

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JACQUES L. GOUPY

Étude comparative de divers plans d'expériences

Revue de statistique appliquée, tome 38, n° 4 (1990), p. 5-44

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1990__38_4_5_0

© Société française de statistique, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE COMPARATIVE DE DIVERS PLANS D'EXPÉRIENCES

Jacques L. GOUPY

TOTAL, 114, rue Chaptal, 92538 Levallois-Perret (France)

RÉSUMÉ

Les principes généraux de construction des plans d'expériences sont présentés à partir de la notion d'espace expérimental. La représentation géométrique des points d'expériences est très parlante mais elle est vite limitée lorsque le nombre de dimensions de l'espace expérimental augmente. C'est pourquoi l'on utilise la représentation matricielle qui, elle, peut être employée quel que soit le nombre de dimensions de l'espace expérimental. A l'aide des deux représentations, géométrique et matricielle, les principaux plans d'expériences sont décrits et comparés entre eux : plans factoriels complets, plans factoriels fractionnaires, plans de Plackett et Burman, tables de Taguchi, plans en étoile, plans de Koshal, plans de Doehlert. Une stratégie séquentielle d'utilisation des plans d'expériences est préconisée pour réduire le nombre des essais et obtenir la surface de réponse représentant le mieux le phénomène étudié.

Mots-clés : *Plans d'expériences, plans factoriels, Plackett et Burman, Taguchi, Doehlert, Expérimentique.*

ABSTRACT

How to built an experimental design is explained by the notion of experimental space. But geometric illustrations are limited to three dimensions and matrix representation must be employed for hyperspaces. The correspondence between matrix and geometrical space is explained in detail. Owing to these two kinds of representation the most useful experimental designs are thoroughly studied : factorial designs, fractional factorial designs, Taguchi tables, Plackett and Burman designs, Koshal designs, star designs, Doehlert designs. A sequential strategy to make proper use of experimental designs is recommended. It therefore enables a significant reduction of trials and conducts to the best mathematical modelling of the studied phenomenon.

Key-words : *Experimental designs, factorial designs, Taguchi, Plackett and Burman, Doehlert, Experimentic.*

I. Introduction

La dénomination « Plans d'Expériences » recouvre différents types d'organisations des essais. Ces différentes manières d'aborder la planification des expériences

ont été proposées à des époques variées, dans différents pays et dans différentes disciplines. Les statisticiens parlent de carrés latins, d'analyses de la variance et de plans factoriels, les chimistes utilisent plus volontiers les plans de Plackett et Burman, les responsables de la Qualité ne voient que par les tables de Taguchi. Les liens entre ces diverses organisations des essais n'apparaissent pas toujours bien clairement aux expérimentateurs qui sont tentés de choisir toujours la même stratégie, celle qu'ils connaissent bien. Il est pourtant fort intéressant de pouvoir utiliser toute la gamme des plans disponibles aujourd'hui. En effet, il est souvent possible d'économiser beaucoup de temps, d'argent et de personnel si l'on organise au mieux la suite de ses essais. L'objectif de cet article est de présenter, puis d'analyser les avantages et les inconvénients des plans les plus couramment utilisés. Nous espérons ainsi faciliter la tâche des expérimentateurs qui seront ainsi, à même de choisir la meilleure suite d'expérimentations pour résoudre leurs problèmes.

Avant d'aborder les plans d'expériences les plus utilisés, nous présenterons les notions générales qui régissent la construction des plans d'expériences ainsi que le vocabulaire particulier de cette discipline. Discipline à laquelle nous avons proposé de donner le nom d'EXPERIMENTIQUE pour regrouper l'ensemble de toutes les techniques utilisées dans ce domaine : analyse du problème, choix des facteurs à étudier, emploi des plans d'expériences optimaux, acquisition progressive des connaissances, examen critique des réponses et des conditions d'expérimentation, interprétation des résultats, modélisation pratique des phénomènes, explications théoriques des processus étudiés.

II. Principes généraux de construction des plans d'expériences

L'objectif des plans d'expériences est de choisir au mieux les expériences à réaliser pour découvrir les règles d'évolution d'une grandeur d'intérêt en fonction de variables opératoires. Ces règles se traduisent le plus souvent par une formule mathématique ou par des consignes d'utilisation. Les formules trouvées sont essentiellement pratiques c'est-à-dire qu'elles donnent une représentation mathématique approchée du phénomène dans une région limitée de l'espace expérimental.

Soit une grandeur d'intérêt y qui dépend de plusieurs variables : x_1, x_2, \dots et x_p . Cette dépendance s'exprime mathématiquement par la relation :

$$(1) \quad y = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, \dots)$$

En général, on ne connaît qu'une approximation $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de la véritable fonction φ et l'on n'aura pas la connaissance de toutes les variables. Seules les plus importantes seront prises en compte. L'expérimentateur recherche donc une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que :

$$(2) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$$

ε étant un écart intégrant les erreurs de mesure, l'approximation de φ et l'abandon de certains facteurs. Pour la suite de cet article, nous supposons ε négligeable

devant $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et nous écrivons :

$$(3) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Cette fonction algébrique peut être représentée dans un espace géométrique. Nous choisisons un repère cartésien, nous attribuons le premier axe à la variable x_1 , le second axe à x_2 etc. Le $n^{\text{ème}}$ axe à x_n . L'espace ainsi défini est appelé l'**espace expérimental**. Pour réaliser une expérience, il faut fixer chacune des variables à une valeur précise. L'expérience est alors représentée par un point dans l'espace expérimental.

La figure n° 1 indique la position d'un point expérimental dans un espace à deux dimensions. S'il est encore possible d'avoir une représentation géométrique de l'espace expérimental pour trois dimensions, cela devient impossible pour quatre dimensions et plus. Il va falloir trouver une représentation des points expérimentaux dans ces hyperespaces. Cette nouvelle représentation devra être commode et devra pouvoir être utilisée pour un nombre quelconque de dimensions. La solution habituellement employée consiste à donner les coordonnées de chaque point expérimental dans un espace qui comprend autant de dimensions qu'il y a de facteurs retenus pour l'étude. Ainsi, dans une étude comportant deux facteurs, le point expérimental A aura deux coordonnées : la coordonnée α sur l'axe Ox_1 et la coordonnée β sur l'axe Ox_2 (figure n° 1). Pour un espace à n dimensions un point expérimental sera défini par n coordonnées. L'ensemble de ces coordonnées est réuni dans un tableau qu'on appelle matrice des essais. Le mécanisme entre la représentation géométrique de l'espace expérimental et la représentation matricielle est illustrée par la figure n° 2. Chaque point expérimental peut être représenté soit géométriquement dans l'espace expérimental, soit matriciellement par un tableau donnant les niveaux auxquels il faut régler chaque facteur. Les coordonnées du point expérimental sont les niveaux indiqués dans le tableau qui porte le nom de matrice d'expériences.

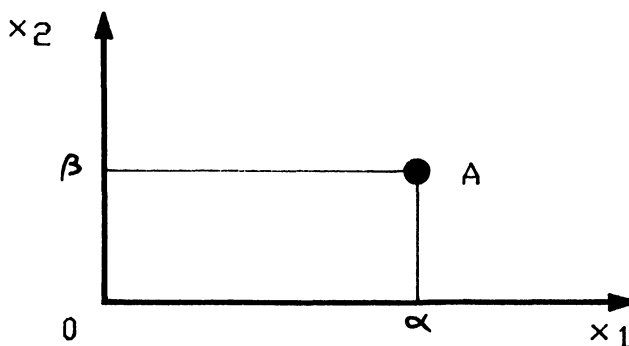


FIGURE 1

Dans un espace à deux dimensions un point expérimental A est défini par ses deux coordonnées.

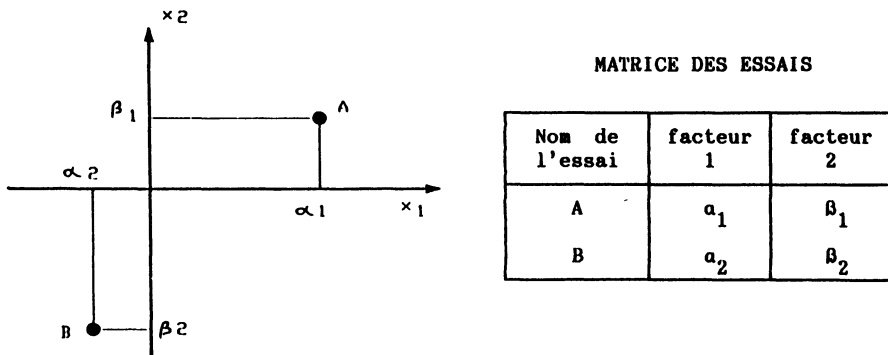


FIGURE 2

La représentation matricielle des points expérimentaux est équivalente à la représentation géométrique.

Pour un nombre plus élevé de dimensions, le principe reste le même, le tableau I donne les coordonnées de quatre points expérimentaux dans un espace expérimental à sept dimensions. La traduction de ce tableau en expériences à réaliser est simple. Pour l'essai n° 1, l'expérimentateur règlera le facteur x_1 au niveau α_1 , le facteur x_2 au niveau β_1 , le facteur x_3 au niveau δ_1 , ..., le facteur x_7 au niveau τ_1 . Les autres essais sont définis de la même manière.

Les matrices d'expériences représentent donc la disposition des points expérimentaux dans l'espace expérimental.

TABLEAU I

N° Essai	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	α_1	β_1	δ_1	ε_1	μ_1	σ_1	τ_1
2	α_2	β_2	δ_2	ε_2	μ_2	σ_2	τ_2
3	α_3	β_3	δ_3	ε_3	μ_3	σ_3	τ_3
4	α_4	β_4	δ_4	ε_4	μ_4	σ_4	τ_4

Pour l'interprétation l'expérimentateur introduit une grandeur supplémentaire : la réponse. Il est alors amené à travailler dans un espace possédant une dimension de plus que l'espace expérimental. Prenons l'exemple précédent : l'expérimentateur a réalisé l'expérience au point expérimental A (figure n° 3), il doit, s'il veut représenter géométriquement la réponse, utiliser un espace à trois dimensions, deux dimensions pour l'espace expérimental, une dimension pour la réponse.

En généralisant la prise en compte de la réponse y_i de chaque expérience, nous avons une grandeur de plus à représenter. Au moment de l'interprétation l'expérimentateur raisonnera dans un espace à $n+1$ dimensions : n dimensions pour les n facteurs expérimentaux et une dimension pour la réponse. On est donc très vite limité pour les représentations géométriques et l'expérimentateur qui réalise des plans d'expériences doit s'habituer à raisonner dans des espaces à n dimensions

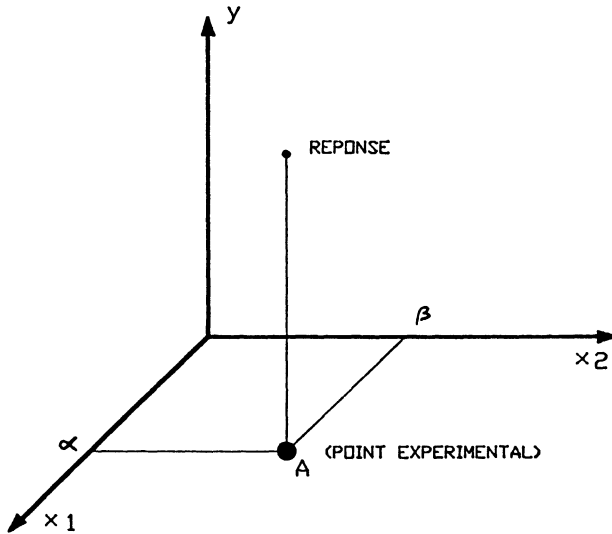


FIGURE 3

L'espace d'interprétation à une dimension de plus que l'espace expérimental.

sans les représenter géométriquement. Il travaillera avec d'autres techniques : calcul vectoriel, calcul matriciel et analyse canonique qu'il devra apprendre à maîtriser.

