

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. JONEAUX

Invariance de la probabilité d'un événement l'hypothèse est-elle valable ?

Revue de statistique appliquée, tome 37, n° 4 (1989), p. 61-66

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_4_61_0

© Société française de statistique, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INVARIANCE DE LA PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT L'HYPOTHÈSE EST-ELLE VALABLE ?

R. JONEAUX

Après une série de N épreuves au cours de laquelle on a constaté n occurrences d'un événement, on peut envisager d'évaluer une probabilité, ou plus exactement une fourchette dans laquelle cette probabilité doit se situer avec une confiance plus ou moins grande.

Toutefois, ceci implique l'hypothèse qu'il s'agit bien d'une probabilité invariante, quelle que soit l'épreuve considérée.

Il doit en être ainsi, notamment, lorsque, ayant observé une suite de N valeurs $x_1, x_2, \dots, x_N$ d'une grandeur aléatoire X , on se propose d'établir un modèle probabiliste sous forme d'une fonction de répartition $F(x)$, telle que :

$$F(x) = \text{Prob}[X \leq x]$$

Pour apprécier la validité de l'hypothèse d'invariance, nous proposons, ci-après deux méthodes basées sur l'application du test du χ^2 de PEARSON : la méthode des "pauses" et la méthode des "tranches".

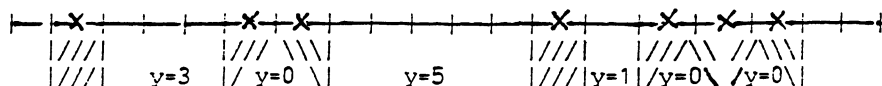
La mise en oeuvre de ces méthodes nécessite de disposer de la série des résultats des N épreuves, dans l'ordre où elles ont été effectuées.

Méthode des pauses

Nous appelons "pause" au cours d'une suite d'épreuves, une séquence d'épreuves successives sans occurrence, entre deux épreuves avec occurrence.

Une pause est mesurée par le nombre Y d'épreuves de la séquence. Pour deux épreuves successives avec occurrence, on a $Y = 0$.

La figure ci-dessus illustre une succession d'épreuves par des cases sur une droite. Les croix indiquent qu'il y a eu occurrence :



On sait que si la probabilité de l'événement est invariante, quelle que soit l'épreuve, la variable aléatoire Y suit un modèle exponentiel ou géométrique :

$$P(Y) = p(1 - p)^Y$$

expression dans laquelle p est la probabilité d'occurrence de l'événement. La fonction de répartition de ce modèle est :

$$1 - (1 - p)^{Y+1}$$

Pour n occurrences sur N épreuves, on dispose de $n - 1$ valeurs de $Y^{(*)}$. On comparera par le test du χ^2 leur distribution constatée à celle que donnerait le modèle ci-dessus convenablement ajusté.

L'ajustement se fait en égalant

$$\bar{Y} = \frac{1}{n-1} \sum Y_i \text{ avec } E(Y) = \frac{1-p}{p} \text{ moyenne du modèle}$$

La fonction de répartition du modèle ajusté s'écrit alors :

$$1 - \left(\frac{\bar{Y}}{1 + \bar{Y}} \right)^{Y+1}$$

La méthode peut s'appliquer au non-événement.

Méthode des tranches

On découpe l'ensemble des N épreuves successives en ν tranches de Z épreuves, de sorte que :

$$\nu Z = N \text{ à quelques unités près}$$

Si la probabilité est invariante et égale à p , quelle que soit l'épreuve, le nombre z d'occurrences dans chaque tranche est aléatoire de 0 à Z et :

$$P(z) = C_Z^z p^z (1-p)^{Z-z}$$

Ainsi, on dispose de ν valeurs de z , dont la distribution constatée pourra être comparée par le test χ^2 au modèle ci-dessus convenablement ajusté.

