

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. PALISSON

Détermination des paramètres du modèle de Weibull à partir de la méthode de l'actuariat

Revue de statistique appliquée, tome 37, n° 4 (1989), p. 5-39

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_4_5_0

© Société française de statistique, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE WEIBULL A PARTIR DE LA MÉTHODE DE L'ACTUARIAT

F. PALISSON

Plan

1. Rappels sur la méthode générale et la méthode de WAYNE NELSON pour le traitement de l'évolution du nombre de défaillances dans un échantillon, en fonction du temps.
 - 1.1 Méthode générale
 - a) Etude de la variation de la fréquence cumulée de défaillance en fonction du temps.
 - b) Application au modèle de WEIBULL.
 - Papier fonctionnel.
 - Détermination des paramètres du modèle.
 - c) Cas de la loi exponentielle.
 - 1.2 Méthode de WAYNE NELSON
 - a) Etude de la variation de la quantité $H(t) = \int_0^t h(T)dT$ en fonction du temps.
 - b) Application au modèle de WEIBULL.
 - Papier fonctionnel.
 - Détermination des paramètres du modèle.
2. Méthode de l'actuariat
 - 2.1 Etude de la variation de $\lambda(t)$ en fonction du temps.
 - a) Estimation de $\lambda(t)$.
 - b) Méthodologie.
 - 2.2 Application au modèle de WEIBULL.
 - 2.2.1 Papier fonctionnel.
 - 2.2.2 Détermination des paramètres
 1. Méthode analytique.
 2. Propositions d'autres méthodes.
- a) Détermination du facteur de forme β
 - méthode graphique - Trois échelles fonctionnelles.
 - b) Détermination de la vie caractéristique η
 1. Utilisation de valeurs particulières du temps t .
 2. Utilisation d'un couple quelconque $t, \lambda(t)$ appartenant à $\lambda = f(t)$.
 - c) Exemple d'utilisation des méthodes proposées.

2.3 Effet d'un gamma (γ) dans le modèle de Weibull

- Détermination de γ

2.4 Cas du mélange de deux populations

Mots-clés : Actuariat, Weibull, Paramètre de Weibull avec actuariat, Papiers fonctionnels pour paramètre de Weibull par actuariat.

Introduction

Il existe différentes méthodes de traitement de la distribution des instants d'arrivée des pannes en fonction du temps. Ces méthodes ont pour but de déterminer le modèle mathématique qui pourrait représenter la distribution étudiée et d'en chiffrer les paramètres au moyen de papier à échelles fonctionnelles.

Le modèle retenu est en général le modèle de Weibull. Différents auteurs ont montré au travers du suivi de la probabilité cumulée de défaillance ou du taux de risque, comment déterminer les paramètres du modèle de Weibull.

L'étude proposée ici repose sur la méthode de l'actuariat. Son originalité est de proposer un papier à échelles fonctionnelles permettant de vérifier si l'évolution du taux de défaillance, en fonction du temps, est conforme à celle résultant d'un modèle de Weibull (alignement des points sur le diagramme) et propose un abaque permettant la mesure du facteur de forme. Les échelles fonctionnelles de cet abaque sont transposables dans les autres papiers à échelles fonctionnelles.

L'étude se poursuit par la recherche de méthodes permettant de chiffrer la vie caractéristique et différents abaques sont proposés afin de s'affranchir des calculs.

L'article est complété par l'étude des déformations entraînées sur le graphe représentant l'évolution du taux de défaillance en fonction du temps, par l'introduction dans le modèle de Weibull d'un décalage de l'origine des temps ($\gamma > 0$) ainsi que par un mélange de 2 populations représentées indépendamment par des modèles de Weibull. On verra que suivant la déformation constatée, on peut conclure soit à l'action d'un gamma et en calculer une valeur approximative soit à un mélange de populations. Dans ce dernier cas, seule une analyse poussée des données (mode de défaillance, composants en cause etc ...) permettra la séparation des populations.