Supposons qu'un expérimentateur réalise plusieurs essais pour des points expérimentaux différents. Il a donc une série de réponses qui lui permettent d'écrire un système d'équations :

$$y_1 = f(\alpha_1, \beta_1, \dots)$$

$$y_2 = f(\alpha_2, \beta_2, \dots)$$

$$y_n = f(\alpha_n, \beta_n, \dots)$$

Connaissant les niveaux des variables α, β, \dots et les réponses y_i , le problème consiste à trouver la fonction $f(x_1, x_2, \dots)$ qui satisfait toutes ces équations en même temps. A cause des erreurs expérimentales et de la méconnaissance de la fonction $f(x_1, x_2, \dots)$, il est, en général, impossible d'obtenir la solution rigoureuse. La démarche habituellement suivie est la suivante : on développe $f(x_1, x_2, \dots)$ en série de Taylor-Mac Laurin et l'on ne retient que les premiers termes (en général terme constant, termes du premier degré et/ou termes du deuxième degré) de chaque variable. La fonction $f(x_1, x_2, \dots)$ est alors représentée par un polynôme. Cette représentation est plus commode à traiter mathématiquement mais reste une approximation de $f(x_1, x_2, \dots)$.

Les différents plans que nous allons examiner sont caractérisés par deux grandes options :

- le choix de l'emplacement des points expérimentaux,
- le choix du polynôme qui représente la fonction $f(x_1, x_2, \dots)$.

Enfin, avant d'entrer dans le détail de chaque plan, précisons que l'on emploie, le plus souvent, des variables centrées réduites plutôt que les variables mesurées en unités d'origine. L'intérêt de cette transformation réside dans le fait que les représentations géométriques et matricielles sont plus générales et que la modélisation est plus simple. Nous utiliserons uniquement ces variables centrées réduites dans la suite de cet article.

Variables centrées réduites

Il importe de bien préciser ce que nous entendons par «variables centrées réduites» car nous donnons, ici, à cette expression, un sens différent de celui qui est habituellement retenu en Statistique où une «variable centrée réduite» est une variable de moyenne nulle et de variance unité. La théorie des plans d'expériences utilise une définition différente des «variables centrées réduites». Pour éviter toute confusion, précisons en le sens. Soit x une variable qui au cours de l'expérimentation prend les valeurs extrêmes : x^- et x^+ . On fera correspondre à ces deux valeurs d'origine les variables centrées réduites -1 et $+1$.

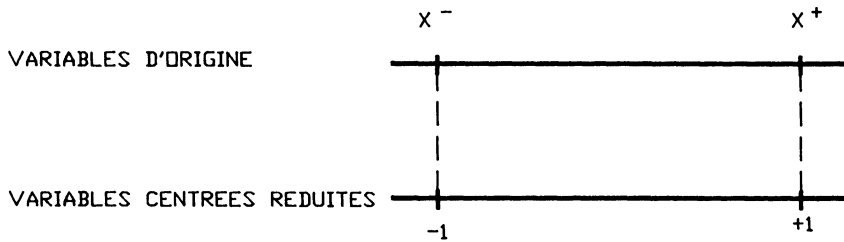


FIGURE 4

*Au niveau haut de la variable d'origine correspond $+1$ en variable centrée réduite.
Au niveau bas de la variable d'origine correspond -1 en variable centrée réduite.*

Cela revient à faire un changement d'origine et un changement d'unité.

- la nouvelle origine correspond à $\frac{x^+ + x^-}{2}$
- la nouvelle unité est $\frac{x^+ - x^-}{2}$

L'étude que nous présentons dans la suite de cet article n'utilise que les variables centrées réduites ainsi définies. Mais, comme en plus, nous associerons, à chaque plan, un modèle mathématique, ces variables seront continues c'est-à-dire qu'elles pourront prendre toutes les valeurs possibles dans le domaine de validité. Le cas des variables discrètes qui ne peuvent prendre que quelques valeurs bien définies ne sera pas traité ici. Les conclusions de cet article ne seront donc valables que pour les variables continues puisqu'à chaque fois nous associons un modèle mathématique contenant uniquement ce type de variables.

Dans la suite de cet article, nous utiliserons le terme «variable» au moment de la modélisation mathématique et le terme «facteur» au moment de l'établissement

et de l'utilisation des plans d'expériences. La variable n'étant ainsi que l'aspect mathématique des facteurs physiques, chimiques, biologiques ou autres pris en compte dans la réflexion et l'analyse du phénomène étudié.

Les principaux plans présentés sont les suivants :

- Plans factoriels complets
- Plans factoriels fractionnaires
- Plans de Plackett et Burman
- Tables de Taguchi
- Plans de Koshal
- Plans en étoile
- Plans de Doehlert

III. Les plans factoriels complets

Les plans factoriels en tant que plans d'expériences sont issus des travaux R.A. Fischer [1], [2]. Chaque facteur prend deux valeurs : une valeur inférieure et une valeur supérieure. On dit que chaque facteur est fixé à deux niveaux, un niveau bas noté par le signe moins, un niveau haut noté par le signe plus.

A) Points expérimentaux et matrice d'expériences

S'il n'y a qu'un facteur, l'espace expérimental est une droite. Comme ce facteur ne prend que deux valeurs (ou deux niveaux), il n'y aura que deux points expérimentaux, un à chaque extrémité du domaine (figure n° 5).

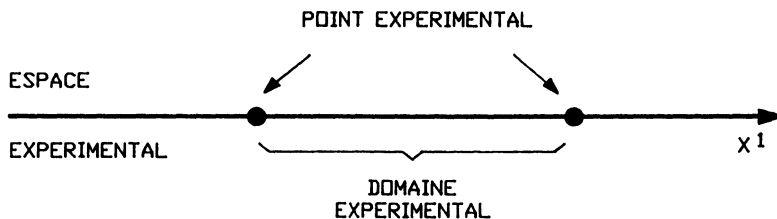


FIGURE 5

Pour un facteur, le domaine expérimental est réduit à un segment de droite.

Avec la convention des variables centrées réduites, les coordonnées de ces deux points expérimentaux seront respectivement -1 et $+1$. La matrice d'expériences est représentée par le tableau II.

TABLEAU II

N° de l'essai	Facteur 1
1	-1
2	+1

S'il y a deux facteurs, l'espace expérimental sera un plan. Les points expérimentaux seront placés de manière à ce que leurs coordonnées soient au niveau bas et au niveau haut de chaque facteur. La figure n° 6 indique la disposition des points expérimentaux pour un plan factoriel 2^2 (la signification de cette notation est la suivante : le 2 en exposant indique le nombre de facteurs, l'autre 2 indique le nombre de niveaux pris par chaque facteur).

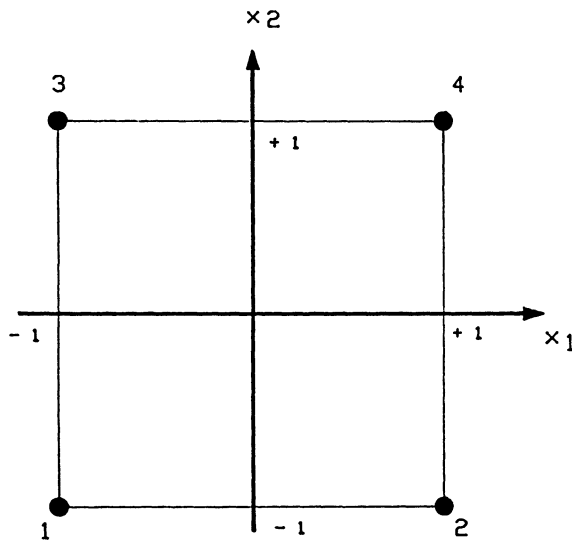


FIGURE 6

Disposition des points expérimentaux d'un plan 2^2 .

La matrice d'expériences équivalente à la représentation géométrique de la figure n° 6 est donnée par le tableau III dans lequel nous n'avons fait figurer que les signes + et - au lieu de +1 et -1.

TABLEAU III

N° de l'essai	Facteur 1	Facteur 2
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

Pour trois facteurs, les points expérimentaux seront aux sommets d'un cube (figure n° 7) et la matrice d'expériences sera un tableau traduisant l'emplacement de ces points en indiquant leurs trois coordonnées en variables centrées réduites (tableau IV).

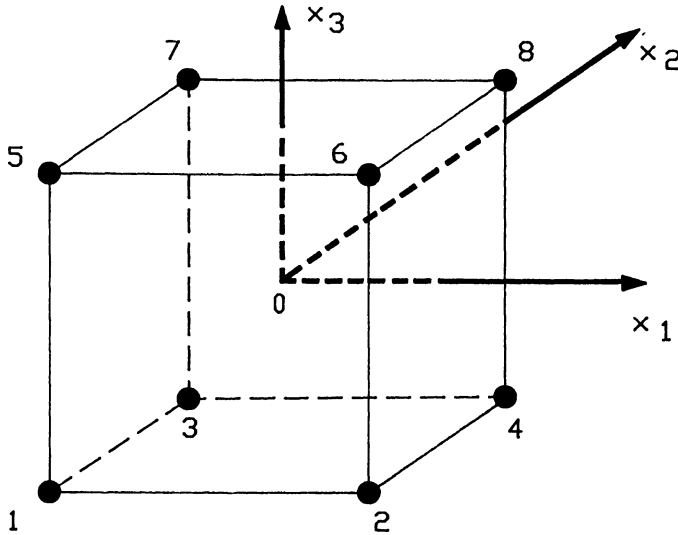


FIGURE 7
Disposition des points expérimentaux d'un plan 2^3 .

On s'est arrangé pour numéroter les points expérimentaux de telle manière que la matrice d'expériences se présente selon une disposition particulière que nous appellerons « disposition classique » [3] : la colonne du facteur 1 est une suite alternée des signes - et + commençant par un signe -, la colonne du deuxième facteur est une suite alternée de deux signes - suivis de deux signes +, la colonne du troisième facteur est une suite de quatre signes - suivis de quatre signes +. Il faut bien voir que chaque ligne est constituée par les trois coordonnées de chaque point expérimental.

TABLEAU IV

N° de l'essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Pour quatre facteurs, il n'est plus possible de donner une représentation géométrique. Par contre, il est facile d'ajouter une quatrième colonne à la matrice des essais (tableau V) pour introduire le quatrième facteur. Chaque ligne est constituée des quatre coordonnées de chaque point expérimental. Cette matrice d'expériences représente les seize points qui sont aux sommets d'un hypercube à quatre dimensions.

Pour k facteurs, on opère dans un espace expérimental à k dimensions et chaque point expérimental est repéré par ses k coordonnées. Chaque point est à l'un des 2^k sommets d'un hypercube à k dimensions. L'un des intérêts des plans d'expériences étant d'analyser l'influence d'un grand nombre de facteurs, l'expérimentateur doit s'habituer à travailler dans des espaces à k dimensions et donc à raisonner sur les matrices d'expériences qui remplacent, en Expérimentique, les représentations géométriques.

