

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. BARDIN

J. M. AZAIS

Une hypothèse minimale pour une théorie des plans d'expériences randomisés

Revue de statistique appliquée, tome 38, n° 2 (1990), p. 21-41

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1990__38_2_21_0

© Société française de statistique, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE HYPOTHÈSE MINIMALE POUR UNE THÉORIE DES PLANS D'EXPÉRIENCES RANDOMISÉS

A. BARDIN & J.M. AZAIS

Laboratoire de Biométrie, INRA, F78026 Versailles

RÉSUMÉ

Dans un premier temps nous présentons de manière précise les plans randomisés par permutation aléatoire des unités expérimentales. Dans un deuxième temps nous étudions le modèle obtenu sous une hypothèse très faible portant sur l'ensemble des permutations possibles : celui-ci forme un groupe simplement transitif; c'est-à-dire que n'importe quelle unité est l'image, par au moins une permutation du groupe, de n'importe quelle autre. Sans autre hypothèse, nous montrons que les données peuvent être analysées par un modèle mixte régulier dont la forme est indépendante des valeurs parcellaires. Enfin, à l'opposé de l'approche classique, nous introduisons la notion de modèle mixte stratifiable. Nous montrons, par un contre exemple, que le modèle issu de la randomisation est en général non stratifiable. Celui-ci est cependant toujours analysable en ayant recours à des moindres carrés généralisés.

Mots-clés : groupe, modèle mixte, permutation, plan d'expérience, randomisation, strate.

SUMMARY

In the first part we give a precise description of randomization of designed experiments via a random permutation of the experimental units. In the second part we study the model obtained under a very weak assumption about the set of possible permutations : it forms a simply transitive group i.e. : any plot is the image of any other plot. Without any other assumptions we show that the data obtained can be analysed by a regular mixed model, the form of which does not depend on the plot values. Finally we introduce the concept of a stratifiable mixed model which distinguishes our approach from classical ones. We show by a counter-example that the model obtained after randomization is not always stratifiable. However it can always be analysed by generalised least squares.

Key-words : designs of experiments, randomization, group of permutations, mixed models, stratum.

I. Introduction

Comment comparer des traitements que l'on observe sur des unités expérimentales (ou *parcelles*) distinctes ? Cela a toujours constitué un problème statisti-

que délicat même si les réponses proposées ont varié au cours du temps et sont susceptibles de varier dans le futur.

Ces méthodes ont été introduites historiquement dans un contexte agronomique : le problème est de comparer différents traitements comme des engrais ou des variétés sur un champ découpé en petites parcelles de même taille. On désire éliminer l'effet de la fertilité du terrain pour pouvoir comparer des mesures effectuées sur des parcelles physiquement éloignées.

La première méthode proposée semble être la méthode des parcelles témoins (Wiancko 1914). Elle consiste à introduire dans l'expérience en plus des traitements à comparer, un traitement témoin que l'on place sur des parcelles régulièrement espacées dans le dispositif. Ce type de "plan" était conçu au départ pour des dispositifs sans répétition : un traitement n'était observé qu'une fois et sa valeur était estimée par la différence ou le rapport entre d'une part la mesure faite sur le traitement lui-même, et d'autre part un index pondérant les valeurs des parcelles témoins les plus voisines. Cette méthode a connu certains raffinements dans le cas où l'on fait des répétitions des traitements (Wiancko, Army et Salmon 1921).

Une autre voie a été l'utilisation de plans systématiques en essayant de répartir au mieux les différentes répétitions des traitements dans le champ. On peut par exemple les déplacer suivant la marche du cavalier aux échecs (Tedin 1931). Les valeurs des traitements étaient alors estimées par de simples moyennes.

Nommé à la station expérimentale de Rothamsted à partir de 1919, Fisher s'est trouvé confronté au problème de comparaisons variétales et il a proposé l'utilisation de la randomisation pour remédier au principal défaut de la méthode des plans systématiques : l'absence d'estimation fiable de l'erreur d'estimation des traitements. La randomisation permet en effet de valider une analyse statistique avec des erreurs indépendantes et de tester la significativité du résultat par le test qui s'appelle maintenant le test de Fisher (1925, 1935).

Pour cette raison la méthode des plans systématiques a été peu à peu abandonnée. Par ailleurs Yates (1936) a montré que la méthode des parcelles témoins était moins efficace qu'un plan en blocs incomplets randomisé appelé à devenir classique : le lattice. En effet toutes les parcelles utilisées pour le témoin sont perdues pour l'expérience elle-même. la méthode des parcelles témoins a donc elle aussi été grandement abandonnée et les expériences randomisées sont devenues la règle courante.

Au cours du temps la démarche de Fisher a été considérablement généralisée. Yates (1936, 1940) a introduit les blocs incomplets; Grundy et Healy (1950) ont introduit la randomisation restreinte : dans ce dernier cas on ne dispose plus les traitements au hasard, mais on impose des conditions, par exemple sur la présence des traitements dans les lignes ou les colonnes ou sur l'équilibre des voisinages (Azaïs, 1987).

Cependant la philosophie de la randomisation n'est pas simple : on considère une population d'expériences. Aussi dès que l'on quitte les cas originels de la randomisation totale ou des blocs complets, il faut introduire certaines entités abstraites comme les "parcelles virtuelles" (cf § IV.1) pour pouvoir faire une présentation rigoureuse. Nous insistons bien sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un formalisme gratuit mais d'une nécessité incontournable.

L'objet de cet article est donc d'introduire ce formalisme à partir d'exemples simples et de montrer qu'il permet ensuite d'étendre la théorie de la randomisation à des cas bien plus généraux que ce qui a été publié jusqu'à présent (à notre connaissance). En effet sous des hypothèses minimales on obtient un modèle (au second ordre, c.a.d. défini par son espérance et sa variance) qui ne dépend plus des valeurs parcellaires. Ce modèle rend possible une analyse statistique et une comparaison des traitements.

II. Cadre de l'étude

Nous considérons des expériences dont le but est de comparer un ensemble de traitements. Nous supposons de plus, comme c'est souvent le cas en pratique, qu'un seul traitement peut être observé sur une unité expérimentale donnée; les comparaisons doivent donc se faire à partir de données issues d'unités expérimentales différentes.

La théorie des plans d'expériences vise à obtenir des comparaisons aussi fiables que possible. Bailey (1981) a proposé une présentation générale de cette théorie en quatre étapes :

1°) *Description* : choix d'un modèle déterministe, sensé représenter l'état de la nature (non analysable).

2°) *Randomisation* : du modèle précédent on déduit un modèle statistiquement analysable (on parlera de modèle randomisé ou d'expérience randomisée).

3°) *Planification* : choix du type d'expérience déterminant les propriétés statistiques du modèle.

4°) *Analyse* : analyse du modèle statistique sur l'expérience réalisée.

Tout en distinguant les mêmes quatre étapes, nous adoptons quelques points de vue originaux par rapport à la présentation de Bailey. En particulier, lors de la seconde étape, la randomisation sera décrite par un groupe de permutations simplement transitif quelconque, généralisant ainsi l'approche de Bailey qui se limite à l'étude des groupes de permutations conservant des structures de blocs (*allowable permutations*).