1. Rappel sur la méthode générale et la méthode de Wayne Nelson

1.1 Méthode générale

*a) Etude de la variation de la fréquence cumulée
en fonction du temps : $F'(t)$*

Remarque : Sauf cas particulier, cette méthode ne s'applique qu'à du matériel non réparable.

La quantité $F(t)$ est estimée à partir des observations faites sur l'échantillon.

Si $r(t)$ est le nombre de défaillances cumulées entre 0 et t et N , l'effectif de l'échantillon étudié,

on a
$$F(t) = \frac{r(t)}{N}$$

b) Application au modèle de WEIBULL

- Papier fonctionnel (Allan Plait)

La relation $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$, peut s'écrire :

$$\text{Log}(1 - F(t)) = - \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$$

$$\text{d'ou } \log[-\text{Log}(1 - F(t))] = \beta \log t - \beta \log \eta \quad (1)$$

L'expression $\log[-\text{Log}(1 - F(t))]$ est donc représentée par une droite sur un papier dont les échelles sont :

en abscisse : $\log t$

en ordonnée : $\log[-\text{Log}(1 - F(t))]$

Conséquence : Si $F(t)$ suit un modèle de Weibull, il sera représenté par une droite sur ce papier à échelles fonctionnelles.

- Détermination des paramètres du modèle

Facteur de forme : β

De la relation (1), on déduit que la droite a pour pente le facteur de forme β .

Vie caractéristique : η

La relation $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ montre que quel que soit β , pour $t = \eta$, $F(\eta)$ prend la valeur $1 - e^{-1} = 0,632 \dots$ par conséquent, le point de la droite (si elle existe) d'ordonnée $F = 0,632 \dots$ a pour abscisse $t = \eta$.

c) Cas particulier : Loi exponentielle

Dans ce cas seulement, la méthode est applicable à du matériel réparable.

Chaque individu défaillant, réparé et remis en essai peut être considéré comme un individu "neuf". Par conséquent si $\sum r$ est le nombre total de défaillances enregistrées à la fin de l'essai et N le nombre d'individus mis en essai, on estimera

$F(t)$ à un instant t ,

- dans le cas d'un essai tronqué par $F(t) = \frac{r(t)}{N + \sum r}$
- dans le cas d'un essai censuré par $F(t) = \frac{r(t)}{N + \sum r - 1}$

1.2 Méthode de WAYNE NELSON

Cette méthode s'applique indifféremment à du matériel réparable ou non réparable.

a) Etude de la variation de la quantité

$$H(t) = \int_0^t h(T) dT \text{ en fonction du temps}$$

La quantité $h(T)$ est définie par

$$h(T) = \frac{f(T)}{1 - F(T)} \quad \text{avec} \quad f(T) = \frac{dF(T)}{dT}$$

et $F(T)$: probabilité de défaillance dans l'intervalle $0, T$.

et

$$H(t) = \int_0^t \frac{f(T)}{1 - F(T)} dT$$

Cette quantité est estimée par

$$H(t_i) = \frac{d_i}{N_i}$$

avec d_i nombre de défaillances cumulées au temps t_i sur les N_i individus ayant fonctionné au moins le temps t_i .

b) Application au modèle de WEIBULL

- Papier fonctionnel

De la relation $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$, on tire :

$$H(t) = \frac{t^\beta}{\eta^\beta}$$

$$\text{ou encore } \log H(t) = \beta \log t - \beta \log \eta \quad (2)$$

Cette équation est représentée par une droite dans un papier dont les échelles sont :

en abscisse : $\log t$
 en ordonnée : $\log H(t)$

Conséquence : Si $H(t_i)$ est issu d'une loi de mortalité suivant un modèle de Weibull, alors les points expérimentaux s'alignent dans ce papier à échelles fonctionnelles.

- *Détermination des paramètres du modèle.*

Facteur de forme : β

De la relation (2), on déduit que la droite a pour pente le facteur de forme β .

Vie caractéristique : η

Dans la relation (2) si $t = \eta$, on a $\log H(t) = 0$ d'où $H(t) = 1$.

Par conséquent, le point de la droite (si elle existe) d'ordonnée $H(t) = 1$ a pour abscisse $t = \eta$.