TABLEAU V

N° de l'essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

B) Modèle mathématique

Le modèle mathématique associé aux plans factoriels complets est un polynôme du premier degré par rapport à chaque variable. On fait l'hypothèse que les effets des facteurs sont additifs et qu'il peut y avoir des interactions entre les facteurs. Le modèle est le suivant pour un plan à trois facteurs :

$$(4) \quad y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

où :

a_0 est la valeur de la réponse au point central du domaine expérimental.

a_1 est l'effet du facteur 1

a_2 " " " 2

a_3 " " " 3

a_{12} est l'interaction entre les facteurs 1 et 2

a_{13} " " " 1 et 3

a_{23} " " " 2 et 3

a_{123} " " " 1, 2 et 3

Pour un tel plan, l'expérimentateur exécute huit essais. Il obtient donc un système de huit équations à huit inconnues :

$$y_1 = a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} - a_{123}$$

$$y_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3 - a_{12} - a_{13} + a_{23} + a_{123}$$

$$y_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - a_{12} + a_{13} - a_{23} + a_{123}$$

$$y_4 = a_0 + a_1 + a_2 - a_3 + a_{12} - a_{13} - a_{23} - a_{123}$$

$$y_5 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3 + a_{12} - a_{13} - a_{23} + a_{123}$$

$$y_6 = a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_{12} + a_{13} - a_{23} - a_{123}$$

$$y_7 = a_0 - a_1 + a_2 + a_3 - a_{12} - a_{13} + a_{23} - a_{123}$$

$$y_8 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123}$$

La présentation de ce système peut être condensée si l'on adopte la forme matricielle :

$$Y = XA$$

où Y est le vecteur réponse.

X est la matrice constituée par les valeurs que prennent les variables x_i , les produits deux à deux des variables, soit $x_i x_j$, les produits trois à trois des mêmes variables. C'est une matrice carrée composée de +1 et de -1 que l'on trouvera explicitée dans le tableau VI.

A est le vecteur des coefficients a_i qui sont les inconnues.

Ce système a une solution mathématique et une seule puisqu'il y a autant d'inconnues que d'équations. Cela signifie que la surface de réponses passe par toutes les valeurs de y_i mesurées. Dans le cas où deux facteurs sont étudiés, cette surface est, en général, un «paraboloïde hyperbolique» qui se simplifie parfois en un plan lorsqu'il n'y a pas d'interaction.

La formule

$$Y = XA$$

est valable quel que soit le nombre de facteurs et donc quel que soit le nombre de dimensions de l'espace expérimental ou de l'espace des réponses.

Y est constitué des réponses enregistrées par l'expérimentateur. Celui-ci n'a aucune action sur cette matrice-vecteur sauf d'essayer de l'obtenir avec la meilleure précision possible.

A est la matrice-vecteur que l'on cherche à connaître, c'est l'inconnue.

X est la matrice qui contient les éléments sur lesquels l'expérimentateur a une action : le choix des points expérimentaux, le choix du modèle mathématique. Nous allons examiner de plus près les matrices correspondant aux plans factoriels. Pour un plan 2^2 la matrice X est la suivante :

$$X = \begin{array}{cccc} -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{array}$$

C'est une matrice carrée dont les éléments sont des 1 au signe près. Si l'on considère chaque colonne comme un vecteur et que l'on fasse le produit scalaire de deux quelconques de ces colonnes-vecteurs on obtient zéro, ces vecteurs sont orthogonaux. Toute matrice ayant cette propriété est dite « orthogonale » même si les éléments ne sont pas des 1. Mais, dans le cas plus particulier où les éléments sont des 1, notre cas, la matrice est dite matrice d'Hadamard du nom d'un mathématicien français. Les matrices d'Hadamard n'existent que pour les ordres 2, 4, 8, 12, ..., $4n$.

On remarque également que les deux premières colonnes sont celles de la matrice d'expériences, ce qui découle naturellement du choix des points expérimentaux puisque x_1 et x_2 prennent les valeurs +1 et -1.

La troisième colonne est le produit des deux premières et la quatrième est une colonne de 1. Elles sont une conséquence du modèle retenu pour les plans factoriels. Cette conséquence apparaît bien lorsqu'on examine la relation (5) correspondant à un plan 2^2 .

$$(5) \quad y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + a_0$$

Pour tous les plans factoriels 2^k , la matrice X est une matrice d'Hadamard. Ecrivons cette matrice pour un 2^3 , plan qui correspond à l'emplacement des points de la figure n° 7 et du modèle mathématique (4). Nous demandons aux lecteurs d'examiner très attentivement cette matrice (tableau VI) car nous allons la rencontrer fréquemment à propos des plans factoriels fractionnaires, des plans Plackett et Burman [4] et des tables de Taguchi [5].

TABLEAU VI

	1	2	3	12	13	23	123	I
	-	-	-	+	+	+	-	+
	+	-	-	-	-	+	+	+
$X =$	-	+	-	-	+	-	+	+
	+	+	-	+	-	-	-	+
	-	-	+	+	-	-	+	+
	+	-	+	-	+	-	-	+
	-	+	+	-	-	+	-	+
	+	+	+	+	+	+	+	+

Les avantages des plans factoriels complets sont nombreux et nous n'en citerons que les principaux :

- Les plans factoriels complets sont faciles à construire.
- Comme chaque facteur ne prend que deux niveaux les essais sont faciles à contrôler et les risques d'erreur sont minimisés.
- Le calcul des effets et des interactions est très simple et ne demande pas d'outils informatiques évolués.
- En les employant l'expérimentateur est sûr d'avoir la procédure expérimentale optimale puisque ces plans sont basés sur des matrices d'Hadamard et qu'il a été démontré que l'on ne pouvait pas faire mieux.
- L'interprétation des résultats est à la portée de tout expérimentateur et ne demande pas de connaissances approfondies en statistiques.
- La modélisation mathématique est immédiate.
- Les résultats obtenus avec un premier plan peuvent être utilisés en partie ou en totalité soit, pour explorer une autre zone du domaine expérimental soit, pour établir un modèle mathématique de degré plus élevé.

Le seul inconvénient de ces plans est qu'ils obligent rapidement à faire beaucoup d'essais. Par exemple, pour étudier simplement sept facteurs il faut réaliser 128 expériences. Ce qui est prohibitif. Cela est d'autant plus regrettable que l'on s'aperçoit souvent, au moment de l'interprétation, que beaucoup d'essais ont été réalisés pour rien. En effet, de nombreuses interactions sont nulles et certains facteurs sont sans influence. C'est pour palier cet inconvénient que les plans factoriels fractionnaires ont été développés.

IV. Les plans factoriels fractionnaires

Nous venons de voir qu'avec les plans factoriels complets le nombre d'expériences augmente très vite avec le nombre de facteurs à étudier. C'est pourquoi les expérimentateurs utilisent de préférence les plans factoriels fractionnaires.

Ils réalisent moins d'expériences au prix d'une perte d'information qui, dans de nombreux cas, n'est pas gênante.

A) Les points expérimentaux

Nous prendrons l'exemple d'un plan 2^3 pour lequel quatre expériences seront réalisées au lieu de huit. Les points retenus ne sont pas choisis au hasard. On s'arrange pour qu'ils fournissent le plus d'information possible, c'est-à-dire qu'ils permettent de calculer la réponse au point central du domaine expérimental et les effets principaux des facteurs étudiés. Ce résultat est atteint si l'on choisit les points selon les indications de la figure n° 8. La matrice d'expériences correspondante est donnée par le tableau VII. Lorsqu'il y a plus de trois facteurs, il devient impossible de donner un schéma indiquant l'emplacement des points expérimentaux à conserver. Par contre, l'utilisation des matrices est toujours possible. La suite de ce paragraphe consacrée aux plans factoriels fractionnaires fera donc appel uniquement à ce mode de représentation des expériences à réaliser.

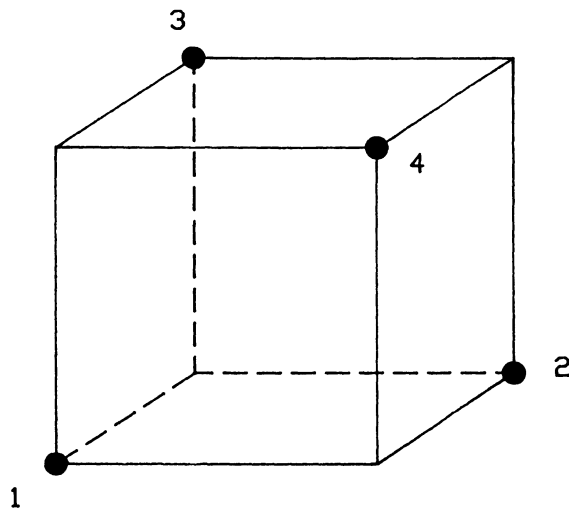


FIGURE 8

Disposition des quatre points expérimentaux d'un plan factoriel fractionnaire 2^{3-1} .

TABLEAU VII

N° de l'essai	x_1	x_2	x_3
1	-	-	-
2	+	+	-
3	-	+	+
4	+	-	+

Les plans fractionnaires sont utiles lorsqu'il y a beaucoup de facteurs à étudier. On peut diminuer le nombre des expériences de manière très significative sans diminuer le nombre des facteurs. L'exemple que nous venons de prendre où quatre essais sont réalisés au lieu de huit peut être étendu à tout plan factoriel complet. Il est non seulement possible de diviser par deux le nombre des essais mais aussi par 4, 8, ..., 2^n suivant le nombre des essais prévus par le plan complet de départ. Il est alors nécessaire de connaître la théorie des alias pour interpréter correctement les résultats d'expériences. Sans entrer dans le détail de cette théorie que l'on trouvera exposée dans l'ouvrage « La Méthode des Plans d'Expériences » [6] voyons comment l'expérimentateur peut diminuer le nombre de ces essais. Prenons le cas d'une étude pour laquelle quatre facteurs doivent être étudiés.

Un plan complet nécessite seize expériences. Si l'expérimentateur décide de n'effectuer que la moitié des essais il en fera $16/2$ ou 2^{4-1} . Cette dernière façon d'écrire est commode et elle a été retenue pour désigner un plan factoriel fractionnaire. Le 2 signifie que chaque facteur prend deux niveaux, le 4 indique que quatre facteurs sont étudiés, le 1 signifie qu'il y a un facteur supplémentaire par rapport au nombre de facteurs du plan complet. On constate également que cette notation indique le nombre d'essais à réaliser : $2^{4-1} = 8$. Le problème consiste à savoir quels sont les huit essais à éliminer et quels sont les huit essais à conserver pour l'étude. Comme nous l'avons déjà mentionné ce choix ne peut être fait convenablement que si l'on connaît la théorie des alias. On s'arrange pour que les effets principaux qui vont être déterminés à l'aide des huit essais conservés soient le moins faussés possible par l'absence des huit essais éliminés. On montre qu'il faut utiliser une colonne de signes correspondant à une interaction d'ordre élevé pour étudier le facteur supplémentaire. Dans le cas présent, le quatrième facteur peut être étudié sur l'interaction 123 et l'on écrira :

$$4 = 123$$

La matrice d'expériences du plan 2^{4-1} est donnée par le tableau VIII. On remarque qu'un plan 2^{4-1} est représenté par une matrice d'Hadamard. C'est le secret du choix des expériences à conserver : on s'arrange pour que les matrices soient toujours des matrices d'Hadamard, ce qui correspond à une répartition bien particulière des points expérimentaux dans l'espace expérimental.

TABLEAU VIII

	1	2	3	4=123
1	-	-	-	-
2	+	-	-	+
3	-	+	-	+
4	+	+	-	-
5	-	-	+	+
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	+

Quant à la matrice X qui permet de calculer les effets principaux et certaines interactions, elle se déduit de la matrice d'expériences et du modèle mathématique. Cette matrice X qui correspond au plan 2^{4-1} est donnée par le tableau IX. On remarque que les colonnes de ce tableau sont presque identiques à celles de la matrice du plan complet 2^3 (tableau VI). Seule la colonne $4 = 123$ a été déplacée de la septième position à la quatrième; cela ne change pas l'orthogonalité de la matrice.

