

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

PATRICK LYONNET

Estimation de la fonction de répartition de défaillances à partir d'une itération loi uniforme/loi de Weibull

Revue de statistique appliquée, tome 39, n° 2 (1991), p. 59-68

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1991__39_2_59_0

© Société française de statistique, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

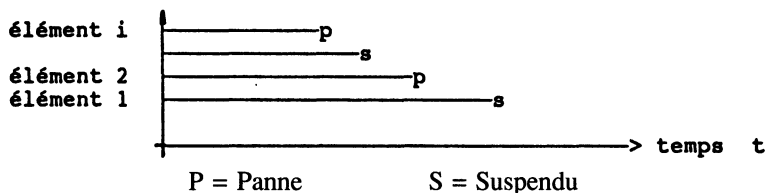
ESTIMATION DE LA FONCTION DE RÉPARTITION DE DÉFAILLANCES A PARTIR D'UNE ITÉRATION LOI UNIFORME/LOI DE WEIBULL

Patrick LYONNET

Université de Compiègne, Professeur d'ENSAM à l'ENISE

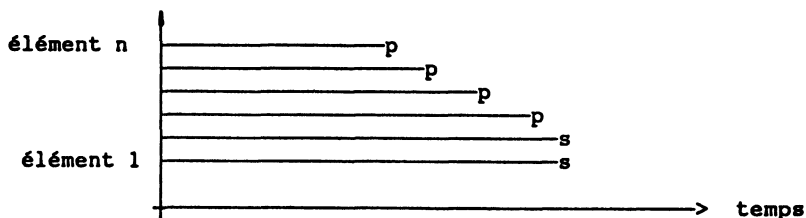
I. Introduction

Dans le cadre d'études de fiabilité ou de maintenance préventive, on cherche souvent à modéliser le comportement du matériel par une loi mathématique de type loi de Weibull. Cette modélisation s'établit généralement à l'aide d'un échantillon obtenu à partir des défaillances. L'échantillon le plus couramment rencontré est du type censuré multiple à droite, voir figure ci-après. :



Les éléments suspendus le sont naturellement par le fait que l'observation cesse à un instant où des systèmes fonctionnent encore d'une part et d'autres éléments ont été mis en fonctionnement dans des périodes différentes, et de ce fait, ne totalisent pas le même nombre d'heures d'utilisation.

Notons également que le cas de censurées simples à droite est un cas particulier de celui-ci.



2. Rappels de statistique et de fiabilité

$R(t)$ = Fonction fiabilité : représente la probabilité de fonctionnement à l'instant t

$F(t)$ = Fonction cumulée de défaillances

$$F(t) + R(t) = 1$$

Loi de Weibull

$$R(t) = e^{-((t-\gamma)/\eta)^\beta}$$

γ = paramètre de décalage d'origine (dimension d'un temps)

η = paramètre d'échelle (dimension d'un temps).

β = paramètre de forme (sans dimension)

L'estimation de la fonction de défaillance cumulée se fait suivant la méthode des rangs médians avec la formule suivante :

$$F(t) = \frac{ni - 0,3}{N + 0,4}$$

où : N = Nombre d'éléments observés défaillants plus suspendus

ni = Rang de la défaillance survenant à l'instant t

(c'est l'élément que nous nous proposons de calculer).

3. Position du problème d'estimation de " $F(t)$ " avec des données censurées multiples à droite

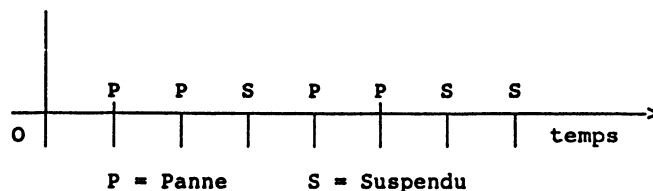
Hypothèse :

On ne prend en compte que les 1^{ères} défaillances.

Le matériel appartient à la même famille.