L'ajustement se fait en égalant la moyenne constatée :

$$\bar{z} = \frac{n}{\nu} \text{ avec la moyenne du modèle } E(z) = pZ$$

Ici, le nombre n d'occurrences correspond au nombre total d'occurrences rencontrées dans les νZ épreuves.

Que l'on applique cette méthode à l'événement ou au non-événement, les calculs sont les mêmes.

(*) on ne prend pas en compte les épreuves sans occurrence au début et en fin de la série. Les "pauses" correspondantes peuvent être incomplètes.

Conditions d'application

Pour l'une ou l'autre de ces méthodes, il n'y a qu'un seul paramètre d'ajustement. Il faut pouvoir constituer au moins trois classes (de Y ou de z) pour avoir au moins un degré de liberté. Comme d'autre part, il est recommandé d'avoir au moins 5 valeurs par classe, cela nécessite pour la méthode des pauses $n \geq 16$. Mais n ne doit pas non plus être trop voisin de N . Ceci conduirait à un effectif trop important de la classe $Y=0$, au détriment des autres classes. D'ailleurs, si on applique la méthode au non-événement, il faut $N - n \geq 16$ et donc $N > 32$. Pour la méthode des tranches, on doit avoir $\nu \geq 15$ et comme $Z \geq 2$, alors $N > 30$.

En outre, s'agissant de nombres entiers, il faut que l'effectif de l'une quelconque des classes ne tombe pas au-dessous de 5; ce qui peut se produire, même si l'on dispose de plus de 15 valeurs (probabilité d'environ 0,2 pour 21 valeurs).

Ainsi, dans le cas d'une distribution constatée d'une grandeur x , la validité de l'hypothèse d'invariance ne pourra être appréciée que dans la partie centrale des valeurs constatées (en excluant au moins les 15 plus petites et au moins les 15 plus grandes).

Il se peut d'ailleurs, que dans cette partie centrale, l'hypothèse puisse être acceptée dans une plage et doit être rejetée ailleurs.

Concordance des résultats des tests

Les méthodes exposées ci-dessus, avec leurs différentes modalités d'application (événement ou non-événement pour celle des pauses; divers choix possibles de ν et de Z pour celle des tranches) permettent d'effectuer plusieurs tests.

La concordance des résultats renforce la validité, ou la non-validité, de l'hypothèse.

Applications

A titre d'exemples, nous décrivons sommairement ci-après deux applications.

Jeu de dés

En lançant trois dés, on peut se proposer d'obtenir que la somme des faces soit supérieure ou égale à 12. La probabilité théorique de cet événement est : $81/216 = 0,375$.

En pratiquant ce jeu, nous avons obtenu 480 occurrences sur 1300 épreuves, dont les résultats ont été notés au fur et à mesure.

La méthode des pauses a permis de constituer 10 classes avec $\bar{Y} = 1,664$. Le degré de liberté est 8 et l'on a :

$$\chi_C^2 = 7,223; P(\chi^2 > 7,223) = 0,51$$

La méthode des tranches a été appliquée avec 26 tranches de 50 épreuves chacune.

Le nombre d'occurrences z par tranche varie de 13 à 25, la moyenne $\bar{Z} = 18,46$. On peut constituer 4 classes, le degré de liberté est 2, et l'on a :

$$\chi_c^2 = 1,988; P(\chi^2 > 1,988) = 0,37$$

Le jeu a donc été régulier, car on peut admettre que p est bien constant. Le résultat expérimental permet de situer p entre 0,343 et 0,395 avec 5 chances sur 100 d'erreur.

Crues d'un fleuve

Il s'agit des crues annuelles du fleuve NIGER à KOULIKORO/MALI, dont on trouvera, ci-joint annexe 1, la série des débits maximaux de 1907 à 1979, selon une monographie de l'ORSTOM. On se propose d'étudier la probabilité annuelle de dépassement (ou de non-dépassement) d'un débit Q et de fournir un modèle :

$$P(\text{débit observé} \geq Q) = 1 - F(Q)$$

Afin de permettre de juger si cette opération est légitime, nous avons appliqué les deux méthodes à différentes valeurs de Q . La méthode des tranches a été appliquée avec 24 tranches de 3 épreuves en négligeant l'année 1979.