TABLEAU IX

	1	2	3	4=123	12	13	23	I
1	-	-	-	-	+	+	+	+
2	+	-	-	+	-	-	+	+
3	-	+	-	+	-	+	-	+
4	+	+	-	-	+	-	-	+
5	-	-	+	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	-	+	-	+
7	-	+	+	-	-	-	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Nous venons de voir le cas d'une diminution de 50 % du nombre des essais. Jusqu'où peut-on pousser cette réduction? Soit un plan complet conduisant à beaucoup d'essais. Par exemple, le plan permettant d'étudier sept facteurs, le 2^7 . Il faudra exécuter 128 essais si l'on n'emploie pas de plans fractionnaires. Si l'expérimentateur décide de n'effectuer que la moitié des essais il en fera 128/2 ou 2^{7-1} soit 64 essais. Il choisira selon certaines règles les points expérimentaux à conserver, en particulier il s'arrangera pour que la matrice du plan 2^{7-1} soit une matrice d'Hadamard. S'il connaît la théorie des alias, il saura comment les interactions risquent de fausser les effets principaux. Si l'expérimentateur estime que 64 essais représentent encore un travail trop important il peut diviser une nouvelle fois par deux le nombre des essais soit $2^7/4 = 2^{7-2} = 32$. Là encore ces 32 essais seront choisis de manière à ce que la matrice du plan 2^{7-2} soit une matrice d'Hadamard. Les effets calculés à partir de ce plan pourront être entachés d'un biais plus important que précédemment : trois interactions faussent la valeur des effets principaux. Si l'on poursuit cette réduction des essais on peut encore diviser par deux et même par quatre le nombre des essais et n'en réaliser que seize (2^{7-3}) ou huit (2^{7-4}). Si l'expérimentateur a la précaution d'utiliser à chaque fois des matrices d'Hadamard il sera dans les meilleures conditions d'expérimentation. Le risque de fausser les effets principaux s'accroît au fur et à mesure que l'on diminue le nombre des essais. L'expérimentateur n'a qu'une ressource pour évaluer les risques qu'il prend : appliquer la théorie des alias. Le plan 2^{7-4} (tableau X) permet d'étudier sept facteurs en huit essais. On vérifie que le tableau X est identique à la matrice X du plan complet 2^3 . La seule différence est que l'on ne détermine que les sept effets principaux des sept facteurs sans pouvoir évaluer les interactions. Les effets principaux ainsi calculés peuvent être entachés d'une très forte erreur.

TABLEAU X

	1	2	3	4=12	5=13	6=23	7=123	I
1	-	-	-	+	+	+	-	+
2	+	-	-	-	-	+	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+	+
4	+	+	-	+	-	-	-	+
5	-	-	+	+	-	-	+	+
6	+	-	+	-	+	-	-	+
7	-	+	+	-	-	+	-	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Voyons maintenant les répercussions de cette réduction sur l'aspect modélisation mathématique des plans factoriels fractionnaires.

B) Modèle mathématique

Ayant moins de points expérimentaux à notre disposition, nous avons également moins d'équations. Le nombre des inconnues restant inchangé, on pourrait croire qu'il n'y a pas d'issue. Mais il est possible de sortir de ce dilemme en faisant des hypothèses, la plus classique est de négliger les inconnues considérées comme les moins importantes. Par exemple dans le cas du 2^3 , on suppose que les interactions d'ordre 2 et 3 sont négligeables, c'est-à-dire que le modèle retenu devient :

$$(6) \quad y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Une autre technique consiste à rassembler les inconnues par groupes, groupes que l'on analyse ensuite en utilisant des hypothèses d'approximation. Cette technique est la base de la théorie des aliases. Elle est beaucoup plus riche et plus rigoureuse que la simple hypothèse de nullité des interactions précédemment évoquée.

Au lieu de déterminer huit inconnues avec huit points expérimentaux, on ne calcule plus que quatre inconnues (ou groupes d'inconnues), avec quatre points expérimentaux seulement.

Ces quatre points représentent quatre essais, ils conduisent à quatre équations que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$Y = XA$$

On donne aux coordonnées de x_1, x_2 et x_3 , les valeurs nécessaires pour que X soit une matrice d'Hadamard.

Le principe reste le même que l'on divise par 2, 4, 8 ou 2^p le nombre des essais d'un plan complet. On choisit les coordonnées des points expérimentaux et le modèle mathématique de telle manière que la matrice X soit une matrice

d'Hadarnard. Il y a toujours autant d'inconnues (ou groupes d'inconnues) que de points expérimentaux.

Suivant les choix que l'on fait, on obtient des plans permettant d'étudier plus ou moins de facteurs en négligeant plus ou moins d'interactions. L'expérimentateur est toujours maître de ces choix et, il doit être capable d'évaluer exactement les risques qu'il prend. On pourrait croire qu'il est dangereux de réduire ainsi le nombre des essais. En réalité, il n'en est rien car il est toujours possible après un examen minutieux des résultats d'effectuer des essais supplémentaires qui viennent compléter les premiers résultats et qui permettent de lever les ambiguïtés.

Les avantages des plans factoriels fractionnaires sont les mêmes que ceux des plans factoriels complets. Mais, en plus il permettent d'échapper au principal inconvénient de ces derniers : le grand nombre des essais. Ces plans sont donc des outils primordiaux pour l'expérimentateur et leur utilisation doit être encouragée par tous les moyens. Il faut encore ajouter un avantage considérable, celui de pouvoir mener les travaux par séquences : par exemple on commence par un 2^{7-4} et s'il s'avère nécessaire de faire des essais complémentaires pour lever les ambiguïtés, on poursuivra les expériences en exécutant un deuxième plan 2^{7-4} qui, ajouté au premier donnera deux plans 2^{7-4} soit $2 \times 2^{7-4}$ ou un plan 2^{7-4+1} que l'on écrira plus simplement 2^{7-3} . L'interprétation sera alors établie sur les seize essais. Il est naturellement possible d'ajouter autant d'expériences qu'il s'avèrera nécessaire pour terminer l'étude. Cette possibilité permet à l'expérimentateur de réaliser le nombre juste suffisant d'essais pour aboutir à la résolution de son problème.

En face de tous ces avantages il y a peu d'inconvénients. le plus important serait peut-être que l'expérimentateur doit faire un effort pour apprendre à maîtriser l'emploi des plans factoriels fractionnaires.

Pour être complet, il faut signaler que ces plans présentent malgré tout une faiblesse, c'est l'hypothèse de linéarité et d'additivité des variables. La modélisation mathématique pratique que l'on déduit des résultats n'est qu'une première approximation du modèle physique réel. Il faut passer à des plans contenant un plus grand nombre de niveaux par facteurs pour obtenir des modèles du second degré. Mais nous verrons que les essais effectués pour un plan factoriel fractionnaire ne sont pas perdus et qu'il suffit d'ajouter des points bien choisis pour passer à un modèle du second degré.

V. Les plans Plackett et Burman

R.L. Plackett et J.P. Burman ont publié leur étude en 1946 dans *Biometrika* [4]. Ils expliquent comment construire des plans permettant d'étudier un grand nombre de facteurs en peu d'essais. Ils attribuent deux niveaux à chaque facteur et supposent que toutes les interactions entre facteurs sont négligeables devant les effets principaux. Leurs plans se présentent sous forme de matrices carrées orthogonales contenant uniquement des +1 et des -1. Ce sont des matrices d'Hadarnard. Ils indiquent toutes les matrices (N, N) à partir de $N = 8$ et jusqu'à $N = 100$ qu'il est possible de construire. Il est amusant de remarquer qu'ils n'indiquent pas la matrice $(96, 96)$ pour laquelle ils n'avaient pas encore trouvé la construction au moment de leur publication.

Examinons maintenant en détail la méthode de construction des plans de Plackett et Burman : Ils commencent par indiquer la première colonne de la matrice. Par exemple pour $N = 8$ la séquence des signes + et - est la suivante :

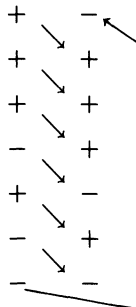
+ + + - + - -

Il n'y a que sept signes, ceux-ci vont servir à construire une matrice par permutations circulaires. La matrice (7,7) ainsi obtenue sera complétée par une dernière ligne et une dernière colonne de signes moins. A titre d'exemple construisons la matrice (8,8) permettant d'étudier sept facteurs.

On dispose verticalement la séquence de signes de la première colonne. Séquence qu'il faut prendre dans l'article de Plackett et Burman :

+
+
+
-
+
-
-

On déduit la seconde colonne à partir de cette première colonne en décalant les signes d'un cran vers le bas, le dernier signe - de la première colonne étant, lui,



remonté au sommet de la deuxième colonne. Les cinq colonnes suivantes sont construites de la même manière :

+	-	-	+	-	+	+
+	+	-	-	+	-	+
+	+	+	-	-	+	-
-	+	+	+	-	-	+
+	-	+	+	+	-	-
-	+	-	+	+	+	-
-	-	+	-	+	+	+

Enfin une rangée et une colonne de signes – sont ajoutées.

+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	-	-	+	-	+	-
+	+	+	-	-	+	-	-
-	+	+	+	-	-	+	-
+	-	+	+	+	-	-	-
-	+	-	+	+	+	-	-
-	-	+	-	+	+	+	-
-	-	-	-	-	-	-	-

Cette matrice est une matrice d'Hadamard. Nous allons la transformer pour la présenter selon la disposition classique des plans factoriels. On sait qu'il est possible d'inverser les signes + et - sans modifier les résultats de l'expérimentation. Effectuons cette transformation et désignons les lignes par les huit premières lettres de l'alphabet dans le simple but de les repérer.

<i>a</i>	-	+	+	-	+	-	-	+
<i>b</i>	-	-	+	+	-	+	-	+
<i>c</i>	-	-	-	+	+	-	+	+
<i>d</i>	+	-	-	-	+	+	-	+
<i>e</i>	-	+	-	-	-	+	+	+
<i>f</i>	+	-	+	-	-	-	+	+
<i>g</i>	+	+	-	+	-	-	-	+
<i>h</i>	+	+	+	+	+	+	+	+

Ordonnons maintenant ces lignes pour retrouver la séquence des signes des colonnes des matrices X des plans 2^3 que nous avons vus précédemment. Nous conservons la numérotation classique des facteurs et des interactions (tableau XI).

TABLEAU XI

	1	2	3	12	23	123	13	<i>I</i>
<i>c</i>	-	-	-	+	+	-	+	+
<i>d</i>	+	-	-	-	+	+	-	+
<i>e</i>	-	+	-	-	-	+	+	+
<i>g</i>	+	+	-	+	-	-	-	+
<i>b</i>	-	-	+	+	-	+	-	+
<i>f</i>	+	-	+	-	-	-	+	+
<i>a</i>	-	+	+	-	+	-	-	+
<i>h</i>	+	+	+	+	+	+	+	+

Nous retrouvons, au déplacement près de quelques colonnes, un plan 2^3 et comme Plackett et Burman n'envisagent pas d'interaction, il s'agit d'un plan

factoriel fractionnaire saturé 2^{7-4} où les quatre facteurs supplémentaires sont confondus avec les quatre interactions. On peut écrire :

Un Plackett et Burman $N = 8$ est un plan factoriel fractionnaire 2^{7-4}

Pour les autres valeurs de N , la situation n'est pas toujours la même car Plackett et Burman donnent toutes les matrices d'Hadamard :

$$\begin{array}{cccc} N = 8 & N = 12 & N = 16 & N = 20 \\ N = 24 & N = 28 & N = 32 & N = 36 \end{array}$$

qui nous le savons sont d'ordre multiple de quatre. Parmi toutes ces matrices, seules les matrices 2^n sont utilisées pour les plans factoriels complets et les plans factoriels fractionnaires.