2. Méthode de l'actuariat

S'applique indifféremment à du matériel réparable ou non réparable.

2.1 Etude de la variation de $\lambda(t)$ en fonction du temps

$\lambda(t)$ est le taux de défaillance instantané, il s'exprime par la relation :

$$\lambda(t) = - \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{d R(t)}{dt}$$

a) Estimation de $\lambda(t)$ à partir des données expérimentales

Notation : $N(t)$, nombre d'individus encore en vie à l'instant t .

N_0 , nombre d'individus mis en essai à l'instant $t = 0$.

$N(t + \Delta t)$, nombre d'individus encore en vie à l'instant $t + \Delta t$.

L'estimation de $R(t)$ est donnée par $\widehat{R}(t) = \frac{N(t)}{N_0}$

L'estimation de $dR(t)$ est donnée par $\widehat{\Delta R}(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N_0}$

d'où l'estimation de $\lambda(t)$:

$$\widehat{\lambda}(t) = - \frac{N_0}{N(t)} \cdot \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N_0} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

en posant $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$

$$\hat{\lambda}(t) = - \frac{\Delta N(t)}{N(t) \cdot \Delta t}$$

La quantité $N(t) \cdot \Delta t$ représente la temps cumulé d'essai dans l'intervalle de temps Δt et $\Delta N(t)$ représente le nombre de défaillances dans ce même intervalle de temps.

b) Méthodologie

- Découper l'intervalle d'observation $0, T$ en classes de durées $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ avec $\sum_i \Delta t_i = T$.
- Dénombrer les défaillances dans chaque classe : $d_1, d_2, \dots$
- Dénombrer les individus ayant fonctionné dans chaque classe : $N_1, N_2, \dots$
- Calculer pour chaque classe le taux de défaillance instantané.

$$\hat{\lambda}(t_i) = \frac{d_i}{N_i \cdot \Delta t_i}$$

- Tracer le diagramme $\hat{\lambda}(t_i) = f(t_i)$.

2.2 Application au modèle de Weibull

De l'expression $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ et de celle du taux de défaillance instantané, on déduit :

$$\lambda(t) = \beta \cdot \frac{1}{\eta^\beta} \cdot t^{\beta-1}$$

2.2.1 Papier fonctionnel

La relation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\log \lambda(t) = \log \beta + (\beta - 1) \log t - \beta \log \eta \quad (3)$$

Cette équation est représentée par une droite dans un papier dont les échelles sont :

en abscisse : $\log t$
 en ordonnée : $\log \lambda(t)$

Conséquence : Si $\lambda(t)$ est issu d'une loi de mortalité suivant un modèle de Weibull, alors $\lambda(t)$ est représenté par une droite dans ce papier à échelles fonctionnelles.