Cette généralisation implique, comme nous le verrons, l'abandon de la décomposition du modèle en strates, chère à l'école anglaise. La décomposition en strates nous paraît une notion extrêmement intéressante pour les plans orthogonaux comme les split-plots. Dans les autres cas elle était incontournable du temps de Yates (1936) pour des raisons calculatoires. A l'heure actuelle l'informatique permet de réaliser des calculs de moindres carrés généralisés (Fraser 1957). L'intérêt des strates réside donc essentiellement dans l'interprétation des confusions.

La question se pose de savoir si les modèles mixtes généraux peuvent être décomposés en strates. Comme nous le montrons par un contre-exemple, la réponse est non, même dans le cas particulier des modèles issus d'une randomisation. Nous introduisons donc les notions de modèles mixtes *stratifiables* ou *non-stratifiables*.

Enfin, à propos de la quatrième étape, nous utilisons la notion "d'équivalence de modèles" pour donner une base théorique permettant de contourner le problème de singularité de la matrice de covariance.

Nous notons T l'ensemble des t traitements, U l'ensemble des n unités expérimentales, et $Z_{k\alpha}$ la réponse de l'unité α au traitement k . L'ensemble des réponses possibles n'existe bien sûr que virtuellement puisqu'il n'y a qu'une seule observation par unité. Le modèle que nous posons sur les réponses $Z_{k\alpha}$ est le modèle additif pour les deux effets traitement et unité (pour une étude sans cette hypothèse voir Coursol 1981), soit :

$$Z_{k\alpha} = \theta_k + u_\alpha \quad (1)$$

où θ_k et u_α représentent respectivement l'effet traitement et l'effet unité ou valeur parcellaire. De plus, pour éviter que ces quantités ne restent définies qu'à une constante près, nous posons $u. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = 0$.

Lorsque l'expérience est réalisée, n mesures sont disponibles. Eliminons dans (1) les $nt - n$ équations correspondant aux combinaisons non réalisées. Les n équations restantes forment ce que nous appelons un *modèle réalisable*. Celui-ci est non analysable car surparamétré : $n + t - 1$ paramètres pour n données.

Nous verrons plus loin que la randomisation est un moyen de contourner ce problème. Pour comprendre cette méthode il suffit de remarquer que les équations du modèle réalisable obtenu plus haut ne dépendent que du choix des n combinaisons traitement-unité de l'expérimentateur. Or celui-ci a en général une certaine plage de combinaisons possibles entre lesquelles il ne peut choisir qu'arbitrairement. La randomisation se comprend donc intuitivement puisqu'elle s'interprète comme une élimination de cet arbitraire par le tirage d'une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des modèles réalisables possibles.

Comme indiqué en introduction, différentes méthodes ont été envisagées pour éliminer le problème de surparamétrisation. Une solution qui semble attractive est simplement d'assigner une structure aléatoire a priori aux effets unité au lieu de les garder comme paramètres fixes inconnus. Ceci est une démarche classique en statistique mais qui, contrairement à la randomisation, est basée sur des hypothèses difficilement vérifiables relatives aux u_α .

Il faut noter que la randomisation peut a priori diminuer la précision des estimations, car l'information relative à l'allocation des traitements est ignorée. Mais le point de vue de Fisher, qui est aussi le nôtre, est que la randomisation est certainement la meilleure façon d'ignorer cette information, ce qui peut être préférable à une mauvaise utilisation de celle-ci.

On peut distinguer deux types de randomisations : la randomisation totale et les randomisations restreintes. En IV) nous ferons une présentation des randomisations construites à partir de groupes de permutations, dont la randomisation totale est un cas particulier. Avant cela, nous allons détailler l'exemple de la randomisation totale et introduire ainsi la démarche générale.

Dans toute la suite nous noterons :

$\mathbf{1}_i$ le vecteur colonne de longueur i formé de 1,

\mathbf{I}_i la matrice identité (i, i) ,

J_i la matrice (i, i) d'éléments tous égaux à 1,
 $|\mathcal{E}|$ pour le cardinal de l'ensemble \mathcal{E} ,
 $\mathbf{1}_i^\perp$ l'orthogonal (pour le produit scalaire usuel) dans \mathbb{R}^i du sous-espace $\{\lambda \mathbf{1}_i / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

III. Plan complètement randomisé à r répétitions

La randomisation est présentée ici dans le cas le plus simple : n est supposé multiple de t : $n = tr$, où r est le nombre de répétitions de chaque traitement. La randomisation totale se définit ainsi de façon simple (pour les autres cas il faut utiliser la méthode générale du § IV)) : pour chacune des r répétitions de chaque traitement on tire sans remise dans U , et de façon équiprobable, une unité. Pour la répétition j du traitement k , soient :

Y_{kj} la réponse (aléatoire) de la parcelle correspondante.

θ_k comme précédemment l'effet traitement (non aléatoire).

ε_{kj} l'effet (aléatoire) de la parcelle correspondante. Nous l'appellerons erreur pour la distinguer de l'effet unité (non aléatoire).

Le modèle issu de (1) s'écrit donc :

$$Y_{kj} = \theta_k + \varepsilon_{kj}, \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, r.$$

Soit matriciellement :

$$Y = X\theta + \varepsilon, \tag{2}$$

où θ est le t -vecteur des effets traitement, X la matrice $(n, t) = (tr, t)$ du plan d'expérience :

$$X = \begin{bmatrix} 1_r & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1_r & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1_r \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \cdot \\ Y_{1r} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{tr} \end{bmatrix},$$

et ε est le n -vecteur aléatoire des erreurs.

Le plan randomisé est presque entièrement décrit par le modèle (2). Il reste à préciser la structure aléatoire du vecteur ε . Ses deux premiers moments sont donnés par le lemme suivant :

Lemme I : Soit ε le vecteur obtenu par n tirages sans remises parmi n valeurs u_1, \dots, u_n vérifiant : $\sum_{i=1}^n u_i = nu. = 0$. Alors :

$$E(\varepsilon) = 0, Var(\varepsilon) = \sigma_u^2 \left(I_n - \frac{J_n}{n} \right)$$

avec :

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^2.$$

Preuve : On voit facilement par dénombrement, $\forall \ell, \forall \ell' \neq \ell$:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_\ell) &= \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \Pr(\varepsilon_\ell = u_\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha &= u. = 0, \\ E(\varepsilon_\ell^2) &= \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^2 \Pr(\varepsilon_\ell = u_\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^2 &= \frac{n-1}{n} \sigma_u^2, \\ E(\varepsilon_\ell \varepsilon_{\ell'}) &= \sum_{\alpha \neq \beta} u_\alpha u_\beta \Pr(\varepsilon_\ell = u_\alpha, \varepsilon_{\ell'} = u_\beta) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} u_\alpha u_\beta &= -\frac{1}{n} \sigma_u^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque :

L'évènement $(\varepsilon_\ell = u_\alpha)$ doit être compris : "le $\alpha^{\text{ième}}$ élément de la suite u_1, \dots, u_n est tiré au $\ell^{\text{ième}}$ tirage". Cela pour éviter les complications dues à d'éventuelles égalités de termes dans cette suite.