Les plans de Plackett et Burman utilisent comme modèle mathématique des polynômes du premier degré sans interaction.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$$

L'interprétation des plans Plackett et Burman est analogue à celle des plans factoriels fractionnaires. Il est donc indispensable de connaître la théorie des aliasés si l'on veut exploiter correctement les résultats d'essais. Malheureusement ces plans n'ont pas été présentés, dans le passé, comme des plans factoriels fractionnaires, donc comme des plans délicats à interpréter, mais comme un moyen d'étude facile à utiliser et ne posant pas de problème. D'où un certain nombre d'échecs entraînant le rejet global des plans d'expériences par certains expérimentateurs. L'utilisation de ces plans a également développé de mauvaises habitudes comme par exemple celle qui consiste à utiliser les colonnes non attribuées à des facteurs pour estimer l'erreur expérimentale. Cette pratique est tout-à-fait à déconseiller car il y a risque de prendre une interaction entre deux facteurs comme erreur expérimentale. Cette très mauvaise habitude est malheureusement trop fréquente et même conseillée dans certains manuels !

Il y a pourtant un plan intéressant dans les plans de Plackett et Burman c'est celui à douze essais, matrice d'Hadamard (12,12) qui permet d'étudier onze facteurs en douze essais. Ce plan correspond à un plan 2^{11-7} mais ne réclame que douze essais contre seize pour le plan fractionnaire. Il peut être très utile si l'économie de quatre expériences fait gagner beaucoup de temps ou d'argent. La difficulté réside dans l'interprétation car les confusions entre effets principaux et interactions n'est pas simple.

VI. Les tables de Taguchi

Taguchi propose d'organiser les expériences selon des tables qu'il appelle L8 ou L16 ou L27 [7]. Nous allons donner la table L8 et examiner si elle diffère de ce

que nous connaissons déjà. Chaque facteur prend deux niveaux : un niveau 2 et un niveau 1. Les colonnes 1, 2 et 4 sont destinées à étudier les trois premiers facteurs. Les colonnes 3, 5, 6 et 7 sont destinées à étudier des facteurs supplémentaires, soit à déterminer la valeur des interactions. Les associations entre effets principaux et interactions sont données par des graphes. A la table L8 sont associés les graphes linéaires suivants :

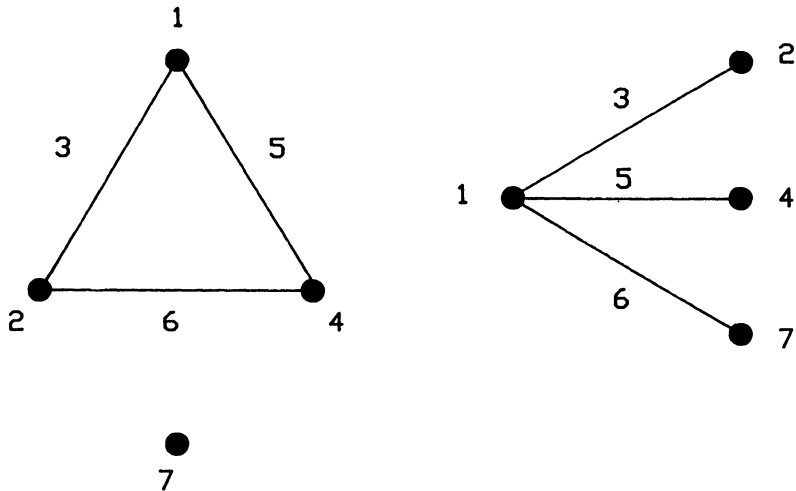


FIGURE 9

Graphes linéaires associés à la table L8 de Taguchi.

Etudions la table L8 (tableau XII). Remplaçons les 1 par le signe + et les 2 par le signe -. Nous retrouvons une matrice qui comprend dans chaque colonne autant de signes + que de signes - et qui est orthogonale. Il lui manque une colonne de signes + pour être comparable à la matrice X d'un plan 2^3 .

TABLEAU XII
Table L8 de Taguchi

Essais	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

TABLEAU XIII

	1	2	3	4	5	6	7
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	-	-	-	-
3	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	-	-	+	+
5	-	+	-	+	-	+	-
6	-	+	-	-	+	-	+
7	-	-	+	+	-	-	+
8	-	-	+	-	+	+	-

Ajoutons cette colonne de signes + et changeons l'ordre des essais pour retrouver les séquences que nous avons rencontrées pour les plans factoriels 2^3 (tableau XIV). Les colonnes 1 et 2 présentent maintenant des séquences de signes analogues à celles des facteurs 1 et 2 d'un plan 2^3 .

TABLEAU XIV

	1	2	3	4	5	6	7	I
8	-	-	+	-	+	+	-	+
4	+	-	-	-	-	+	+	+
6	-	+	-	-	+	-	+	+
2	+	+	+	-	-	-	-	+
7	-	-	+	+	-	-	+	+
3	+	-	-	+	+	-	-	+
5	-	+	-	+	-	+	-	+
1	+	+	+	+	+	+	+	+

La colonne 3 apparaît comme le produit des colonnes 1 et 2, c'est l'interaction 12.

La colonne 4 est la colonne habituelle du troisième facteur. La colonne 5 est le produit de 1 par 4, c'est l'interaction 14. La colonne 6 est le produit de 2 par 4, c'est l'interaction 24. La colonne 7 est le produit de 1, 2 et 4. On retrouve donc, en réorganisant les colonnes (tableau XV), un plan 2^3 complet. Comme ce plan est une matrice d'Hadamard et que le graphe permet d'attribuer les colonnes d'interactions à des facteurs supplémentaires, on peut considérer cette table comme représentant également un plan factoriel fractionnaire 2^{4-1} ou 2^{5-2} ou 2^{6-3} ou 2^{7-4} .

TABLEAU XV

	1	2	4	3=12	5=14	6=24	7=124	I
8	-	-	-	+	+	+	-	+
4	+	-	-	-	-	+	+	+
6	-	+	-	-	+	-	+	+
2	+	+	-	+	-	-	-	+
7	-	-	+	+	-	-	+	+
3	+	-	+	-	+	-	-	+
5	-	+	+	-	-	+	-	+
1	+	+	+	+	+	+	+	+

On peut donc écrire :

Table L8 + graphes

= plans 2^3 ou 2^{4-1} ou 2^{5-2} ou 2^{6-3} ou 2^{7-4} .

On montrerait de même :

Table L16 + graphes

= plan 2^4 ou 2^{5-1} ou 2^{6-2} ou 2^{7-3} ou 2^{8-4}
ou 2^{9-5} ou 2^{10-6} ou 2^{11-7} ou 2^{12-8}
ou 2^{13-9} ou 2^{14-10} ou 2^{15-11}

Quant à la table L27, c'est un plan à trois facteurs avec trois niveaux par facteur, soit un 3^3 complet ou des plans fractionnaires 3^{n-p} .

Les tables de Taguchi accompagnées de leurs graphes sont des plans factoriels fractionnaires avec tous leurs avantages. Le mérite de Taguchi est d'avoir essayé de simplifier l'utilisation des plans factoriels fractionnaires pour les rendre accessibles à un grand nombre d'expérimentateurs. Cette simplification a son revers, elle ne permet pas d'exploiter à fond toutes les possibilités des tables de Taguchi. Nous encourageons les expérimentateurs déjà conquis par les tables de Taguchi de faire l'effort d'apprendre la théorie des alias et d'approfondir l'utilisation des plans factoriels fractionnaires et surtout leur utilisation séquentielle. Ils y trouveront de grands avantages et maîtriseront bien mieux leurs travaux.

VII. Les plans de Koshal

Etant donné un polynôme caractérisé par son degré d et par le nombre de variables k , on peut calculer le nombre de ses coefficients. Ce nombre est donné

par la formule :

$$N = \frac{(k + d)!}{d! k!}$$

Koshal a cherché les plans dont le nombre de points expérimentaux était égal au nombre de coefficients du polynôme retenu a priori par l'expérimentateur [8].

Nous allons illustrer ces plans en prenant l'exemple d'une étude à trois facteurs et nous supposons successivement que le polynôme retenu est du premier, du second et du troisième degré.

Premier degré :

Le modèle mathématique associé à ce plan est :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Il y a quatre coefficients, le plan de Koshal contiendra donc quatre points expérimentaux. Ces points sont disposés de manière à ce que chaque facteur soit étudié seul, ce sont des plans «un facteur à la fois». L'expérimentateur choisit un point origine O, c'est le niveau zéro de tous les facteurs. Puis, il laisse tous les facteurs à ce niveau sauf l'un d'eux qu'il règle au niveau +1. Il recommence pour chaque facteur.

Illustrons cette technique sur un exemple. Le point origine est O pour lequel x_1 , x_2 et x_3 valent respectivement x_{01} , x_{02} et x_{03} . L'expérimentateur réalise une première expérience avec ces valeurs, il obtient une réponse y_0 . On a :

$$y_0 = a_0.$$

Puis, x_1 est réglé sur +1, x_2 et x_3 restant à x_{02} et x_{03} : c'est le point expérimental A (figure 10) ou l'essai n° 2 (tableau XVI). La réponse en A est y_1 . Les deux résultats des essais permettent de calculer l'effet du facteur 1 :

$$y_1 - y_0 = a_1$$

Pour la troisième expérience, l'expérimentateur laisse x_1 et x_3 respectivement à x_{01} et x_{03} ; x_2 étant réglé à +1 : c'est le point expérimental B (figure 10) ou l'essai n° 3 (tableau XVI). La réponse en B est y_2 . Avec les deux réponses, y_2 et y_0 , on calculera l'effet du facteur 2 :

$$y_2 - y_0 = a_2$$

Le point C, essai n° 4, permet de calculer le coefficient de x_3 :

$$y_3 - y_0 = a_3$$

TABLEAU XVI

N° de l'essai	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

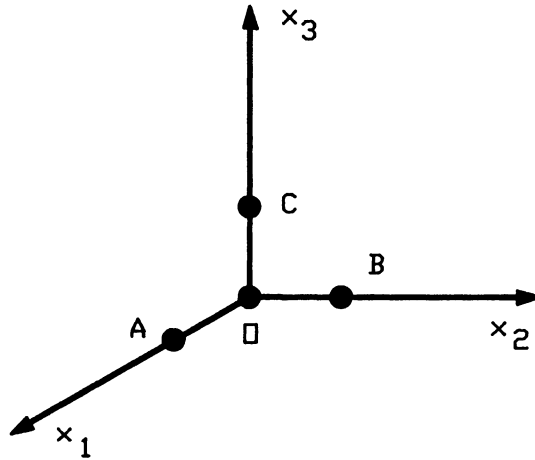


FIGURE 10

*Représentation géométrique du plan le plus répandu au monde :
le plan «un facteur à la fois».*

On remarquera qu'il n'est pas possible de se rendre compte s'il y a des interactions ou non.

Ce type de plan bien particulier est probablement le plan d'expériences le plus utilisé au monde. C'est le fameux plan «un facteur à la fois» que la plupart des expérimentateurs pratiquent quotidiennement sans savoir qu'ils font des plans d'expériences au sens de Koshal.

Second degré :

Le modèle mathématique associé à ce plan comporte dix coefficients, le plan de Koshal correspondant aura donc dix points expérimentaux. Ils sont disposés comme l'indique la figure n° 11 et l'on trouvera dans la table VII la traduction matricielle de cette représentation géométrique.