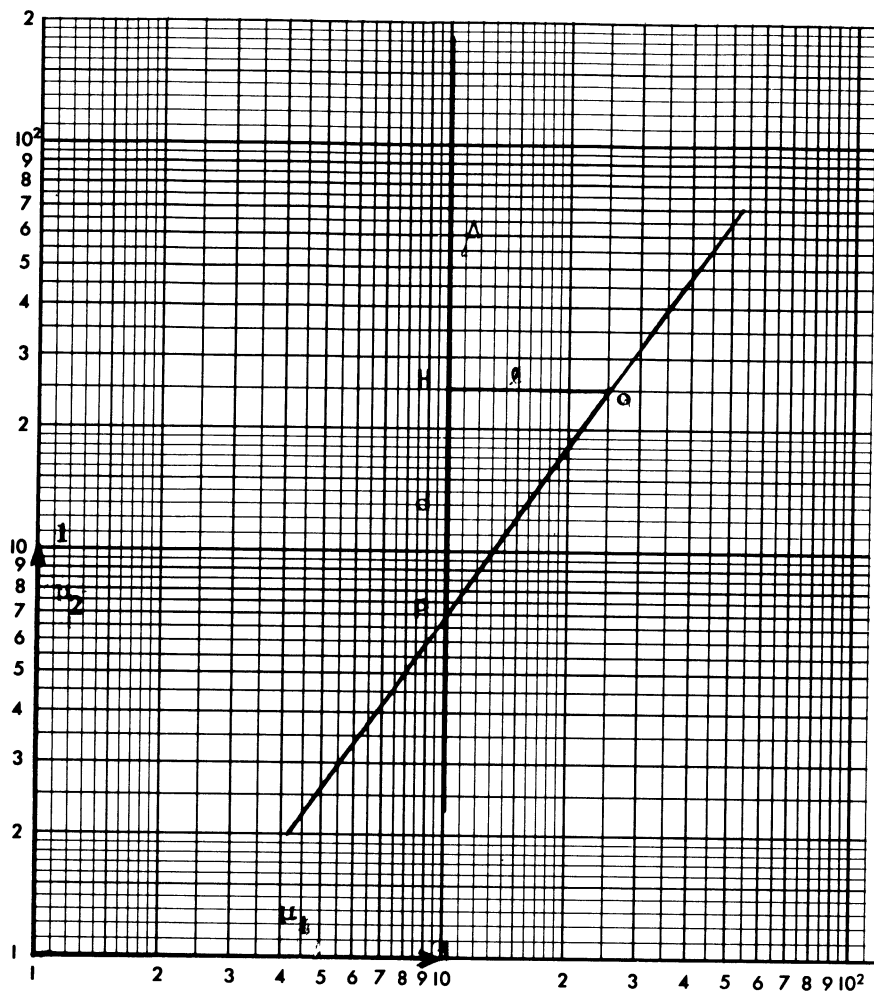


FIGURE 1

2.2.2 Détermination des paramètres du modèle de Weibull

1. Méthode analytique

C'est l'application de la méthode des moindres carrés.

Tous calculs faits, on obtient :

Facteur de forme β :

$$\beta = 1 + \frac{\sum \log t_i \times \sum \log \lambda(t_i) - N \times \sum (\log t_i \times \log \lambda(t_i))}{(\sum \log t_i)^2 - N \times \sum (\log t_i^2)}$$

Vie caractéristique η :

En posant :

$$a = \frac{\sum \log t_i \times \sum (\log t_i \times \log \lambda(t_i)) - \sum (\log t_i)^2 \times \sum \log \lambda(t_i)}{(\sum \log t_i)^2 - N \times \sum (\log t_i)^2} \times \frac{1}{N}$$

On a :

$$\eta = (10^{-a} \times \beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

2. Proposition d'autres méthodes pour la détermination des paramètres du modèle de Weibull.

a) Détermination du facteur de forme β

- Méthode graphique

De la relation (3), on déduit que la pente de la droite a pour expression :

$$p = \beta - 1 .$$

et par conséquent, connaissant p , on peut calculer

$$\beta = p + 1 .$$

- Tracé d'un abaque permettant de déterminer directement la valeur du facteur de forme :

Dans le papier à échelles fonctionnelles ($\log t$, $\log \lambda(t)$) de la figure 1, fixons un point 0 quelconque à une distance l d'une droite verticale Δ ; soit H , le pied de la perpendiculaire abaissée de 0 sur Δ .

μ_1 et μ_2 étant les longueurs physiques des vecteurs unités des échelles $\log t$ et $\log \lambda(t)$ respectivement. Si P est un point de Δ situé à la distance d de H , la pente de la droite portant le segment OP est :

$$p = \frac{d}{l} \times \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

d'où
$$\beta = 1 + \frac{d}{l} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