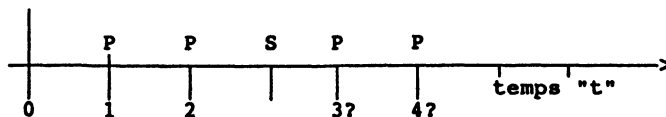
Après classement des défaillances par ordre croissant, on s'aperçoit que l'on a des éléments qui ne sont pas tombés en panne et qui ne totalisent pas un nombre d'heures de fonctionnement aussi grand que le dernier défaillant.

On se trouve donc avec une configuration des éléments classés par ordre croissant qui a l'allure suivante :



Les éléments suspendus ne sont pas pris en compte, mais viennent modifier le rang des défaillants qui se trouvent après eux. On est amené à se poser la question :

Comment sont modifiés les rangs des défaillants après suspension ?



4. Méthode proposée par JOHNSON

Pour les deux premiers, le rang est déterminé sans difficulté ; c'est un rang certain, ici 1 et 2.

Par contre, pour les 3ème et 4ème défaillances on peut dire que cela dépend de la fin de durée de vie du suspendu.

Nous constatons :

"S" peut être défaillant entre 2 et 3 (évènement a)

"S" peut être défaillant entre 3 et 4 (évènement b)

"S" peut être défaillant après 4 (évènement c)

Hypothèse (interprétation probabiliste)

On considère que ces trois éventualités sont équiprobables (méthode de Johnson). De ce fait, il en découle que :

- le rang "3" peut être donné à la défaillance "3" avec une probabilité de P (3ème déf. ait le rang "3") = $P(b) + P(c) = 2/3$

Parce que :

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \quad \text{d'où} \quad P(a) = P(b) = P(c) = 1/3$$

- le rang "4" peut être donné à la 3ème défaillance avec une probabilité de :

$$P(3\text{ème défaillance ait le rang } 4) = P(a) = 1/3$$

Ainsi, si on veut estimer l'ordre moyen de la défaillance, on dira que :

$$\text{Rang moyen } 3^{\text{o}} \text{ déf.} = 3.2/3 + 4.1/3 = 3,33$$

On fera le même type de démarche pour les défaillants suivants :

Ainsi,

$$\text{Rang moyen } 4\text{ème défaillance} = 4.1/3 + 5 \times 2/3 = 4,66$$

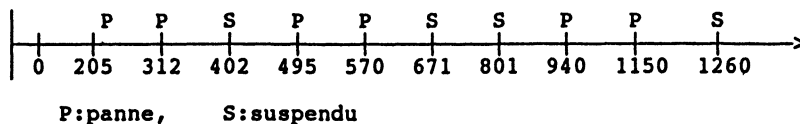
Cette approche "Rang moyen" conduit à modifier le rang du suivant lorsqu'il y a un suspendu. Ce qui se résume par la formule de Johnson qui permet de calculer l'incrément à donner au rang suivant lorsque l'on se trouve dans cette situation.

FORMULE DE JOHNSON

$$I = \frac{N + 1 - \text{Ordre de la défaillance précédente}}{1 + \text{Nombre d'individus vivants après le dernier suspendu du groupe}}$$

Exemple

On a la séquence suivante :



Le classement par ordre croissant est le suivant :

TBF	Evénement censuré panne	Incrément	Rang...	$F(t)$ rangs médiants
205	P	1	1	6.73 %
312	P	1	2	16.34 %
402	S	Calcul de I1	—	—
495	P	I1=1.125	3.125	27.16 %
570	P	I1=1.125	4.25	37.98 %
671	S	Calcul de I2	—	—
801	S	""	—	—
940	P	I2=1.6875	5.9375	54.206 %
1150	P	I2=1.6875	7.625	70.432 %
1260	S			—

$$I1 = \frac{10 + 1 - 2}{1 + 7} = 1.125$$

$$I2 = \frac{10 + 1 - 4.25}{1 + 3} = 1.6875$$

Si on modélise par une loi de Weibull (β, η) , le résultat est :

$$R(t) = e^{-(t/860)^{1.8}}$$

Remarques au sujet de la méthode de Johnson

1) Si on a deux échantillons sensiblement identiques, où seul le temps d'un suspendu diffère de peu avec l'autre échantillon, les rangs obtenus avec la formule de Johnson peuvent être très différents.