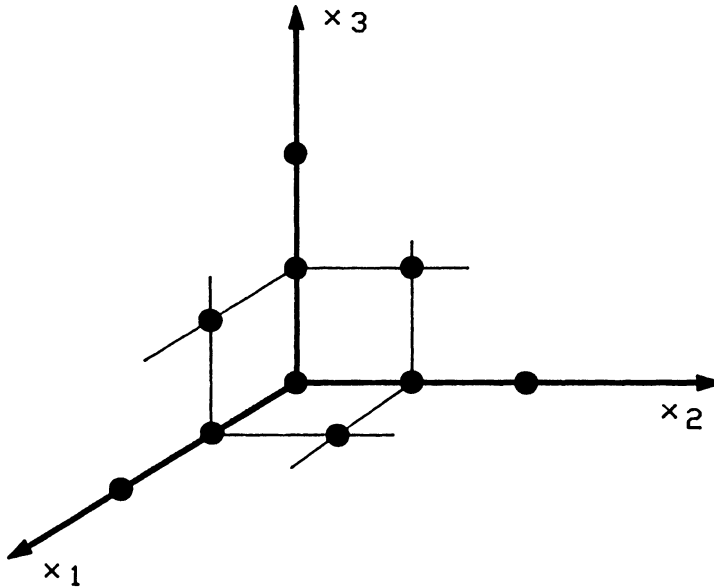


FIGURE 11

Disposition des points expérimentaux du plan de Koshal du second degré.

TABLEAU XVII

N° de l'essai	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1
5	2	0	0
6	0	2	0
7	0	0	2
8	1	1	0
9	1	0	1
10	0	1	1

Les quatre premiers essais sont ceux des plans «un facteur à la fois», les six autres permettent de passer du polynôme du premier degré au polynôme du second degré.

Troisième degré :

Le modèle mathématique associé à ce plan comporte vingt coefficients, le plan de Koshal correspondant aura donc vingt points expérimentaux. Ils sont disposés comme l'indique la figure n° 12. Bien qu'il ne soit pas exclu d'utiliser

des polynômes du troisième degré, ces polynômes et tous ceux de degré supérieur sont dangereux car les prévisions que l'on peut faire dans une région proche du domaine de validité peuvent être très différentes de la réalité. A cause de la multiplicité des pôles, ces polynômes réservent souvent de mauvaises surprises et les extrapolations sont toujours hasardeuses. Dans la suite de cet article nous nous limiterons aux polynômes du second degré.

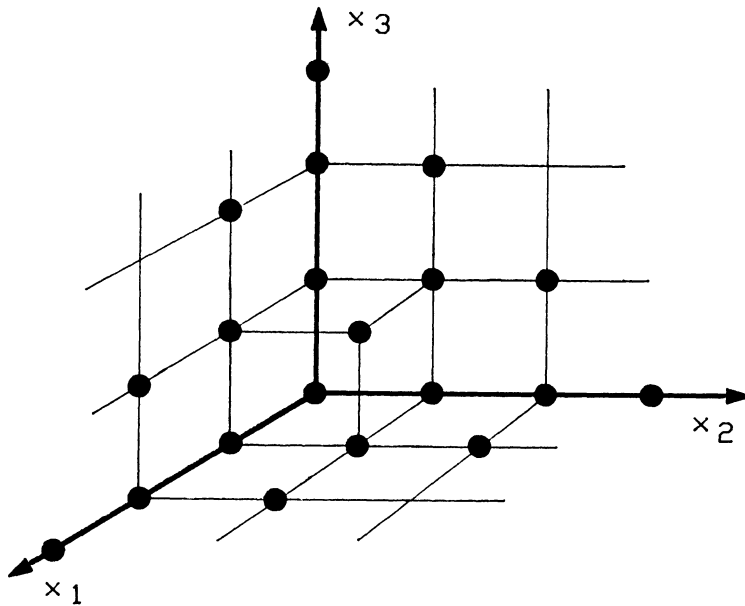


FIGURE 12

Disposition des points expérimentaux du plan de Koshal du troisième degré.

VIII. Les plans en étoile

A part les plans de Koshal du deuxième type, les plans que nous venons d'examiner, ne permettent d'obtenir que des modèles du premier degré par rapport à chacune des variables. Mais, de nombreux phénomènes présentent une surface de réponses présentant une courbure. Il est donc utile de posséder dans son arsenal de méthodes des plans permettant d'étudier et de représenter des phénomènes dont les surfaces de réponses sont du second degré [9]. Les plans en étoile sont des compléments aux plans factoriels. Le principe de base est d'aligner le plus grand nombre de groupes de trois points c'est-à-dire de donner au moins trois niveaux à chaque facteur en utilisant le minimum de points expérimentaux. La figure n° 13 illustre ce principe pour un plan à deux facteurs : on a rajouté cinq points expérimentaux (les carrés blancs) à un plan 2^2 (les cercles noirs). La meilleure position de ces nouveaux points est l'objet d'ardentes discussions et dépend des

critères d'optimisation que l'on désire respecter. Nous n'entrerons pas ici dans ces discussions théoriques. Nous noterons α l'abscisse de ces points sur l'axe de chaque facteur en prenant cette même valeur pour tous. Cela nous permettra de comprendre le principe de construction de ces plans. La matrice d'expériences est alors donnée par le tableau XVIII.

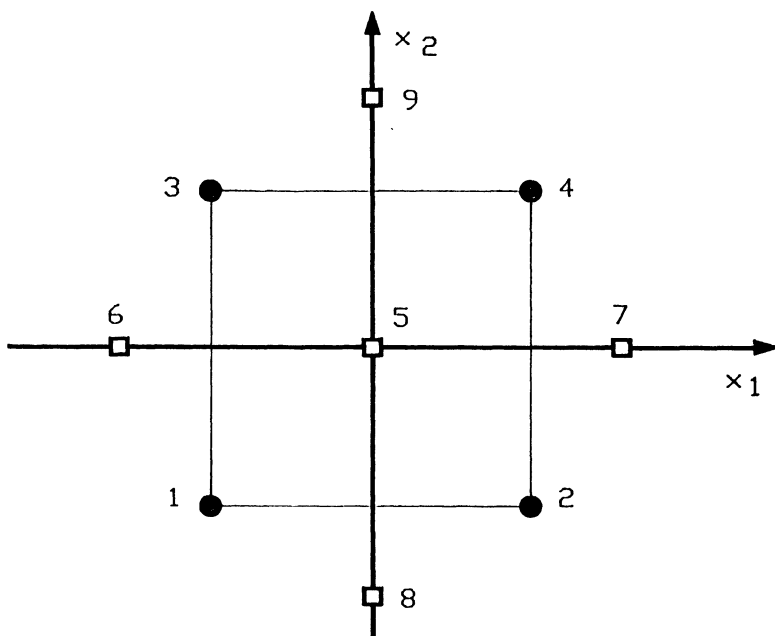


FIGURE 13

*Les cercles noirs représentent les essais du plan 2^2 .
Les carrés blancs représentent les essais du plan en étoile associés au plan 2^2 .*

TABLEAU XVIII

N° de l'essai	x_1	x_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	0	0
6	$-\alpha$	0
7	$+\alpha$	0
8	0	$-\alpha$
9	0	$+\alpha$

La construction des plans en étoile à n dimensions et de la matrice d'expériences correspondante est réalisée de la même manière et ne pose aucune difficulté.

Pour établir le modèle mathématique, on pousse le développement de Taylor Mac-Laurin jusqu'au deuxième degré, mais sans toujours retenir tous les termes. On a donc des polynômes qui peuvent prendre plusieurs formes. Pour un plan à deux facteurs, la forme la plus courante sera :

$$(7) \quad y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2$$

Mais rien n'empêcherait de considérer des interactions comme x_1x_2 ou $x_1^2x_2$ ou $x_1x_2^2$, ce que d'ailleurs font certains auteurs.

Nous nous limiterons au modèle le plus courant pour écrire la matrice X du plan composite à deux facteurs. On appelle plan composite le plan constitué d'un plan factoriel 2^n et du plan en étoile associé.

TABLEAU XIX

	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	I
	-1	-1	1	1	1	1
	+1	-1	-1	1	1	1
	-1	+1	-1	1	1	1
$X =$	+1	+1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	1
	$-\alpha$	0	0	α^2	0	1
	$+\alpha$	0	0	α^2	0	1
	0	$-\alpha$	0	0	α^2	1
	0	$+\alpha$	0	0	α^2	1

Cette matrice X n'est plus une matrice d'Hadamard. Pour optimiser le plan d'expériences, c'est-à-dire pour choisir au mieux la valeur de α , il faut choisir un critère d'optimisation, si nous retenons le critère du déterminant maximum, nous chercherons la valeur de α qui maximise le déterminant de $X^t X$ (X^t étant la transposée de X). C'est le critère le plus souvent utilisé, mais il y en a d'autres.

Les neuf points expérimentaux conduisent à un système de neuf équations à six inconnues (avec le modèle du second degré retenu). Système qui, sous forme matricielle, peut s'écrire :

$$Y = \begin{matrix} X & A \\ (9, 1) & (9, 6) & (6, 1) \end{matrix}$$

Ce système n'est pas résoluble directement car la matrice X n'étant pas carrée, elle n'est pas inversible. Multiplions les deux membres par X^t .

$$X^t Y = X^t X A$$

$X^t X$ est une matrice carrée (6,6) inversible si le déterminant de $X^t X$ n'est pas nul, on peut écrire alors :

$$A = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

Cette équation donne A , c'est-à-dire tous les coefficients du polynôme retenu a priori comme modèle mathématique représentatif du phénomène étudié. Cette dernière formule matricielle est valable quel que soit le nombre de facteurs. Pour deux facteurs la matrice-vecteur A contient six éléments; pour trois facteurs elle en aura dix et la matrice X sera une matrice (15,10) puisque le plan composite est constitué de quinze points expérimentaux (figure n° 14).

L'interprétation de ces plans reste relativement aisée pour deux facteurs puisqu'on peut dessiner les courbes d'isoreponses (des coniques) dans un plan. Mais, pour trois facteurs l'interprétation devient plus délicate car de nombreux cas sont possibles. Pour quatre facteurs, l'interprétation est très difficile et nécessite une étude théorique approfondie des courbes d'isoreponses. Il faut alors faire appel à l'analyse canonique.

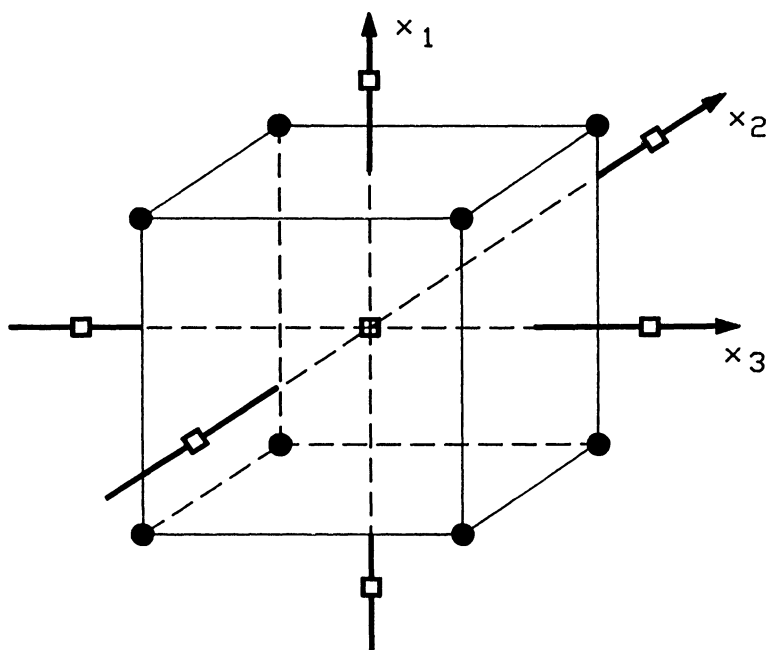


FIGURE 14

Les cercles noirs représentent les essais du plan 2^3 .

Les carrés blancs représentent les essais du plan en étoile associé au plan 2^3 .