On voit que le modèle (2) est différent du modèle d'analyse de variance à un facteur :

$$\tilde{Y} = X\theta + \tilde{\varepsilon}, E(\tilde{\varepsilon}) = 0, V(\tilde{\varepsilon}) = \sigma_u^2 I_n, \quad (2')$$

cependant, pour l'estimation des contrastes (c'est-à-dire des différences entre traitement), il est immédiat que (2) et (2') sont équivalents au sens suivant :

Définition 1 : Deux vecteurs aléatoires, de dimension n , Y_1 et Y_2 suivent deux modèles dits équivalents pour l'estimation des contrastes si QY_1 et QY_2 , où :

$$Q = I_n - \frac{J_n}{n},$$

ont même espérance et même variance.

Cette définition doit se comprendre en remarquant que Q est la matrice de projection orthogonale sur 1_n^\perp dans \mathbf{R}^n . Il est bien connu (voir par exemple Coursol, 1981) que cette projection est seule pertinente pour l'estimation linéaire des contrastes. Ainsi on peut remplacer un modèle par un autre puisqu'on travaille toujours au deuxième ordre et qu'on ne s'intéresse qu'aux contrastes.

En conclusion, nous prétendons que (2) peut être traité comme un modèle d'analyse de variance à un facteur. L'intérêt du résultat obtenu est double : d'une part il permet de justifier une pratique courante, et d'autre part on remarque que la matrice de covariance du modèle initialement singulière a pu être ramenée à une matrice régulière.

IV. Plan randomisé par un groupe de permutations

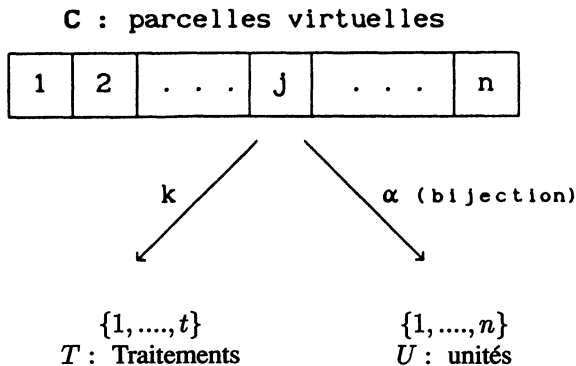
Remarquons d'abord que la randomisation totale peut être vue comme un cas particulier d'une famille très générale de randomisations. En effet, nous avons vu qu'elle consiste à tirer sans remise les n unités. Cela est strictement équivalent à tirer, de manière équiprobable, une permutation dans l'ensemble S_n de toutes les permutations de n objets (en l'occurrence ici : les n unités). La randomisation totale peut donc être décrite de la façon suivante : on alloue les traitements aux unités de manière quelconque; on tire ensuite, de manière équiprobable, une permutation de S_n ; à l'aide de cette permutation on permute l'allocation initiale des traitements aux unités. Une généralisation immédiate consiste à choisir la permutation de manière uniforme dans un sous ensemble \mathcal{H} de S_n . Pour disposer des outils combinatoires de la théorie des groupes finis, et pour avoir un ensemble suffisamment riche, nous considérons le cas où : 1°) \mathcal{H} est un sous-groupe de S_n , et 2°) \mathcal{H} est simplement transitif (cf. IV.2, définition II).

La classe de randomisation ainsi obtenue englobe toutes les randomisations classiques, elle permet de généraliser les résultats de Bailey et Rowley (1988).

1°) Détermination des modèles réalisables

Dans la description ci-dessus, la première allocation des traitements aux unités n'est pas réalisée : elle est *virtuelle*. Nous introduisons donc la notion de *parcelles virtuelles* qui n'a pas de réalité matérielle, mais permet une description rigoureuse de la randomisation. En effet on ne peut pas, à cause de la randomisation, écrire un modèle sur les unités expérimentales (les parcelles du champ). En dehors de cas simples, tel que la randomisation totale (§ III), on doit avoir recours à ces parcelles virtuelles pour obtenir un modèle. Cette notion permet, dans tous les cas, l'obtention d'une indispensable numérotation des données.

Soient donc C l'ensemble des n parcelles virtuelles, α une bijection de C sur U , et k une application de C sur T . Nous obtenons le modèle réalisable, compte tenu de k et α , en procédant comme ci-dessous :



Sous l'hypothèse d'additivité (1) le modèle réalisable pour k et α s'écrit (j indice les parcelles virtuelles) :

$$Y_j = \theta_{k(j)} + u_{\alpha(j)}, \quad j \in C.$$

Soit sous forme matricielle :

$$Y = X\theta + Z_\alpha u \quad (3)$$

où : X est la matrice (n, t) du plan d'expérience, dépendant uniquement de k ,
 Z_α est la matrice (n, n) d'incidence des unités, dépendant uniquement de α .

2°) Randomisation du modèle (3)

Le modèle (3) ne contient pas, pour l'instant, de terme aléatoire puisque nous supposons que les applications k et α sont données. La randomisation intervient au niveau du choix aléatoire de la bijection α . Puisque $C = U = \{1, \dots, n\}$, et pour éviter d'introduire des notations trop lourdes, nous assimilons α à une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$.

Comme déjà indiqué nous limitons notre attention aux cas où α a une loi uniforme sur un sous-groupe \mathcal{H} de S_n simplement transitif, soit :

$$\Pr(\alpha = \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{H}|} & \text{si } \sigma \in \mathcal{H} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous rappelons la définition de la transitivité :

Définition II : On dit que \mathcal{H} , sous-groupe de S_n , est simplement transitif si :
 $\forall (i, \beta) \in \{1, \dots, n\}^2, \exists \sigma \in \mathcal{H}; \sigma(i) = \beta$.

Nous appelons modèle randomisé le modèle déduit de (3) où Z_α est maintenant une matrice aléatoire. Soit en notant ε le vecteur aléatoire $Z_\alpha u$:

$$Y = X\theta + \varepsilon \quad (4)$$

3°) Equivalence avec un modèle mixte singulier

Dans ce sous-paragraphe nous allons montrer que le modèle (4) est équivalent (définition I) à un modèle mixte singulier dans un sens très proche de celui donné par C.R. Rao et J. Kleffe (1980), soit :

Définition III : Soit un vecteur aléatoire Y tel que $Y = X\theta + \varepsilon$, où : X est une matrice donnée, θ est un vecteur inconnu de paramètres fixes, et ε est un

vecteur aléatoire tel que :

$$E(\varepsilon) = 0, \text{Var}(\varepsilon) = V = \sum_{i=1, k} \lambda_i V_i \quad (5)$$

où les V_i sont des matrices symétriques connues, et les λ_i , appelées composantes de la variance, sont des paramètres fixes inconnus tels que V soit semi-définie positive.