2) Cette méthode ne tient pas compte de la distance séparant le suspendu du défaillant suivant, pour estimer “l’ordre moyen” des éléments.

3) Elle ne tient pas compte de la forme de la distribution des pannes pour estimer “l’ordre moyen”.

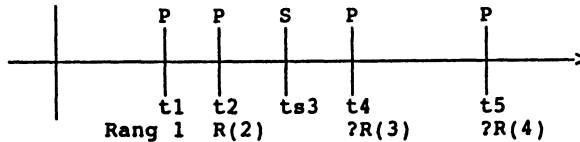
5. Méthodes d’estimation du rang tenant compte du temps séparant les défaillances et les suspendus (Modélisation selon une loi uniforme, extrapolation linéaire)

Hypothèses

- identiques à celles de Johnson avec en plus, la détermination de la probabilité qu’un élément suspendu à t_s tombe en panne à t (avec $t > t_s$) proportionnelle à la différence $(t - t_s)$.

- le temps le plus long est le temps du dernier élément suspendu ou défaillant.

Ainsi, pour la séquence suivante :



Pour le 3ème défaillant, le rang n'est pas déterminé car il y a eu un suspendu.

Prob. (3ème déf. ait le rang 3) = $P(s_3 \text{ soit déf. après } t_4)$

$$= P(t_3 > t_4)$$

en désignant par t_3 l'instant de défaillance de S .

Si on fait l'hypothèse que la défaillance du suspendu obéit à une loi uniforme sur $[t_{s3}, t_5]$, alors ;

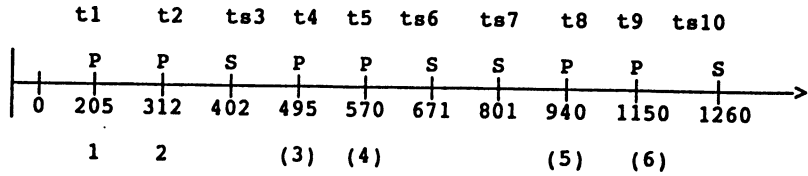
$$\text{Prob (3ème déf. ait le rang 3)} = \frac{t_5 - t_4}{t_5 - t_{s3}}$$

de même :

$$\text{Prob. (3ème déf. ait le rang 4)} = P(t_3 < t_4) = \frac{t_4 - t_{s3}}{t_5 - t_{s3}}$$

En fait, on suppose que la défaillance du suspendu suit une loi uniforme sur un intervalle $(t_{s3}, t_5 + D)$ de longueur supérieure à $t_5 - t_{s3}$ d'une quantité D qu'on prend en général égal à l'intervalle moyen entre défaillants (ici : $(t_5 - t_1)/3$).

Appliquons la méthode à l'exemple précédent :



Pour la 3ème défaillance (3) :

$$\text{Prob (3ème déf. ait le rang 3)} = \frac{D + ts_{10} - t_4}{D + ts_{10} - ts_3}$$

$$\text{avec } D = \frac{1260 - 205}{6} = 176$$

$$\text{d'où prob. (3ème déf. ait le rang 3)} = \frac{1436 - 495}{1436 - 402} = 0,91$$

$$\text{Prob. (3ème déf. ait le rang 4)} = \frac{t_4 - ts_3}{D + t_{10} - ts_3} = 0,09$$

Le rang moyen sera :

$$E(3\text{ème déf}) = 3P_{(3)} + 4P_{(4)}$$

$$= 3 \cdot 0,91 + 4 \cdot 0,09$$

$$= 3,09 \text{ au lieu de } 3,125 \text{ avec la méthode de Johnson.}$$

Pour la 4ème défaillance : P(4ème déf. ait le 4ème rang) =

$$\frac{D + ts_{10} - t_5}{D + ts_{10} - ts_3} = \frac{1436 - 570}{1436 - 402} = 0,84$$

$$P(4\text{ème déf. ait le rang 5}) = 0,16$$

d'où

Ordre moyen de la 4ème défaillance :

$$E(4\text{ème déf.}) = 4 \cdot 0,84 + 5 \cdot 0,16 = 4,16$$

au lieu de 4,25 (méthode de Johnson).