Les résultats sont consignés dans le tableau (annexe 2) en notant que dans chaque cas, on a constitué 3 classes de Y (dépassement), de Y' (non-dépassement) et de z (les χ^2 correspondants sont donc tous à un degré de liberté).

On voit que l'invariance de la probabilité annuelle de dépassement (ou de non-dépassement) d'un débit Q ne peut guère être admise pour $Q < 6100m^3/s$.

Il est donc contestable de prendre en compte les années dont la crue a été inférieure à $6100m^3/s$, pour ajuster un modèle (GIBRAT-GALTON, GUMBEL, FRECHET^(*) ,....., ou autres), ainsi que cela a été fait.

L'analyse du phénomène physique montre d'ailleurs que la crue d'une année n'est pas totalement indépendante de celle de l'année précédente (ni même de l'année d'avant) en raison des volumes d'eau retenus dans les sols.

(*) Référence bibliographiques :

- Hydrologie de surface - M. ROCHE 1963 GAUTHIER VILLARS
- Hydraulique routière - Ministère de la Coopération et du développement 1981.

Annexe 1

Crues du NIGER à KOULIKORO/MALI

Monographie de l'ORSTOM(*)

ANNEE	Q m ³ /S	ANNEE	Q m ³ /S	ANNEE	Q m ³ /S
1907	4228	1931	6400	1955	7244
8	5510	2	7607	6	6189
9	6870	3	7281	7	7377
1910	4747	4	5878	8	5559
1	6669	5	5743	9	7074
2	5543	6	7357	1960	6669
3	3581	7	5058	1	6294
4	4402	8	6347	2	7940
5	5201	9	5609	3	7357
6	5981	1940	3943	4	6760
7	6815	1	6154	5	5878
8	4901	2	4839	6	5743
9	5298	3	5137	7	9344
1920	4901	4	4839	8	5314
1	5298	5	5153	9	7861
2	6329	6	5510	1970	5844
3	5428	7	6206	1	5709
4	9409	8	6489	2	3830
- 5	9669	9	6852	3	4300
6	6926	1950	6400	4	6259
7	6889	1	6382	5	6834
8	8607	2	6259	6	5058
9	7434	3	6870	7	4127
1930	6760	4	6436	8	5493
				9	5912

(*) ORSTOM : Institut Français de Recherche Scientifique pour le Développement en Coopération.

Annexe 2

Résultats

DEBIT Qm^3/S							
	5500	5700	5900	6100	6300	6500	6700
METHODE DES PAUSES (DEPASSEMENT)							
n	51	46	40	38	32	25	23
$\bar{Y}$	0,420	0,556	0,795	0,784	1,129	1,750	2,000
χ_c^2	3,556	3,652	2,238	2,734	1,266	1,323	0,735
$P(\chi^2 > \chi_c^2)$	0,059	0,055	0,135	0,100	0,260	0,250	0,390
METHODE DES PAUSES (NON-DEPASSEMENT)							
n'	22*	27	33	35*	41	48*	50*
$\bar{Y}'$	2,381	1,692	1,188	1,118	0,800	0,532	0,469
χ_C^2	6,281	4,922	4,165	4,716	1,414	0,558	0,893
$P(\chi^2 > \chi_C^2)$	0,012	0,027	0,042	0,030	0,230	0,460	0,350
METHODE DES TRANCHES							
$\bar{Z}$	2,083	1,875	1,625**	1,583**	1,333	1,042	0,958
χ_C^2	1,757	2,898	3,736	2,754	1,220	0,535	0,537
$P(\chi^2 > \chi_C^2)$	0,190	0,087	0,052	0,095	0,270	0,470	0,460

* : L'effectif d'une classe est un peu insuffisant : 4 ou 3.

** : On aurait pu constituer 4 classes. On a retenu la disposition la plus favorable à l'hypothèse d'invariance.