On dira que Y suit le modèle mixte (5) si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$ appartient à une partie contenant un ouvert de \mathbb{R}^k . On dira de plus que le modèle est, respectivement, régulier ou singulier suivant que V est une matrice toujours (i.e. pour tout λ dans l'ensemble des valeurs précédemment défini) régulière ou toujours singulière (notons qu'il existe des modèles ni réguliers ni singuliers).

Evidemment toute matrice symétrique peut être écrite comme combinaison linéaire de matrices symétriques connues. Le problème est d'obtenir une décomposition de la matrice de covariance telle que les contraintes sur les composantes de la variance ne soient pas "trop importantes". Ceci explique l'hypothèse faite sur λ . Toutefois s'il n'existe qu'une contrainte linéaire, elle peut être éliminée par reparamétrisation de sorte que la définition III soit vérifiée (cf. 4°)).

Montrons d'abord que le vecteur ε est d'espérance nulle. Nous avons, compte tenu des hypothèses, pour tout $i \in C$:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= E(u_{\alpha(i)}) = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} u_{\sigma(i)} = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\beta \in U} u_{\beta} |\{\sigma \in \mathcal{H} / \sigma(i) = \beta\}| \\ &= \frac{\text{cte}}{|\mathcal{H}|} \sum_{\beta \in U} u_{\beta} = \frac{\text{n.cte}}{|\mathcal{H}|} u. = 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la matrice de covariance du vecteur ε :

$$V = \text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon') = E(Z_{\alpha} u u' Z'_{\alpha}).$$

Soit :

$$V = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} Z_{\sigma} u u' Z'_{\sigma}.$$

Ou bien;

$$V_{ij} = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} [Z_{\sigma} u]_i [Z_{\sigma} u]_j = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} u_{\sigma(i)} u_{\sigma(j)}.$$

Nous rappelons ci-dessous les quelques définitions et résultats relatifs à la théorie des groupes qui nous seront utiles (Hall, 1959 ou Ledermann, 1973).

Définition IV : Soit \mathcal{H} un sous-groupe de S_n :

i) • On appellera orbites doubles de \mathcal{H} , les orbites de ce groupe opérant sur $\{1, \dots, n\}^2$; c'est-à-dire les ensembles de couples du type (pour (i, j) dans UxU) : $O_{ij} = \{(\sigma(i), \sigma(j)) / \sigma \in \mathcal{H}\}$. Par la suite, comme il n'y aura pas d'ambiguïté, nous les dénommerons "orbites".

• O_{ji} , encore notée O'_{ij} , est appelée orbite symétrique de O_{ij} , et on dit que O_{ij} est symétrique si : $O_{ij} = O_{ji}$.

• On notera $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ l'ensemble des orbites de \mathcal{H} , $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ l'ensemble des orbites symétriques, et $\mathcal{R}_2(\mathcal{H})$ un ensemble de représentants des paires $\{O, O'\}$ pour les orbites O non symétriques (i.e. $O \in \mathcal{R}(H) / \mathcal{R}_1(\mathcal{H})$). S'il n'y a pas d'ambiguïté on notera encore ces ensembles respectivement : \mathcal{R} , \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .

ii) On appellera matrice indicatrice de l'orbite O , la matrice $M(O)$ définie par :

$$[M(O)]_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } (k, l) \in O \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces définitions impliquent de manière évidente le résultat :

Proposition I :

i) L'ensemble des orbites $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ constitue une partition de l'ensemble des couples de $\{1, \dots, n\}^2$. Cela signifie que tout couple appartient à une orbite et une seule, ce qui peut se traduire par : les matrices indicatrices d'orbites ont des supports disjoints et leur somme est la matrice formée de 1 ; c'est-à-dire :

$$\forall O_1 \neq O_2, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : [M(O_1)]_{ij} \cdot [M(O_2)]_{ij} = 0,$$

et :

$$\sum_{O \in \mathcal{R}} M(O) = J_n.$$

ii) Pour toute orbite O dans $\mathcal{R}(H)$: $M(O)' = M(O)$.

iii) Le vecteur 1_n est vecteur propre de toute matrice indicatrice d'orbite, précisément : $\forall O \in \mathcal{R}; M(O) \cdot 1_n = \frac{|O|}{n} \cdot 1_n$.

La raison essentielle de l'introduction des orbites tient dans la proposition suivante :

Proposition II : Si \mathcal{H} est un sous groupe simplement transitif de S_n , les termes génériques de la matrice $V = E(Z_\alpha u u' Z'_\alpha)$ sont constants sur toute orbite de \mathcal{H} .

Preuve : Nous avons $V_{ij} = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} u_{\sigma(i)} u_{\sigma(j)}$ et $\forall \eta \in \mathcal{H}$:

$$V_{\eta(i), \eta(j)} = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} u_{\sigma \circ \eta(i)} u_{\sigma \circ \eta(j)} = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} u_{\sigma(i)} u_{\sigma(j)} = V_{ij},$$

puisque dans un groupe les translations sont des bijections ■

Des propositions I.i) et II nous déduisons que V est une combinaison linéaire des matrices indicatrices d'orbites, soit (une formule explicite des paramètres $\emptyset(O)$ est donnée en annexe) :

$$V = \sum_{O \in \mathcal{R}} \emptyset(O).M(O).$$

De plus cette somme se réécrit aisément de manière à ne faire apparaître que des matrices symétriques. En effet la symétrie de V implique de manière immédiate $\emptyset(O) = \emptyset(O')$ pour tout O dans \mathcal{R} . Il vient donc :

$$V = \sum_{O \in \mathcal{R}_1} \emptyset(O).M(O) + \sum_{O \in \mathcal{R}_2} \emptyset(O).[M(O) + M(O')]$$

où, d'après la proposition I.ii), les matrices $[M(O) + M(O')]$ sont symétriques. Enfin compte tenu de la singularité de V et de la proposition I.iii) les $k = |\mathcal{R}_1| + |\mathcal{R}_2|$ paramètres $\emptyset(O)$ vérifiant l'équation :

$$\sum_{O \in \mathcal{R}_1} \emptyset(O).|O| + 2 \sum_{O \in \mathcal{R}_2} \emptyset(O).|O| = 0. \tag{6}$$

Soit \mathcal{F} l'ensemble parcouru par les $\emptyset(O)$ dans \mathbb{R}^k quant u parcourt \mathbb{R}^n avec la contrainte $u. = 0$. \mathcal{F} appartient à la sous-variété linéaire \mathcal{L} de \mathbb{R}^k définie par l'équation (6). Nous montrons en annexe que \mathcal{F} est fermé et d'intérieur non vide dans \mathcal{L} , ce qui correspond bien aux contraintes sur l'ensemble des composantes de la variance (à une contrainte linéaire près) du modèle mixte (5). Nous obtenons donc :

Proposition III : Si \mathcal{H} est un groupe simplement transitif de S_n , alors le modèle randomisé (4) est un modèle mixte (à une reparamétrisation près) singulier tel que :

$$V = Var(\epsilon) = \sum_{O \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \emptyset(O).V(O)$$

où :

- les $\emptyset(O)$ sont des paramètres inconnus dépendant de \mathcal{H} et de u ,
- les $V(O) = \begin{cases} M(O) & \text{si } O \text{ est symétrique} \\ M(O) + M(O') & \text{sinon} \end{cases}$, sont des matrices symétriques ne dépendant que des orbites de \mathcal{H} .