Pour la 5ème défaillance, posons :

$$p_3 = \frac{D + ts_{10} - t_8}{D + ts_{10} - ts_3} = \text{Prob. (3ème censure ait une déf. après } t_8)$$

$$p_6 = \frac{D + ts_{10} - t_8}{D + ts_{10} - ts_6} = \text{Prob. (6ème censure ait une déf. après } t_8).$$

$$p_7 = \frac{D + ts_{10} - t_8}{D + ts_{10} - ts_7} = \text{Prob. (7ème censure ait une déf. après } t_8).$$

$$q_3 = 1 - p_3; \quad q_6 = 1 - p_6; \quad q_7 = 1 - p_7$$

On a alors :

$$\text{Pr (5ème défaillance ait le rang 5)} = p_3 p_6 p_7$$

$$\text{Pr (5ème défaillance ait le rang 6)} = q_3 p_6 p_7 + p_3 q_6 p_7 + p_3 p_6 q_7$$

$$\text{Pr (5ème défaillance ait le rang 7)} = p_3 q_6 q_7 + q_3 p_6 q_7 + q_3 q_6 p_7$$

$$\text{Pr (5ème défaillance ait le rang 8)} = q_3 q_6 q_7$$

Compte tenu de ce que :

$$p_3 = \frac{1436 - 940}{1436 - 402} = 0,480 \quad p_6 = \frac{1436 - 940}{1436 - 671} = 0,648.$$

$$p_7 = \frac{1436 - 940}{1436 - 801} = 0,781$$

les probabilités que la 5ème défaillance ait les rang 5, 6, 7, 8 sont respectivement égales à 0,2429; 0,4633; 0,2537; 0,0401;

d'où le rang moyen de la cinquième défaillance :

$$\begin{aligned} E(5\text{ème déf.}) &= 5 \times 0,2429 + 6 \times 0,4633 + 7 \times 0,2537 + 8 \times 0,0401 \\ &= 6,091. \end{aligned}$$

On calculerait de façon similaire le rang moyen de la sixième et dernière défaillance.

Conclusion

D'une part, cette méthode tient compte des temps séparant deux défaillances consécutives; si cette distance est grande, la probabilité qu'une défaillance des éléments censurés apparaisse dans cet intervalle est grande. En ce sens, elle paraît plus performante que la méthode de Johnson.

D'autre part, le modèle utilisé précédemment dans le calcul des probabilités des défaillances pour les éléments censurés est une loi uniforme. Ceci n'est pas tout à fait satisfaisant, mais offre l'avantage d'être calculable sans recherche de paramètre de loi.

Amélioration dans une seconde phase avec le modèle de Weibull

Une meilleure estimation de la modélisation de la probabilité de défaillance des éléments censurés consiste à prendre pour modèle une loi s'approchant le plus possible de la réalité (Loi de Weib (η, β, γ) par exemple), au lieu de la loi uniforme.

Seulement, il est nécessaire de connaître les paramètres β, γ, η que nous sommes justement en train de chercher.

La méthode proposée devra donc tenir compte de ce problème, et procéder par itération.

*Recherche des rangs dans le cas des censures multiples en utilisant une itération
- Loi uniforme / Loi de Weibull*

1ère étape

Dans un premier temps, on veut modéliser une loi approximant la loi de défaillances. On utilise donc pour estimer les rangs des éléments après censures, une distribution uniforme jusqu'au dernier élément fonctionnant, ou la méthode de Johnson.

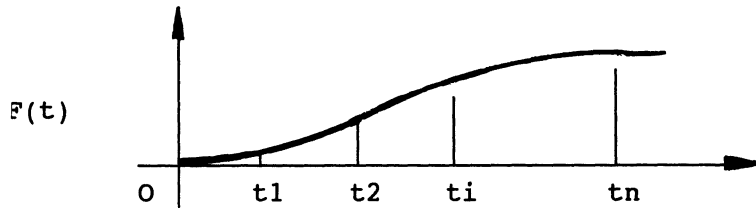
2ème étape

On détermine la fonction de répartition puis les paramètres η , β , γ .

