}(z)$ . La fonction caractéristique  $\Phi_{X_t}(z)$  du processus  $X_t$  somme totale des v.a. est donnée par l'expression  $\exp\{t \sum q_h (\Phi_{U_h}(z) - 1)\}$ .

Le Lemme précédent s'applique, la distribution de  $X_t/t$  converge en loi vers la loi normale de moyenne  $\sum q_h m_{u_h}$  et de variance  $\sum q_h m_{u_h 2}/t$ .

Pour des applications en acoustique on peut particulariser des supports  $[A_h B_h]$  avec  $A_h > 0$  pour certaines lois  $U_h$  en vue d'introduire des «bruits impulsifs».

c) la forme générale des PAIS positifs  $X_t$  est donnée avec une mesure de Lévy  $d\Pi(u)$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \inf(u, 1) d\Pi(u)$  est définie; dans ces conditions la fonction caractéristique de la loi de  $X_t$  est donnée par l'expression  $\Phi_{X_t}(z) = \exp\left\{t \int_0^{+\infty} (e^{iuz} - 1) d\Pi(u)\right\}$  (Bouleau, 1988).

*Lemme 2* : Si  $E_0 = \int_0^{+\infty} d\Pi(u)$  et  $E_2 = \int_0^{+\infty} u^2 d\Pi(u)$  existent pour la mesure de Lévy du PAIS positif  $X_t$ , la distribution de  $X_t/t$  converge en loi vers la loi normale d'espérance  $E_1 = \int_0^{+\infty} u d\Pi(u)$  et de variance  $E_2/t$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En effet les existences de  $E_0$  et de  $E_2$  entraînent celle de  $E_1$ ; la fonction caractéristique de la loi de  $X_t/t$  est donnée par  $\Phi_{X_t/t}(z) = \exp\left\{t \int_0^{+\infty} (e^{iuz/t} - 1) d\Pi(u)\right\}$  que l'on peut mettre sous la forme  $\exp\left\{t \int_0^{+\infty} e^{iuz/t} d\Pi(u) - tE_0\right\}$  avec  $t \int_0^{+\infty} e^{iuz/t} d\Pi(u) = tE_0 + izE_1 - \frac{z^2}{2t} E_2 + o\left(\frac{1}{t}\right)$ ; le logarithme de  $\Phi_{X_t/t}(z)$  converge uniformément vers  $izE_1 - z^2 E_2/2t$  lorsque  $t$  tend vers plus l'infini, à savoir le logarithme de la fonction caractéristique de la loi normale d'espérance  $E_1$  et de variance  $E_2/t$ . ■

*Remarques* : l'existence de  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$  est également une condition suffisante pour souscrire au modèle (M) puisque la transformée de Fourier de la mesure de Lévy  $d\Pi(u)$  est deux fois dérivable à l'origine,  $\text{Log } \Phi_{X_t}(z)$  également, et que les deux premiers moments de  $X_t$  sont de la forme demandée  $E(X_t) = tE_1$ ,  $\text{var}(X_t) = tE_2$ .

– avec de telles hypothèses  $X_t$  est un PAIS positif du deuxième ordre.

### 2.4 Exemples

a) la mesure  $d\Pi(u) = u^{-3/2} du$  qui conduit au processus stable unilatéral d'ordre 1/2 (Bouleau, 1988) ne convient pas puisque ni  $E_0$  ni  $E_1$  ne sont définis;

b) les mesures gamma  $d\Pi(u) = \lambda^a e^{-\lambda u} u^{a-1} / \Gamma(a) du$  pour les paramètres  $a$  et  $\lambda$  positifs conviennent et donnent les valeurs  $E_0 = 1$ ,  $E_1 = a/\lambda$ ,  $E_2 = a(a+1)/\lambda^2 = E_1^2(1+1/a)$ ;

c) les mesures log-normales  $d\Pi(u) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Log } u - m}{\tau}\right)^2} / \tau u \sqrt{2\pi} du$  pour les paramètres  $\tau$  positif et  $m$  conviennent et donnent les valeurs  $E_0 = 1$ ,  $E_1 = e^m e^{\tau^2/2}$ ,  $E_2 = e^{2m} e^{2\tau^2} = E_1^2 e^{\tau^2}$ .

### 3. Retour aux préoccupations acoustiques

La loi de  $L_{\Delta t}$  est l'image de celle de  $\Delta \int V/\Delta t$  par l'application  $10 \log(\cdot) = (10/\text{Log } 10)\text{Log}(\cdot)$  ou encore  $1/c \text{Log}(\cdot)$  avec  $c = 1/10 \text{Log } 10$ .