Cette proposition montre bien que l'espérance et la variance du vecteur ϵ ne dépendent pas des valeurs parcellaires, mais uniquement du groupe \mathcal{H} .

4°) Equivalence avec un modèle régulier, reparamétrisation

Nous avons montré que toute expérience randomisée conduit à un modèle mixte singulier. La singularité est en général une caractéristique indésirable. En effet elle signifie que le vecteur des observations Y , de dimension n , se trouve dans un sous-espace strict de \mathbb{R}^n . De plus, les algorithmes d'estimations sont plus complexes car ils doivent faire appel à des pseudo-inverses. Toutefois on peut ici s'affranchir de ces difficultés en procédant, comme au § III), par équivalence de modèles. Il nous suffit de montrer que le modèle (4) est équivalent, au sens de la définition I, à un modèle mixte régulier.

Soit Q , définie en III), la matrice de projection orthogonale sur l'espace des contrastes, et soit le modèle :

$$\tilde{Y} = X\theta + \tilde{\varepsilon}, E(\tilde{\varepsilon}) = 0, \text{Var}(\tilde{\varepsilon}) = \tilde{V} = V + \alpha J_n, \alpha > 0. \quad (4')$$

Il est immédiat que (4) et (4') sont équivalents au sens de la définition I puisque $Q.J_n = 0$. Il reste à vérifier que \tilde{V} est effectivement régulière. Or nous rappelons que pour toute matrice A symétrique et semi-définie positive :

$$x \in \text{Ker}(A) \iff x'Ax = 0.$$

$$\text{et : } x \in \text{Ker}(V) \iff \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} x'Z_\sigma u u' Z'_\sigma x = 0 \iff \forall \sigma \in \mathcal{H}, x'Z_\sigma u = 0$$

$$\iff x'u = 0,$$

et prenant σ égal à l'identité.

Comme u est quelconque sous l'unique contrainte $u_n = 0$, le noyau de V se réduit à la droite engendré par le vecteur 1_n . D'où, compte tenu de $\text{Ker}(J_n) = 1_n^\perp$, nous obtenons :

Proposition IV : Le modèle mixte singulier (4) issu de la randomisation est équivalent (pour l'estimation des contrastes) à tout modèle mixte régulier du type (4').

Nous pouvons maintenant donner une reparamétrisation de la matrice de covariance obtenue à la proposition III, conduisant explicitement à un modèle mixte régulier. En effet, la relation (6) s'écrit :

$$\sum_{O \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \emptyset(O).a(O) = 0,$$

où les $a(O)$ sont des entiers positifs proportionnels aux $|O|$. Puisque les $\emptyset(O)$ ne peuvent être tous nuls, il existe nécessairement O_k dans $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ telle que

$\emptyset(O_k) < 0$. D'autre part, compte tenu de la proposition I.i) :

$$V(O_k) = J_n - \sum_{O \in \{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}/O_k} V(O).$$

D'où :

$$V = \sum_{O \in \{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}/O_k} [\emptyset(O) - \emptyset(O_k)] \cdot V(O) + \emptyset(O_k) \cdot J_n$$

Puisque $\emptyset(O_k) < 0$, nous pouvons éliminer le terme $\emptyset(O_k) \cdot J_n$ dans V pour obtenir un modèle mixte régulier équivalent au modèle randomisé. D'où :

Proposition V : Le modèle randomisé (4) est équivalent (pour l'estimation des contrastes) au modèle mixte régulier : $\tilde{Y} = X\theta + \tilde{\varepsilon}$,

$$\text{où : } E(\tilde{\varepsilon}) = O, \tilde{V} = \text{Var}(\tilde{\varepsilon}) = \sum_{O \in \{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}/O_k} \mu(O) \cdot V(O)$$

avec : $\mu(O) = \emptyset(O) - \emptyset(O_k)$, les $\emptyset(O)$ et $V(O)$ étant comme à la proposition III ; et O_k est une orbite de $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ telle que $\emptyset(O_k) < 0$.

Evidemment ce résultat n'est réellement intéressant que si l'on sait en pratique trouver une orbite O_k telle que $\emptyset(O_k) < 0$. Si on peut de plus trouver l'orbite O_k telle que $\emptyset(O_k)$ soit minimum, les composantes $\mu(O)$ sont assurées d'être positives. Mais l'essentiel est l'équivalence du modèle randomisé avec un modèle mixte régulier, et celui-ci, comme tout modèle mixte, peut être analysé par des méthodes classiques (C.R. Rao and J. Kleffe 1980, C.R. Henderson 1986).

Nous allons maintenant revenir sur une présentation classique de la randomisation. Celle-ci aboutit aussi à un modèle mixte, mais qui possède une propriété supplémentaire : la stratifiabilité. En 6°) nous donnerons une définition précise de cette notion dans un cadre général, et nous verrons que la stratifiabilité n'est pas nécessairement acquise pour le modèle randomisé.

5°) Modèle stratifiable, décomposition en strates

La décomposition en strates est une technique couramment utilisée dans l'analyse des expériences randomisées (Bailey 1981, Coursol 1981, Nelder 1965a et 1965b, Tjur 1984, Yates 1940). Lorsque cette technique peut être mise en oeuvre nous dirons que le modèle est *stratifiable*.

Pour illustrer cette technique nous allons détailler l'exemple classique de la randomisation des plans en blocs. On parle de tels plans lorsqu'il apparaît une (des) partition(s) naturelle(s) de l'ensemble des unités expérimentales en différentes parties (blocs) de même taille. Nous traitons indistinctement les plans en blocs dits complets, incomplets, équilibrés ou non. En effet ces distinctions dépendent de la matrice X , et nous avons vu que la randomisation n'intervient pas à ce niveau.

L'obtention des modèles réalisables se fait comme au § III, et la randomisation est basée sur le groupe des permutations conservant la structure de bloc. Le cas simple que nous traitons est celui où il y a une seule structure de bloc. Les ensembles des unités et des parcelles virtuelles sont donc partitionnés, de façon analogue, en b blocs de taille k . Les permutations envisagées se déduisent d'une permutation des blocs (par un élément de S_b) suivi de b permutations "interblocs" indépendantes (par éléments de S_k). Ce groupe est appelé par Bailey "wreath product" de S_k et S_b . Il est clair que celui-ci est simplement transitif. Ces orbites sont au nombre de trois et correspondent à la partition suivante de l'ensemble des parcelles virtuelles; si (i, j) désigne le $i^{\text{ème}}$ parcelle du $j^{\text{ème}}$ bloc :

* $(i, j) = (i', j') \implies$ orbite de matrice indicatrice I_{kb} ,

* $j = j' \implies$ orbite de matrice indicatrice $M - I_{kb}$,

$$M = \begin{bmatrix} J_k & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & J_k & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & J_k \end{bmatrix}$$

* $j \neq j' \implies$ orbite de matrice indicatrice $J_{kb} - M$.