Les plans en étoile associés aux plans factoriels sont de remarquables outils de travail pour l'expérimentateur. Ils permettent de mener un travail progressivement et rationnellement. Après les travaux exploratoires qui orientent le choix des facteurs à étudier et le domaine à explorer, l'expérimentateur possèdera les éléments pour

réaliser un premier plan factoriel fractionnaire. Ce plan lui indiquera si le domaine retenu doit être conservé et quelle est l'influence des différents facteurs. S'il existe encore des ambiguïtés à la fin de l'analyse de ce premier plan factoriel fractionnaire, l'expérimentateur pourra faire un plan complémentaire. Ayant défini le bon domaine et connaissant les facteurs influents, il doit s'assurer que le modèle du premier degré est valide. S'il l'est, il peut s'arrêter, s'il ne l'est pas, il doit passer à un modèle du second degré. C'est là que les points expérimentaux supplémentaires du plan en étoile sont précieux : ajoutés aux points expérimentaux des plans précédents ils conduisent à l'établissement d'un modèle du second degré avec une grande économie d'essais. Ce modèle du second degré est souvent suffisant pour représenter le phénomène étudié avec une bonne approximation. S'il s'avère nécessaire de posséder un modèle plus précis, on utilise des fonctions mathématiques plus complexes, les résultats expérimentaux restant, eux, toujours valables.

IX. Les plans de Doehlert

Doehlert a proposé une répartition uniforme des points expérimentaux dans l'espace expérimental [10]. Nous en donnons une illustration (figure n° 15) pour deux facteurs. Tous les points sont à la même distance du centre du domaine expérimental et sont régulièrement disposés sur le cercle trigonométrique. Ils forment un hexagone régulier. En prenant les coordonnées de chaque point expérimental, il est aisé de construire la matrice d'expériences qui est donnée par le tableau XX.

TABLEAU XX

N° de l'essai	x_1	x_2
1	0	0
2	-1	0
3	+1	0
4	-1/2	$-\sqrt{3}/2$
5	+1/2	$-\sqrt{3}/2$
6	-1/2	$+\sqrt{3}/2$
7	+1/2	$+\sqrt{3}/2$

Si l'expérimentateur désire réaliser des expériences supplémentaires pour explorer le domaine expérimental, il lui est facile d'ajouter des essais qui conservent la disposition régulière des points expérimentaux dans le plan. Par exemple, les trois points *A*, *B* et *C* (Figure n° 16) ajoutés aux points déjà existants 1, 3, 5, et 7 donnent à nouveau un hexagone régulier.

Dans un espace à trois dimensions, les points expérimentaux se répartissent régulièrement sur une sphère de rayon unité (on considère toujours des variables centrées réduites). Aux six points de l'hexagone régulier viennent s'ajouter six

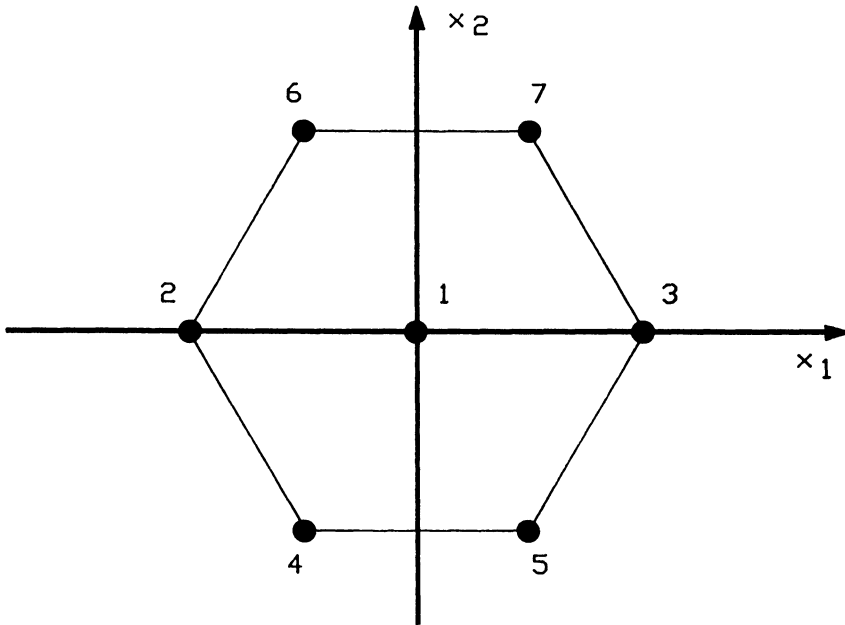


FIGURE 15

Disposition des points expérimentaux d'un plan de Doehlert pour deux facteurs.

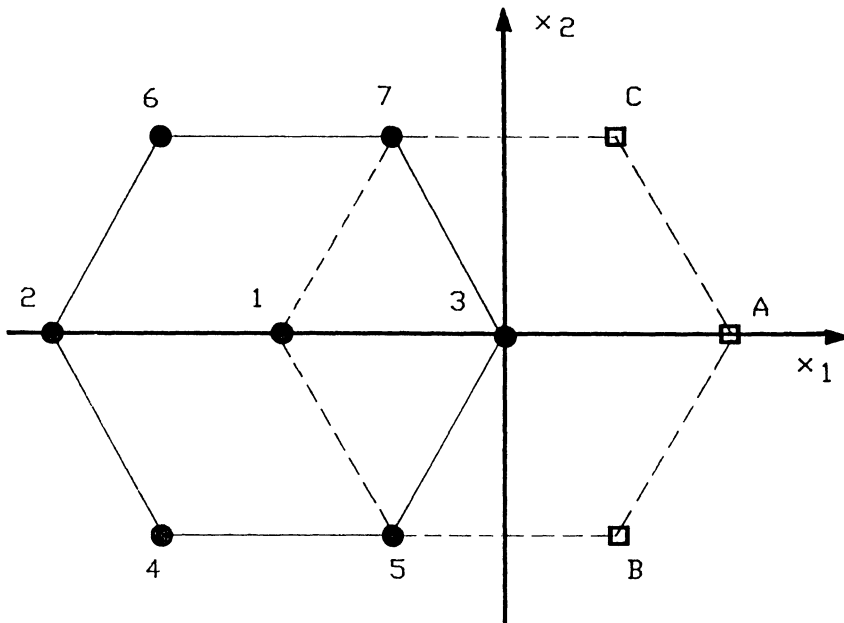


FIGURE 16

Un nouveau plan de Doehlert peut être construit en utilisant quatre résultats du plan précédent.

points supplémentaires, chacun d'eux formant un tétraèdre régulier avec ses proches voisins. La figure n° 17 indique la disposition des treize points expérimentaux dans le domaine expérimental. Le tableau XXI représente la matrice d'expériences correspondante. On constate que les facteurs 1 et 2 doivent pouvoir prendre cinq niveaux et que le facteur 3 doit pouvoir en prendre trois. Cette multiplicité de niveaux ne facilite pas la construction du plan d'expériences. Lorsqu'on passe à quatre facteurs et plus il devient difficile de définir soi-même les niveaux de chacun des facteurs et il faut avoir recours à des matrices préparées à l'avance. Par exemple nous donnons la matrice du plan de Doehlert pour quatre facteurs (tableau XXII). Elle correspond à vingt et un points régulièrement répartis sur l'hypersphère à quatre dimensions de rayon unité. Les plans de Doehlert permettent d'obtenir des modèles du second degré avec un minimum d'essais. Si on les compare aux plans composites on constate un léger gain : Pour deux facteurs il faut, avec un plan composite, neuf essais pour explorer le domaine expérimental et calculer les coefficients du modèle ; avec un plan de Doehlert il en faut seulement sept. Dans le cas où les essais sont longs ou coûteux, l'économie de deux expériences peut être avantageuse.

TABLEAU XXI

N° de l'essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	0	0	0
2	-1	0	0
3	1	0	0
4	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	0
5	+1/2	$-\sqrt{3}/2$	0
6	-1/2	$+\sqrt{3}/2$	0
7	+1/2	$+\sqrt{3}/2$	0
8	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$
9	0	$+1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$
10	+1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$
11	-1/2	$+1/2\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$
12	0	$-1/\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$
13	+1/2	$1/2\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$

Le modèle mathématique que l'on retient pour interpréter les résultats et construire la surface de réponse est, là aussi, un polynôme du second degré analogue à celui du plan composite. L'avantage est de n'avoir que sept équations au lieu de neuf (deux points expérimentaux en moins) pour déterminer six coefficients. L'inconvénient est d'être obligé de faire les sept expériences en bloc alors qu'un plan composite permet une expérimentation progressive : quatre points d'abord et cinq points supplémentaires ensuite, si nécessaire.

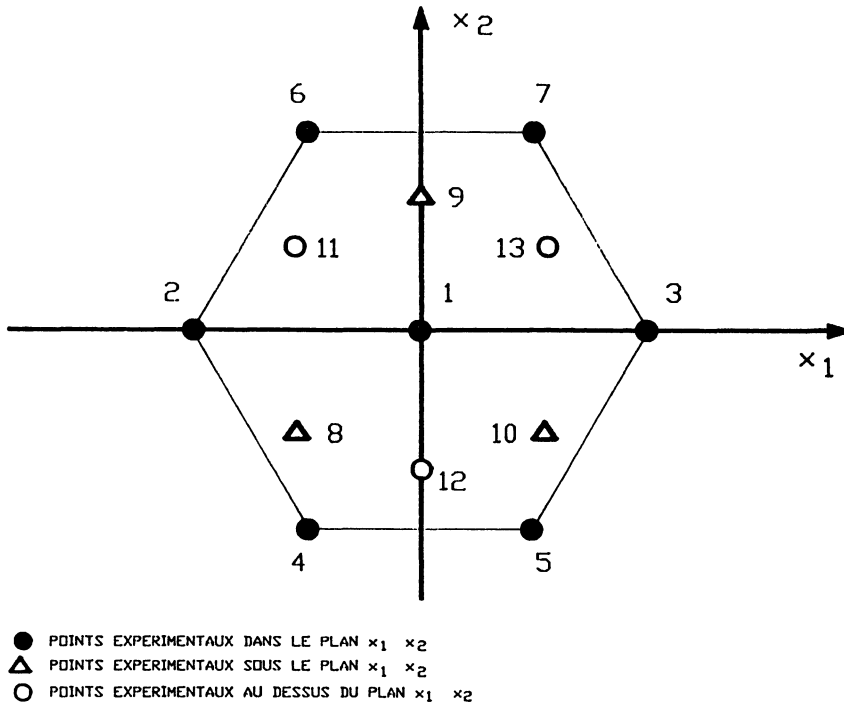


FIGURE 17

Disposition des points expérimentaux d'un plan de Doehlert pour trois facteurs.

X. Synthèse

Nous avons examiné sept types de plans d'expériences et nous avons vu au passage les principaux avantages et inconvénients de chacun. Il s'agit maintenant de les comparer et de savoir choisir celui (ou ceux) qui convient le mieux au problème à résoudre.

Nous avons vu que les plans de Plackett et Burman étaient des plans factoriels fractionnaires livrés sans mode d'emploi et que les risques de mauvaise utilisation et de mauvaise interprétation étaient patents. Nous avons également vu les efforts de Taguchi pour introduire, grâce aux graphes, un mode d'emploi qui se veut simple mais qui reste néanmoins insuffisant pour traiter tous les cas. Nous conseillons donc à tous les expérimentateurs désireux d'utiliser les plans factoriels fractionnaires de faire l'effort d'apprendre la théorie des alias. On trouvera celle-ci exposée en détail dans l'ouvrage [6]. C'est le seul moyen d'organiser l'ensemble de ses essais de manière raisonnée et efficace.