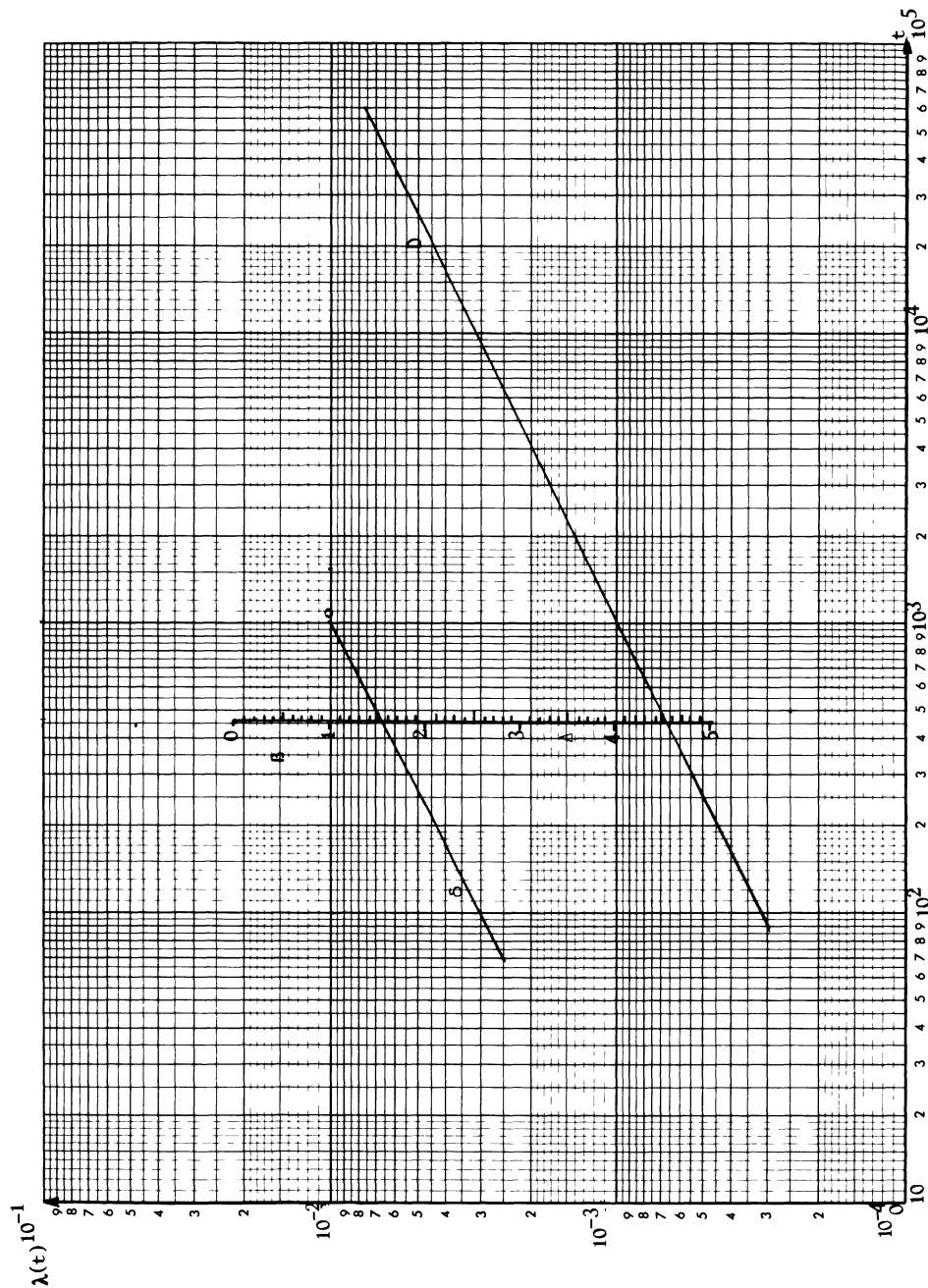


FIGURE 2

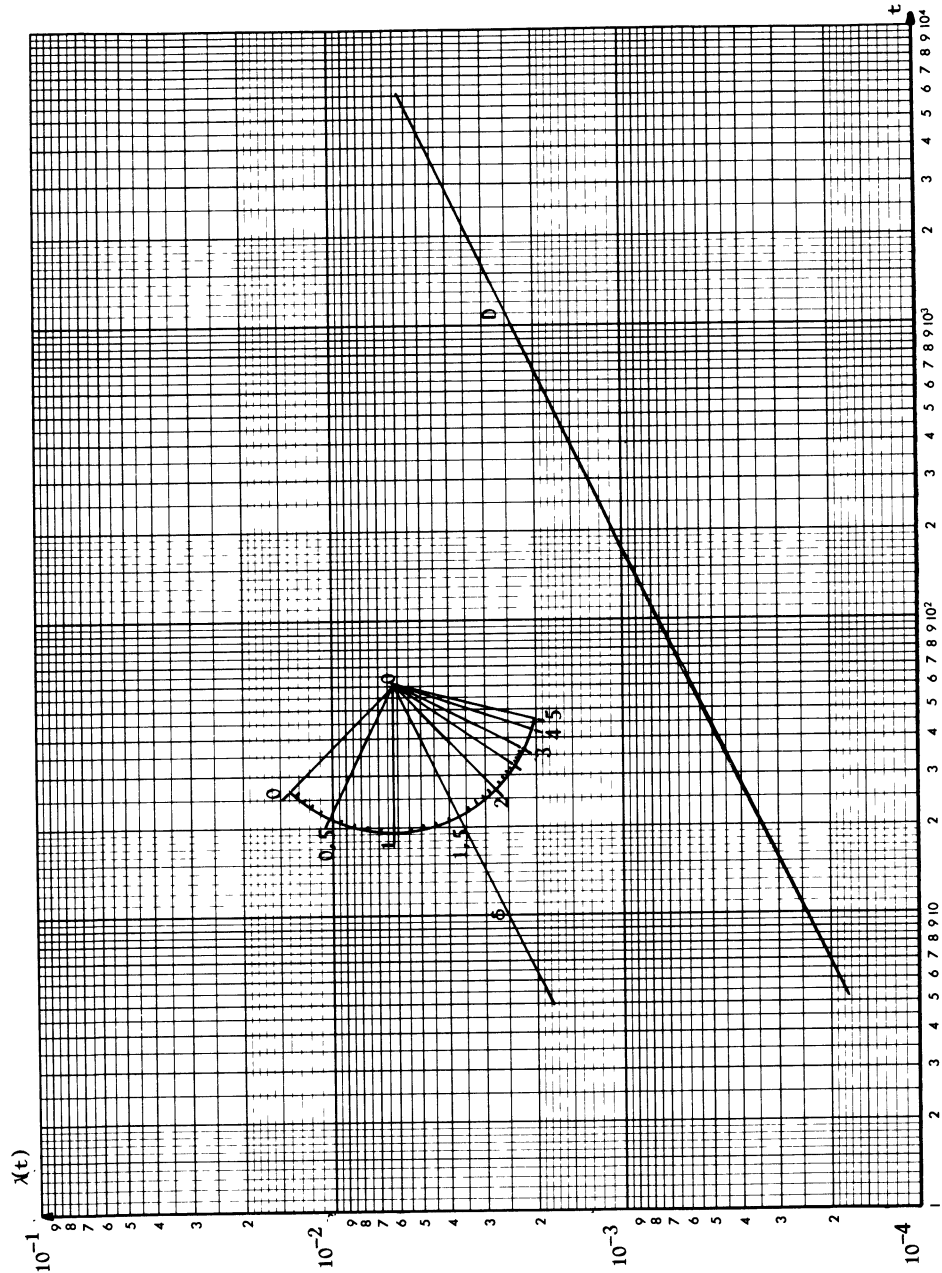


FIGURE 3

On peut, à partir de cette dernière relation, graduer la droite Δ en valeur de β en calculant la distance $HP = d$ pour différentes valeurs de β .

En menant par le point 0 la parallèle δ à toute droite D tracée sur ce papier à échelles fonctionnelles, l'intersection de δ avec Δ permet de lire la valeur de β (fig. 2).

Dans le graphique de la figure 3, la droite Δ a été remplacée par un secteur circulaire gradué en valeur de β , présentation bien connue dans le diagramme d'Allan Plait.

Critique de ces deux abaques :

Il n'est pas très aisé de mener par un point, une parallèle à une droite si on ne dispose pas d'une règle graduée. J'ai donc choisi de tracer des échelles fonctionnelles permettant une détermination plus facile de la pente d'une droite.

- Echelles fonctionnelles pour une détermination simple de la pente.