Nous obtenons donc pour la matrice de variance du modèle randomisé :

$$\begin{aligned} V &= \vartheta_1 I_{kb} + \vartheta_2 (M - I_{kb}) + \vartheta_3 (J_{kb} - M) \\ &= (\vartheta_1 - \vartheta_3) I_{kb} + (\vartheta_2 - \vartheta_3) (M - I_{kb}) + \vartheta_3 J_{kb} \end{aligned}$$

On montre que ϑ_3 est négatif. Donc d'après la proposition V, nous obtenons un modèle équivalent en prenant :

$$\tilde{V} = (\vartheta_1 - \vartheta_2) I_{kb} + (\vartheta_2 - \vartheta_3) M = \mu_1 I_{kb} + \mu_2 M$$

A ce stade l'analyse peut-être menée de deux façons différentes :

1°) comme un modèle mixte général (définition III),

2°) par la décomposition en strates.

Nous préconisons la première méthode à cause de sa généralité. La technique de décomposition en strates consiste à écrire \tilde{V} comme une combinaison linéaire de projecteurs orthogonaux, soient ici :

$$P_{\text{intra}} = I_{kb} - \frac{M}{k}, \text{ et; } P_{\text{inter}} = \frac{M}{k},$$

Ce qui conduit à (avec : $\gamma_{\text{intra}} = \mu_1, \gamma_{\text{inter}} = \mu_1 + k\mu_2$) :

$$\tilde{V} = \gamma_{\text{intra}} P_{\text{intra}} + \gamma_{\text{inter}} P_{\text{inter}}$$

Les dénominations *intra* et *inter* font référence à la terminologie classique lorsqu'il est question de *strate intra-bloc* et de *strate inter-bloc*. Ecrivons $P_{\text{intra}} = B_{\text{intra}}B'_{\text{intra}}$ avec $B'_{\text{intra}}B_{\text{intra}} = I_{kb-k}$, et de même pour P_{inter} à l'aide B_{inter} . On obtient ainsi en prémultipliant \tilde{Y} par, respectivement B'_{intra} et B'_{inter} , les deux modèles d'analyse de variance à un facteur de la *strate intra-bloc* et de la *strate inter-bloc* :

$$\begin{aligned} Y_{\text{inter}} &= B'_{\text{inter}}X\theta + \varepsilon_{\text{inter}}, & \text{Var}(\varepsilon_{\text{inter}}) &= \gamma_{\text{inter}}I_{kb-k}, \\ Y_{\text{intra}} &= B'_{\text{intra}}X\theta + \varepsilon_{\text{intra}}, & \text{Var}(\varepsilon_{\text{intra}}) &= \gamma_{\text{intra}}I_k. \end{aligned}$$

Ces modèles sont de plus orthogonaux puisque :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\varepsilon_{\text{inter}}\varepsilon_{\text{intra}}) &= B'_{\text{inter}}\tilde{V}B_{\text{intra}} \\ &= (\gamma_{\text{inter}} + \gamma_{\text{intra}})B'_{\text{inter}}P_{\text{inter}}P_{\text{intra}}B_{\text{intra}} = 0. \end{aligned}$$

Deux estimations de θ sont ainsi obtenues dans les deux strates. Il se pose alors le problème délicat de recombinaison optimale de ces estimateurs ce qui nécessite en général des estimations de γ_{intra} et γ_{inter} . Très souvent γ_{inter} n'est pas estimable dans sa strate. On l'estime alors dans le modèle initial en ayant recours à une méthode d'Henderson (cf. Cochran & Cox, 1957, Coursol, 1981).

De façon générale la décomposition en strates s'opère comme suit : soit le modèle mixte (5), la matrice de covariance V de ce modèle est symétrique, donc il existe m projecteurs orthogonaux symétriques P_1, \dots, P_m , sur m sous-espaces de \mathbb{R}^n , et m paramètres $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ tels que :

$$V = \sum_{i=1}^m \gamma_i P_i, \quad \sum_{i=1}^m P_i = I_n$$

$$\forall i, j, \quad P_i P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{rg}(P_i) = m_i.$$

Les P_i sont nécessairement les projecteurs sur des sous-espaces des espaces propres de V , et dépendent donc a priori de λ . Mais il peut arriver que (bien que variant avec λ) V possède une base de vecteurs propres invariante par λ . Il existe alors des projecteurs P_i ne dépendant pas de λ et il est possible de faire une décomposition en strates par projections du modèle sur les différents espaces $\text{Im}(P_i)$. Ainsi on appelle modèle de la strate i :

$$P_i Y = P_i X\theta + P_i \varepsilon$$

Ecrivant P_i sous la forme $B_i B'_i$, avec $B'_i B_i = I_{m_i}$, le modèle de la strate i s'écrit de façon équivalente (prémultiplier par B'_i) :

$$B'_i Y = B'_i X\theta + B'_i \varepsilon$$

Un calcul simple montre alors que les modèles de strates sont des modèles classiques d'analyse de variance et statistiquement orthogonaux.

Dans ce qui suit nous nous contentons d'examiner si la décomposition en strates est une donnée essentielle dans l'analyse d'un modèle randomisé stratifiable. Nous voulons ainsi tenter de comparer deux techniques d'analyse envisageables : l'une essayant de mettre à profit la décomposition en strates possible du modèle, et donc a priori plus fine mais aussi plus particulière ; l'autre n'utilisant que le fait que le modèle est mixte, et donc basée sur une théorie plus générale.

Il est bien connu que la "stratification" est déterminante dans le cas des modèles dits "orthogonaux". C'est-à-dire lorsque X est choisi de sorte qu'il existe une décomposition naturelle de $Im(X)$ suivant les différents espaces $Im(P_i)$. En effet, les estimations des contrastes et des (nouvelles) composantes de la variance γ se résument alors à des analyses de variance sur les différents modèles de strates. Dans les cas non orthogonaux des méthodes de recombinaisons des estimateurs des traitements obtenus dans les différentes strates ont été envisagées. Yates (1940) fut le premier à proposer une telle méthode, possédant certaines propriétés d'optimalité (à γ connu), pour les plans équilibrés (Blocs Incomplets Équilibrés ; BIE,...).

Sans utiliser la décomposition en strates, la méthode d'estimation naturelle des traitements consiste à faire des moindres carrés généralisés (Generalised Least Squares : GLS) dès qu'une estimation de V est obtenue. Considérons le modèle mixte (5) stratifiable où V est supposé connu grâce à une estimation préalable des composantes de la variance γ (par exemple par les méthodes d'Henderson, 1953 ou de Rao et Kleffe, 1980). L'estimation de θ par les GLS est obtenue en minimisant la somme de carrés $(Y - X\theta)'V^{-1}(Y - X\theta)$. On obtient la formule :

$$\theta = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y.$$

On peut montrer que la méthode de Yates est équivalente aux G.L.S. lorsque les composantes de la variance sont estimées par la troisième méthode d'Henderson.