TABLEAU XXII

N° de l'essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4
1	0	0	0	0
2	-1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	0	0
5	+1/2	$-\sqrt{3}/2$	0	0
6	-1/2	$+\sqrt{3}/2$	0	0
7	+1/2	$+\sqrt{3}/2$	0	0
8	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$	0
9	0	$+1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$	0
10	+1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2/3}$	0
11	-1/2	$+1/2\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$	0
12	0	$-1/\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$	0
13	+1/2	$1/2\sqrt{3}$	$+\sqrt{2/3}$	0
14	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{24}$	$-\sqrt{5/8}$
15	0	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{24}$	$-\sqrt{5/8}$
16	0	0	$\sqrt{3/8}$	$-\sqrt{5/8}$
17	1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{24}$	$-\sqrt{5/8}$
18	-1/2	$1/2\sqrt{3}$	$1/\sqrt{24}$	$\sqrt{5/8}$
19	0	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{24}$	$\sqrt{5/8}$
20	0	0	$-\sqrt{3/8}$	$\sqrt{5/8}$
21	1/2	$1/2\sqrt{3}$	$1/\sqrt{24}$	$\sqrt{5/8}$

Les critères qui doivent être pris en compte pour choisir un plan d'expériences sont essentiellement les suivants :

Nombre juste suffisant d'essais pour trouver la solution du problème posé. Le critère n'est atteint que si l'on peut enchaîner les plans en réutilisant les premiers résultats pour interpréter l'ensemble. Certains plans se prêtent mieux que d'autres à l'acquisition progressive des connaissances. En particulier les plans factoriels fractionnaires associés aux plans en étoile sont tout à fait à conseiller.

L'optimalité du plan. Ce critère, très étudié par les statisticiens, consiste à disposer les points expérimentaux de manière à obtenir les coefficients du polynôme avec la précision la meilleure possible. Car, et peu d'expérimentateurs en sont conscients, la qualité globale des résultats dépend, en partie, de la manière dont les points expérimentaux sont disposés dans l'espace expérimental. Mais qu'ils se rassurent les plans proposés dans cet article peuvent être considérés comme optimaux.

Le degré du polynôme. Plus le degré du polynôme est élevé plus on a, théoriquement, de chances d'avoir un modèle proche de la réalité. Mais, les

polynômes de degré élevé réclament trop de points expérimentaux et leur validité est très douteuse en dehors du domaine expérimental. On se contente donc, la plupart du temps, de polynômes du premier et du second degré. Si l'étude l'exige, on préfère utiliser des fonctions mathématiques particulières pour mieux ajuster le modèle aux résultats expérimentaux. Cet aspect de l'interprétation requiert de solides connaissances mathématiques mais elle est facilitée par l'emploi des plans que nous avons conseillés dans cet article : plans factoriels fractionnaires et plans en étoile. Les plans que nous avons présentés sont basés sur des polynômes du premier et du second degré qui dans la plupart des cas sont largement suffisants.

Les plans doivent être faciles à construire et à interpréter. Se référer à des tables toutes faites signifie que l'on abandonne une partie de ses responsabilités et que l'on utilise une boîte noire. Les plans difficiles à construire ne se justifiaient que s'ils apportaient des avantages en contre-partie.

L'acquisition progressive des connaissances, comme nous l'avons vu, est le meilleur moyen de limiter le nombre des essais mais, c'est aussi, le meilleur moyen de suivre l'avancement des travaux. En effet, dès la fin du premier plan fractionnaire on peut souvent déjà savoir quels sont les facteurs qui ont une chance d'être influents et l'on peut évaluer l'intérêt du domaine expérimental choisi. Il arrive même parfois que l'on puisse définir, grâce à la méthode de la plus grande pente, dans quelle direction de recherche il faut aller pour trouver la solution intéressante.

Nous avons dressé un tableau (tableau XXIII) indiquant les caractéristiques essentielles des plans examinés dans cet article. Nous espérons faciliter ainsi le choix des expérimentateurs.

Un aspect mérite encore d'être traité. C'est la vérification de la validité du modèle mathématique du premier degré. Or aucun de ces plans ne prévoit un tel test de validité. C'est pourquoi nous préconisons de toujours ajouter au moins un point expérimental au centre du domaine expérimental. La valeur de la réponse en ce point sera comparée à la valeur déduite des autres points expérimentaux grâce au modèle mathématique. Si les deux valeurs sont semblables, le modèle mathématique sera adopté, si elles ne le sont pas on rejettera ce modèle et l'on complètera les résultats déjà obtenus par des expériences permettant de passer au second degré.

Enfin, comme il est nécessaire d'avoir une estimation de l'erreur expérimentale pour comparer les valeurs expérimentale et calculée, nous recommandons, si l'expérimentateur n'a pas déjà ce renseignement, de réaliser non pas un mais plusieurs essais au centre du domaine expérimental. Le nombre d'essais est laissé à l'appréciation de l'expérimentateur qui décidera en fonction du coût et du délai nécessaire à l'obtention de cette information.

La validité du modèle mathématique du second degré est moins facile à tester et dépasse le cadre de cet article. Nous n'en parlerons pas.

TABLEAU XXIII
Principales caractéristiques des plans d'expériences

		ACQUISITION PROGRESSIVE DES CONNAISSANCES					
Nombre d'essais		Optimalité	degré du polynôme	Facilité de construction et d'interprétation	Nombre facteurs influents	Changement de domaine	Augmentation du degré du polynôme
plans factoriels complets	vite élevé si beaucoup de facteurs	oui	1er	Très facile à construire et à interpréter	Facteurs influents déterminés avec sûreté	très facile : vecteur de plus	on les complète par les plans en étoile pour le
	réduit	oui	1er	Théorie des alias à connaître pour bien construire et bien interpréter	Les ambiguïtés doivent être levées par un ou plusieurs plans complémentaires	grande pente	second degré
Plackett et Burman	réduit	oui	1er	Pas de mode d'emploi	Application non prévue. Grand risque de mauvaises interprétations		
Tables de Taguchi	réduit	oui	1er	mode d'emploi (graphes) insuffisant	Facteurs influents déterminés. Risques d'ambiguïtés	Applications non prévues	
plans de Koshal	vite élevé si polynôme de degré élevé	non	1, 2ème, 3ème etc.	Nécessite l'emploi de plans établis à l'avance	Applications non prévues		
Plans en étoile	réduit	oui. choix du critère d'optimalité	2ème	Facile à construire. Interprétation difficile si plus de 3 facteurs influents	Le nombre de facteurs influents et le bon domaine doivent être déterminés avant l'emploi des plans en étoile		complètement harmonieusement les plans factoriels complets et fractionnaires
	Très réduit si on connaît les facteurs influents et le bon domaine	oui	2ème	Nécessite l'emploi de plans établis à l'avance au-delà de 3 facteurs	Non prévus pour la recherche des facteurs influents	Facile pour deux facteurs. Difficile pour plus de deux facteurs	On suppose dès le début des essais que la surface de réponse est du second degré

Conclusion

L'étude comparative que nous venons d'effectuer sur les principaux plans d'expériences, nous permet de tirer les enseignements suivants :

- des plans qui, sans être tout-à-fait équivalents, sont fort semblables. Ils portent des noms différents mais ils ont la même origine. Ils sont construits sur des matrices d'Hadamard. Il s'agit des plans de Placket et Burman, des tables de Taguchi et des plans factoriels complets ou fractionnaires. Nous avons vu qu'il était préférable d'utiliser ces derniers qui sont plus faciles à construire et qui conduisent à une interprétation fiable.

- lorsque le nombre de facteurs atteint quatre ou cinq, certains plans nécessitent d'effectuer beaucoup d'essais : plans factoriels complets ou plans de Doehlert. Ils ne doivent donc pas être employés au début d'une étude car beaucoup d'essais risquent d'apporter les mêmes informations. Une démarche progressive utilisant successivement des plans fractionnaires permettra de déceler les facteurs influents et les interactions significatives. L'ensemble des résultats trouvés pourra être présenté sous forme de plans complets.

- le modèle mathématique associé aux plans d'expériences est en général un polynôme du premier ou du second degré. Ils sont suffisants dans la majorité des cas et ce n'est qu'exceptionnellement qu'il faut faire appel à des fonctions mathématiques plus complexes.

Il en résulte que le choix d'un plan demande toujours une étude minutieuse afin de retenir le mieux adapté au problème posé. L'expérimentateur a tout intérêt à utiliser l'Acquisition Progressive des Connaissances qui l'amènera, en plusieurs étapes, dans la région expérimentale d'intérêt et qui le guidera vers le modèle mathématique le plus représentatif des résultats expérimentaux. C'est par l'enchaînement intelligent des divers plans et par des interprétations intermédiaires qu'il ajustera le mieux sa stratégie de recherche aux moyens (temps, argent, personnel) à sa disposition.

Bibliographie

Ouvrages cités

- [1] FISHER Ronald A. "Statistical Methods for Research Workers" Oliver and Boyd.(1925).
- [2] FISHER Ronald A. "The design of Experiments" Oliver and Boyd (1935)
- [3] BOX George.E.P , HUNTER William G. , HUNTER J.Stuart "Statistics for Experimenters" John Wiley and Sons 1971.
- [4] PLACKETT R. L. and BURMAN J.P. "The design of optimum multifactorial experiments" *Biometrika*,n° 33,1946.
- [5] TAGUCHI Genichi and WU Yui "Introduction to off-line quality control " Central Japan Quality Control Association 4-10-27 Meieki Nakamura-ku Nagaya, Japan. February 1985

- [6] GOUPY Jacques. "La Méthode des Plans d'Expériences" DUNOD. Paris (1988)
- [7] VIGIER Michel G. "Pratique des plans d'expériences. Méthodologie TAGUCHI" Les Editions d'organisation. Paris. (1988)
- [8] BOX George E.P., DRAPER Norman R. "Empirical Model-Building and Response Surface" John Wiley and Sons, New-York (1987)
- [9] DANIEL Cuthbert and WOOD Fred S. "Fitting Equations to Data" John Wiley and Sons 1971
- [10] DOEHLERT David H. "Uniform Shell Design" Applied Statistics n° 19, p. 231. (1970)

Autres ouvrages conseillés

- [11] CHAPOUILLE "Planification et analyse des expériences" MASSON 1973 -
- [12] BENOIST D. "Notions sur les Plans d'Expériences" Société des éditions TECHNIP . Paris (1974).
- [13] COCHRAN W.G., COX G., "Experimental design" John Wiley and Sons 1966
- [14] DEMING Stanley N.and MORGAN Stephen L. "Experimental design : a chemometric approach." Elsevier 1987
- [15] MASSART Désiré L., DIJKSTRA Auke, KAUFMAN Léonard. "Evaluation and Optimisation of Laboratory Methods and Analytical Procedures" Elsevier Scientific Publishing Company (1978).
- [16] DRAPER Norman R. and JOHN J.A. "Responses Surfaces Designs for Quantitative and Qualitative Variables" Technometric, november 1988, vol. 30, N° 4.
- [17] GOUPY Jacques. "Erreur de dérive et choix de l'ordre des essais d'un plan d'expériences factoriel" Revue de statistique appliquée, vol. 37 (1), 5-22. (1989)
- [18] YUZHU Hu "Program for Doehlert matrix design of Experiment " Trends in Analytical Chemistry, vol 8, n° 4 (1989)
- [19] FEINBERG M. et WIRTH P. "Aperçu des méthodes d'optimisation en chimie analytique " Analisis, vol 12, n° 10 (1984)
- [20] DAVIES Owen L. "The Design and Analysis of Industrial Experiments" Oliver and Boyd. (1971)
- [21] DANIEL Cuthbert "Applications of Statistics to Industrial experimentation" John Wiley and Sons 1976
- [22] SADO Gilles et GOUPY Jacques L. "La méthodologie des plans d'expériences appliquée à l'optimisation du réglage d'un spectrofluorimètre." Analisis, 1986, Vol. 14, n° 8, p. 389-400