Les échelles proposées dans le diagramme de la figure 5, permettent la lecture de la pente en faisant la différence des ordonnées de deux points de la droite dont les abscisses sont choisies de façon particulière.

- Tracé des échelles permettant de déterminer la pente d'une droite par différence entre les ordonnées de deux points particuliers de la droite.

L'expression de la pente d'une droite est : $p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si on choisit deux points de la droite A et B , tels que $\Delta x = x_B - x_A = 1$, la pente est donnée par $p = \frac{\Delta y}{1} = y_B - y_A$.

Il suffit donc, pour tracer les échelles fonctionnelles, de choisir une longueur unité sur l'axe des abscisses, de doubler cet axe par une échelle arithmétique $(0, x)$ dont l'unité est celle choisie précédemment (μ_1) , de déterminer la longueur unité sur l'axe des ordonnées $(0y)$ (figure 4) et de doubler par cette échelle l'axe $0, y$.

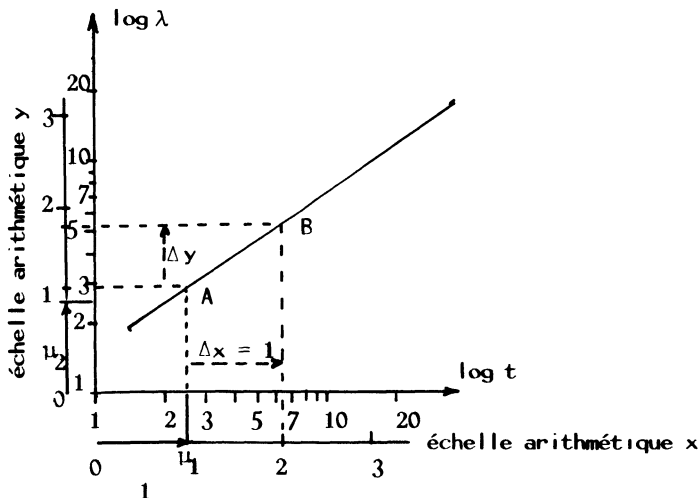


FIGURE 4

Remarque :

Ces deux échelles sont déjà tracées dans le diagramme d'Allan Plait; elles sont repérées A-axe et B-axe et correspondent aux transformations des variables t et $F(t)$.

A partir de la valeur de la pente mesurée, on peut déduire la valeur du facteur de forme β :

$$\beta = p + 1$$

Exemple :

Estimer graphiquement le facteur de forme du modèle de Weibull dont la variation du taux de défaillance instantané en fonction du temps est représentée par la droite D sur le papier à échelles fonctionnelles de la figure 5.

Les 2 points A et B choisis sur D ou des abscisses respectives sur l'échelle x : $x_A = 3$ et $x_B = 4$.

Soit

$$x_B - x_A = 1.$$

Les ordonnées de ces points A et B sont respectivement sur l'échelle y :

$$y_A = 1,08 \text{ et } y_B = 1,58$$

La pente de la droite a donc pour valeur

$$p = 1,58 - 1,08 = 0,5$$

et le facteur de forme du modèle Weibull vaut :

$$\beta = p + 1 = 1,5$$

b) Détermination de la vie caractéristique η **Remarque préliminaire :**

Pour $\beta = 1$, la droite représentative de la variation de λ en fonction du temps, est une horizontale dont l'ordonnée λ est constante et égale à $\frac{1}{\eta}$, d'où la détermination simple dans ce cas, de la vie caractéristique.

La méthode analytique ayant déjà été développée en II.2.2.1, trois des méthodes que nous allons proposer sont basées sur l'utilisation de valeurs particulières de t qui permettent de simplifier l'expression.

$$\log \lambda(t) = \log \beta + (\beta - 1) \log t - \beta \log \eta, \quad (3)$$

La quatrième méthode est basée sur l'utilisation d'un couple quelconque $t, \lambda(t)$ pris sur la droite de facteur de forme β .