En conclusion la stratification ne permet en aucun cas de faire l'économie de l'estimation des composantes de la variance γ (ou λ), et la décomposition en strates nous semble avoir pour seuls intérêts l'allégement des calculs numériques ou l'interprétation des confusions par une analyse plus fine de l'information.

6°) Conditions de stratifiabilité, cas du modèle randomisé

D'après ce qui précède, il apparaît naturel de définir la stratifiabilité comme suit :

Définition V : On dit que le modèle mixte (5) est stratifiable s'il existe une base de vecteurs propres de V indépendante de λ .

La proposition suivante permet de donner une deuxième définition de la stratifiabilité :

Proposition VI : Le modèle mixte (5) est stratifiable si et seulement si les matrices $V_i, i = 1, \dots, k$, sont commutantes.

Preuve : Des matrices symétriques commutent si et seulement si elles possèdent une base de vecteurs propres commune.

- Si les V_i commutent elles admettent une base de vecteurs propres commune avec V .

- Inversement, comme le vecteur des composantes de la variance λ peut varier dans un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^k , la stratifiabilité entraîne, pour tout x vecteur propre de V et tout λ dans \mathcal{V} , qu'il existe $\mu(\lambda)$ dans \mathbb{R} tel que :

$$Vx = \sum_{i=1}^k \lambda_i V_i x = \mu(\lambda)x.$$

D'où pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe $\alpha \neq 0$ et η tels que : $\alpha V_i x = \eta x$, et les matrices V_i ont une base commune de vecteurs propres ■

Le modèle randomisé est donc stratifiable si et seulement si les matrices $\{V(O)/O \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}$ sont commutantes. D'autre part :

Proposition VII : L'espace vectoriel $\mathbf{M} = \text{Vect}\{M(O)/O \in \mathcal{R}\}$, engendré par les matrices indicatrices des orbites de \mathcal{H} , est une algèbre (non commutative en général).

Preuve : Il suffit de vérifier la stabilité de \mathbf{M} pour la multiplication matricielle. Cela revient à démontrer l'invariance des termes $[M_1 M_2]_{ij}$ lorsque (i, j) parcourt une orbite de \mathcal{H} pour le produit $M_1 M_2$ de deux matrices indicatrices. Or, utilisant que \mathcal{H} est un groupe et la définition des matrices indicatrices, il vient pour tout η dans \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} [M_1 M_2]_{\eta(i)\eta(j)} &= \sum_{k=1}^n [M_1]_{\eta(i)k} \cdot [M_2]_{k\eta(j)} \\ &= \sum_{k'=1}^n [M_1]_{\eta(i)\eta(k')} \cdot [M_2]_{\eta(k')\eta(j)} \\ &= \sum_{k'=1}^n [M_1]_{ik'} \cdot [M_2]_{k'j} = [M_1 M_2]_{ij} \blacksquare \end{aligned}$$

Le sous-espace vectoriel des matrices symétrisées de \mathbf{M} : $\mathcal{V} = \text{Vect}\{V(O)/O \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}$, n'est pas nécessairement une sous-algèbre de \mathbf{M} . En fait cette propriété est en relation avec la stratifiabilité du modèle randomisé. Ainsi, comme deux matrices symétriques commutent si et seulement si leur produit est une matrice symétrique, il vient :

Proposition VIII : Le modèle randomisé est stratifiable si et seulement si l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \text{Vect}\{V(O)/O \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\}$ est une algèbre (nécessairement commutative).

Dans une optique plus pratique, il convient d'avoir des critères relativement simples à vérifier. Des critères existent sur le groupe de permutation \mathcal{H} définissant

la randomisation. Nous donnons ceux qui nous sont apparus les plus simples, des conditions nécessaires et suffisantes très techniques peuvent aussi être obtenues (Bailey et Rowley 1988, Bailey, Praeger, Rowley et Speed 1983).

Proposition IX : \mathcal{H} étant un groupe simplement transitif, une quelconque des conditions suivantes assure la stratifiabilité du modèle randomisé :

- i) \mathbf{M} est une algèbre commutative.
- ii) \mathcal{H} est un groupe commutatif.
- iii) \mathcal{H} est 2-transitif.
- iv) Les orbites de \mathcal{H} sont symétriques ($\forall O \in \mathcal{R}, O = O'$).

Preuve : Nous allons voir successivement :

$$i) \implies \text{stratifiabilité, } ii) \implies i) \text{ et } iii) \implies iv) \implies i).$$

• Si \mathbf{M} est commutative alors \mathcal{V} est nécessairement une sous-algèbre de \mathbf{M} , d'où la stratifiabilité.

•• Si \mathcal{H} est simplement transitif et commutatif alors : soit $\sigma \in \mathcal{H}$, Z_σ sa matrice de permutation et M la matrice indicatrice de l'orbite $O_{1, \sigma(1)}$. On a par la commutativité de \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} M_{ij} = 1 &\iff \exists \eta \in \mathcal{H}; (i, j) = \eta(1, \sigma(1)) \\ &\iff \exists \eta \in \mathcal{H}; j = \eta \circ \sigma(1) = \sigma \circ \eta(1) = \sigma(i) \\ &\iff [Z_\sigma]_{ij} = 1. \end{aligned}$$

D'où $Z_\sigma = M$. Inversement, du fait de la transitivité, toute matrice indicatrice d'une orbite est la matrice indicatrice de l'orbite $O_{1, v(1)}$ pour au moins une permutation v dans \mathcal{H} . On a ainsi montré que les matrices d'orbite sont exactement les matrices de permutation, celles-ci commutent d'où i).

••• Si \mathcal{H} est 2-transitif (i.e si $\forall i, j, k, l, \exists \sigma \in \mathcal{H}; (\sigma(i), \sigma(j)) = (k, l)$) alors \mathcal{H} ne possède que deux orbites symétriques de matrices indicatrices I_n et $J_n - I_n$. Et si les orbites de \mathcal{H} sont symétriques alors $\mathbf{M} = \mathcal{V}$, d'où i) puisque si \mathcal{V} est une algèbre elle est commutative ■

Pour terminer cette étude nous allons montrer par un contre-exemple que tout modèle randomisé n'est effectivement pas nécessairement stratifiable. Cet exemple apparaît quelque peu technique car nous n'en avons pas trouvé d'adéquat dans la panoplie des randomisations classiques.