La normalité est une «préoccupation» habituelle en acoustique, mais en l'occurrence elle concerne les niveaux  $L_{\Delta t} = 1/c \text{Log}(\Delta \int V/\Delta t)$  et non pas les incréments moyens  $\Delta \int V/\Delta t$ , alors que les Lemmes 1 et 2 s'appliquent à la distribution de  $\Delta \int V/\Delta t$ . Souvent d'ailleurs cette propriété de normalité constitue un postulat, implicite ou non, à leur sujet. La propriété suivante permet de rapprocher les propriétés de normalité de  $X_t/t$  et celles de  $\text{Log } X_t/t$ .

*Lemme 3* : Soit  $X$  une v.a. qui suit une log-normale, la loi de  $X$  converge vers une loi normale quand la variance de  $X$  tend vers zéro (Johnson Kotz, 1970). ■

*Remarque* : on connaît les moments d'une loi log-normale  $X$  en fonction des moments d'ordre 1 et 2 de la loi normale  $Y$  image par le logarithme,  $Y = \text{Log } X$  (Calot, 1973, Johnson Kotz, 1970), d'où les formules donnant les premiers moments centrés de  $X$  :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E_x^2[\exp(\sigma_y^2) - 1] \\ \mu_{3x} &= \sigma_x^3[\exp(\sigma_y^2) - 1]^{1/2}[\exp(\sigma_y^2) + 2] \\ \mu_{4x} &= \sigma_x^4[\exp(4\sigma_y^2) + 2\exp(3\sigma_y^2) + 3\exp(2\sigma_y^2) - 3]. \end{aligned}$$

Le lemme 3 est à rapprocher du fait que lorsque  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  tendent simultanément vers zéro,  $\mu_{3x}$  tend vers zéro et  $\mu_{4x}$  vers  $3\sigma_x^4$ .

Par conséquent toute loi de v.a.  $X'$  qui converge vers une loi normale d'espérance positive et dont la variance tend vers zéro converge aussi vers une loi log-normale, et la loi de la v.a. transformée  $Y' = \text{Log } X'$  converge donc vers une loi normale (avec également une variance qui tend vers zéro). C'est précisément le cas des niveaux de bruit équivalents  $\text{Leq}_{\Delta t}$  dans les PAIS ci-dessus ; lorsque la durée de la mesure  $\Delta t$  augmente, la loi de  $\Delta \int V/\Delta t$  qui converge vers une loi normale d'espérance positive et de variance en  $1/\Delta t$  (Lemmes 1 et 2)

converge vers une loi log-normale (Lemme 3), et par conséquent la loi des niveaux  $10 \log(\Delta \int V/\Delta t)$  converge vers une loi normale <sup>2</sup>. Un tel résultat a le mérite de clarifier l'apparence de normalité attachée aux niveaux Leq, la normalité est une conséquence asymptotique dans une classe de modèles avec PAIS, et l'apparence qui en résulte a pu faire ériger la normalité elle-même en hypothèse.

Cependant la discussion montre un renversement complet du statut de la normalité des niveaux de bruit, au-lieu d'intervenir comme une prétendue hypothèse elle se révèle être une conséquence dans la classe de modèles PAIS positifs du second ordre pour l'intégrale de la puissance rayonnée. Nous retrouvons en dernier les conclusions de la note précédente, d'une part l'hypothèse de normalité est inutile dans les modèles de PAIS positifs pour l'intégrale de la puissance acoustique puisque c'en est une conclusion; d'autre part la manière aussi simple avec laquelle la discussion peut être menée est à porter au crédit de cette classe de modèles. Les PAIS positifs du second ordre jouent un grand rôle dans cette application aux signaux acoustiques routiers et dans la clarification du statut d'une propriété importante.

### Références

- BASTIDE J.C., (1988), Estimation et mesure du niveau acoustique continu équivalent, *Revue de Statistique Appliquée*, vol. XXXVI n°3, pages 5-14.
- BOULEAU N., (1988), *Processus stochastiques et applications*, Hermann.
- CALOT G., (1973), *Cours de statistique descriptive*, Dunod.
- COX D.R., MILLER H.D., (1965), *The theory of stochastic processes*, Chapman and Hall.
- FELLER W., (1971), *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, 2ème édition, J. Wiley.
- JOHNSON N.L., KOTZ S., (1970), *Continuous univariate distributions – vol. 1*, J. Wiley.
- MAURIN M., (1989), Note sur l'article de Bastide J.C., *Revue de Statistique Appliquée*, vol. XXXVII n°4, pages 83-87.
- RENYI A., (1966), *Calcul des Probabilités*, Dunod.

---

<sup>2</sup> les constantes de temps Impulse, Fast et Slow des sonomètres sont respectivement égales à 35, 125 et 1000 (anciennement 250) millisecondes; dans la pratique les enregistrements de «Leq courts» des sonomètres intégrateurs s'étalent sur des durées de l'ordre de la seconde, de quelques secondes, de la minute, de 5 minutes et au-delà...