3ème étape

La loi de défaillances $F(t) = 1 - R(t)$ nous permet de déterminer la probabilité de défaillance des éléments censurés, et ainsi de mieux estimer l'ordre des défaillances.

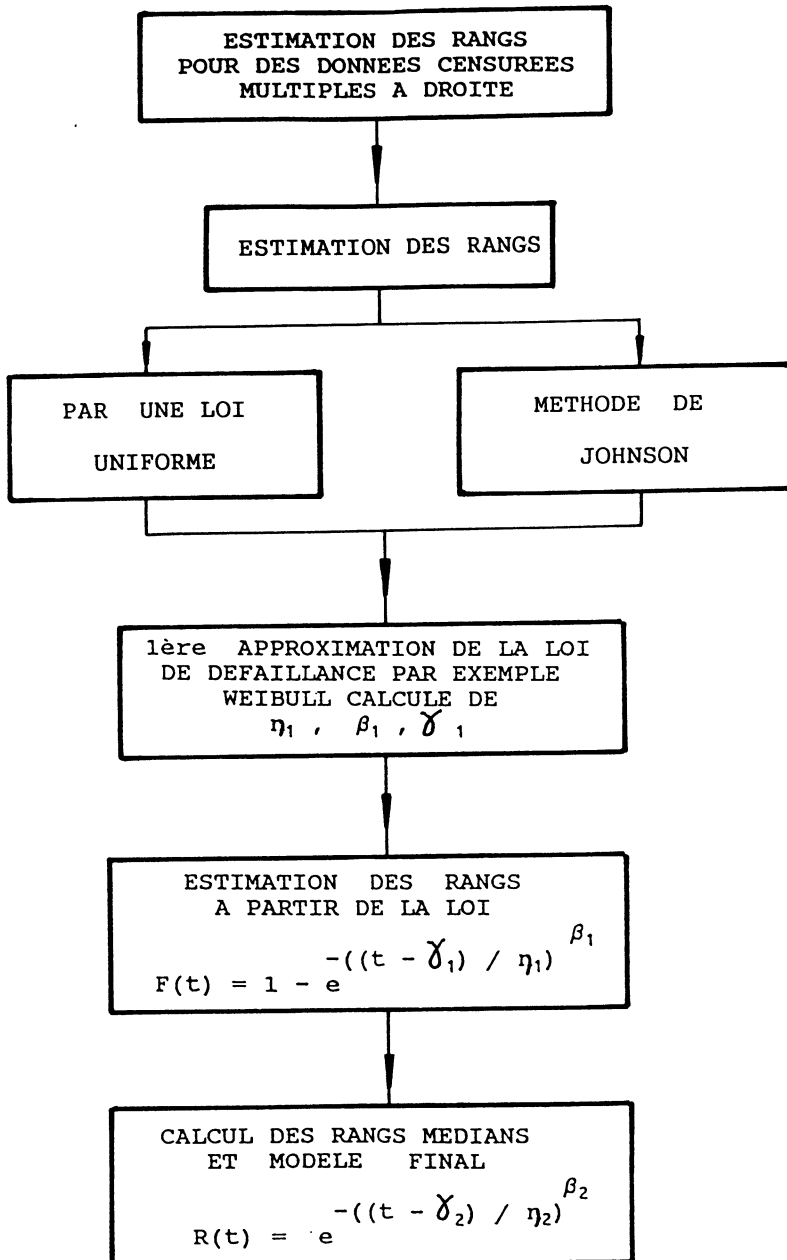
$$F(t) = 1 - e^{-((t-\gamma_1)/\eta_1)^{\beta_1}}$$



4ème étape

On utilise ces nouveaux rangs pour déterminer la nouvelle loi.

Organigramme de la méthode



Bibliographie

- JOHNSON Leonard G. The Statistical Treatement of Fatigue Experiment, Ed. E.P.C.
- LIGERON J.C., DELAGE A., NEFF M. La fiabilité en exploitation. Organisation et traitement des données. Ed. Tec. et Doc.
- LYONNET P. La maintenance : Mathématiques et Méthodes. Ed. Tec. et Doc.