Le problème est le suivant : il faut trouver un groupe vérifiant trois propriétés; la simple transitivité, la non-commutativité, les orbites non symétriques. Il est connu que le plus simple des groupes non-commutatif est S_3 , de plus en tant qu'opérant sur lui-même celui-ci est isomorphe à un sous-groupe simplement transitif de S_6 :

S_3 contient les 6 éléments suivants :

$$\begin{aligned} I &= \text{identité}; & II &= (12); & III &= (23); \\ IV &= (31); & V &= (123); & VI &= (321). \end{aligned}$$

S_3 opère sur lui-même par translation à gauche suivant la règle :

$$\begin{array}{ll} I & \longrightarrow \text{identité}; \\ III & \longrightarrow (I III)(II VI)(IV V); \\ V & \longrightarrow (I V VI)(II IV III); \end{array} \quad \begin{array}{l} II \longrightarrow (I II)(III V)(IV VI); \\ IV \longrightarrow (I IV)(II V)(III VI); \\ VI \longrightarrow (I VI V)(II III IV). \end{array}$$

Les orbites du sous-groupe de S_6 ainsi obtenu sont au nombre de six et ont pour matrices :

$$\begin{array}{ccc} M_1 = I_6 & M_2 & M_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \end{bmatrix} \\ \\ M_4 & M_5 & M_6 = M_5' \\ \begin{bmatrix} . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & . \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \end{array}$$

On vérifie que M_2 et M_3 , qui sont dans l'espace engendré par les symétrisées des orbites, ont un produit (M_5) qui n'y appartient pas. Cet espace n'est donc pas une algèbre et le modèle randomisé correspondant est non stratifiable d'après la proposition VIII.

Annexe

Nous étudions dans cette annexe les propriétés topologiques de l'ensemble \mathcal{F} des composantes de la variance $\emptyset(O)$ du modèle randomisé. \mathcal{F} peut être considéré comme l'image de l'orthogonal de 1_n dans \mathbb{R}^n par l'application \mathcal{A} qui à u associe le vecteur des k composantes :

$$\emptyset(O) = u' \frac{M(O)}{|O|} u,$$

quand O varie dans l'ensemble des k orbites symétrisées.

On sait déjà que \mathcal{F} appartient à une sous-variété linéaire \mathcal{L} de \mathbb{R}^k . Nous montrons ci-dessous deux résultats :

Proposition 1 : \mathcal{F} est fermé.

Preuve : En remarquant que $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda^2 \mathcal{A}(u)$, on peut ne considérer que les u de norme inférieure ou égale à 1. L'image de tels u est compacte comme image continue de la boule unité compacte. \mathcal{F} est donc formé de l'ensemble des homothétiques de ce compact, une démonstration élémentaire montre alors qu'il est fermé ■

Proposition 2 : \mathcal{F} est d'intérieur non vide.

Preuve : En un point u , $\text{grad}(\emptyset(O))$ est le vecteur :

$$\frac{M(O) + M(O)'}{|O|} u.$$

La matrice Jacobienne de \mathcal{A} est donc formée par l'ensemble de ces vecteurs quand O varie. Comme u est orthogonal à 1_n celle-ci n'est jamais de plein rang k . Mais si elle est de rang $k - 1$, \mathcal{F} est ouvert au point $\mathcal{A}(u)$ dans \mathcal{L} par le théorème de l'inversion locale. Il suffit donc de montrer qu'il existe au moins un point u où la matrice est de rang $k - 1$.

Considérons les points de la forme : $\lambda \left(e - \frac{1}{n} 1_n \right)$, où λ parcourt \mathbb{R} et e la base canonique de \mathbb{R}^n . Comme pour e fixé, les vecteurs $(M(O) + M(O)')e$ quand O varie, ont des supports disjoints (par support nous entendons l'ensemble des coordonnées non nulles), un calcul immédiat montre que la matrice Jacobienne est de rang $k - 1$ aux points considérés ■

La proposition 2 montre que la dimension paramétrique du modèle randomisée est bien $k - 1$. Sur des exemples \mathcal{F} semble être ouvert en $\mathcal{A}(u)$ pour presque tout u . Nous n'avons malheureusement pas pu le démontrer, ce problème ne semble pas, par ailleurs, avoir été étudié dans la littérature.

Références

- AZAIS, J.-M. (1987) : Design of Experiments for Studying Intergenotypic Competition. *J.R. Statist. Soc. B*, **49**, 334-345.
- BAILEY, R.A. (1981) : A Unified Approach to Design of Experiments, *J.R.S.S. Ser. A*, Vol. **144**, 214-223.
- BAILEY, R.A., PRAEGER, C.E., ROWLEY, C.A. and SPEED, T.P. (1983) : Generalized Wreath Product of Permutation Groups, *Proc. London Math. Soc.* **3**, **47**, 69-82.
- BAILEY, R.A. and ROWLEY, C.A. (1988) : General Balance and Treatment permutations, *unpublished manuscript*.
- COCHRAN, W.G. & COX, G.M. (1957) : Experimental Design, *John Wiley & Sons, Inc.*, New-York.
- COURSOL, J. (1981) : Technique statistique des modèles linéaires, 1 - Aspects théoriques, *C.I.M.P.A.*
- FISHER, R.A. (1925) : Statistical method for research workers, *Oliver and Boyd*, Londres.

- FISHER, R.A. (1935) : The design of experiments, *Oliver and Boyd*, Londres.
- FRASER, D.A.S. (1957) : On the combining of interblock and intrablock estimates, *Ann. Math. Stat.*, **28**, 814-816.
- GRUNDY, P.M. & HEALY, M.J. (1950) : Restrict randomisation and quasi-lattice squares. *J.R. Statist. Soc. B*, **12**, 286-291.
- HALL, M. (1959) : The Theory of Groups, *Macmillan*, New-York.
- HENDERSON, C.R. (1953) : Estimation of variance and covariance components, *Biometrics*, **9**, 226.
- HENDERSON, C.R. (1986) : Recent developments in variance and covariance estimation, *J. Anim. Sci.*, **63**, 208-216.
- LEDERMANN, W. (1973) : Introduction to Group Theory, *Longman Inc.*, New-York.
- MALLEY, J.D. (1986) : "Optimal Unbiased Estimation of Variance Components, *Lecture Notes in Statistics*, **39**, Springer-Verlag, New-York.
- NELDER, J.A. (1965a) : The analyse of randomized experiments with orthogonal blocks structure. II. Blocks structure and the null analyse of variance, *Proc. Roy. Soc. A*, **283**, 147-162.
- NELDER, J.A. (1965b) : The analyse of randomized experiments with orthogonal blocks structure. II. Treatment structure and the general analyse of variance, *Proc. Roy. Soc. A*, **283**, 163-178.
- RAO, C.R. & KLEFFE, J. (1980) : Estimation of Variance Components, *Handbook of Statistics*, Vol. **1**, North-Holland Company, 1-40.
- TEDIN, O. (1931) : The influence of systematic plot arrangement upon the estimate of error in field experiments, *J. Agr. Sci.*, **21**, 191-208.
- TJUR, t. (1984) : Analyse of Variance Models in Orthogonal Designs, *Int. Stat. Review*, **52**, 1, 33-81.
- WIANCKO, A.T. (1914) : Use and management of check plots in soil fertility investigations, *J.A.S.A.*, **6**, 122-124.
- WIANCKO, A.T., Amy, A.C. & Salmon, S.C. (1921) : Report on committee on standardization of fields experiments. *Journal of American Society of Agronomy*, **13**, 368-374.
- YATES, F. (1936) : A new method of arranging variety trials involving a large number of varieties, *J. Agr. Sci.*, **26**, 424-455.
- YATES, F. (1940) : The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs, *Ann. Eugen.*, **10**, 317-325.