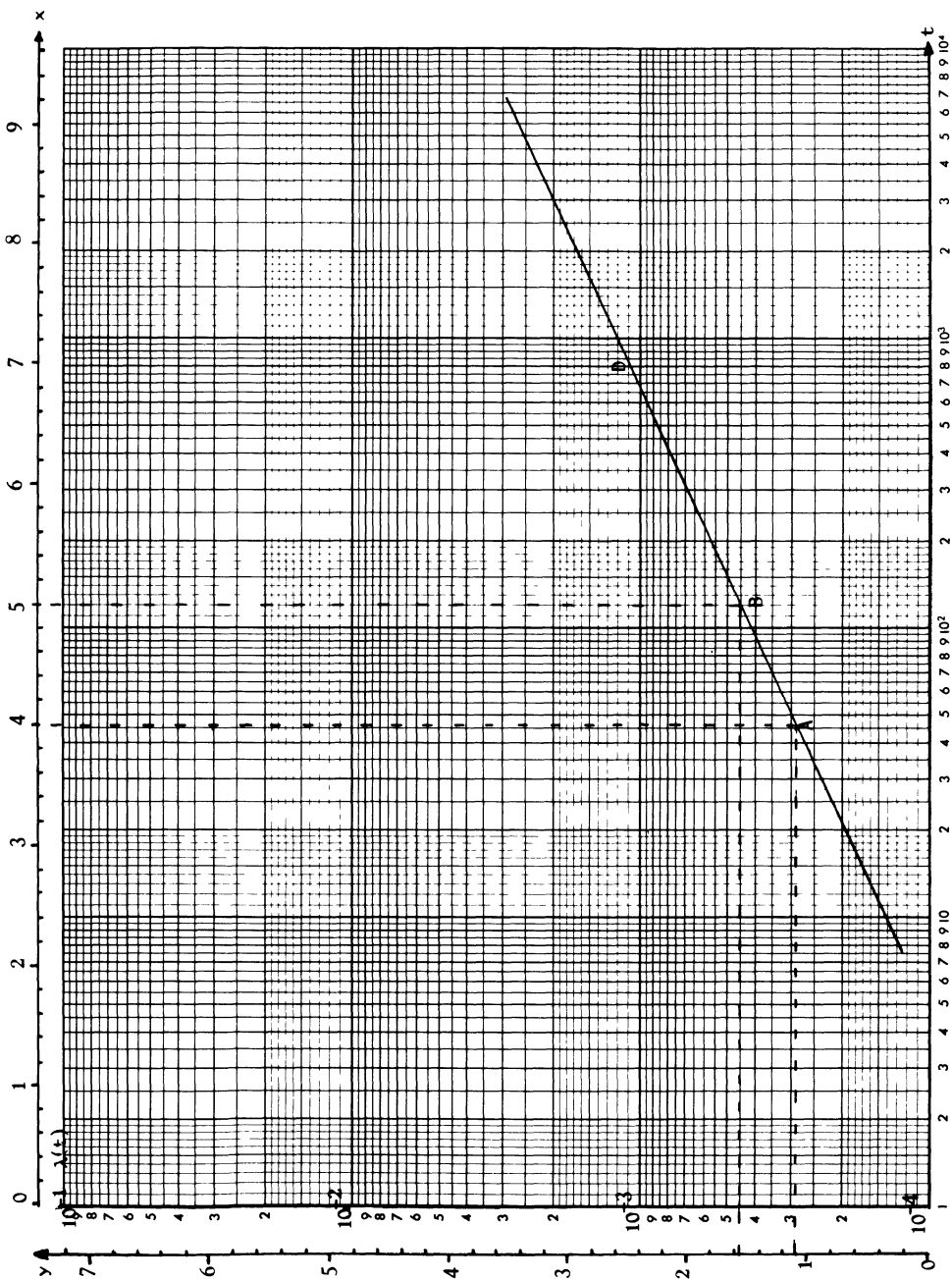


FIGURE 5

1. Utilisation de la valeur particulière $t = 1$

La relation (3) se réduit à :

$$\begin{aligned} \log \lambda(1) &= \log \beta - \log \eta \\ \text{ou} \quad \log \eta &= \frac{1}{\beta} (\log \beta - \log \lambda(1)) \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \eta = \left(\frac{\beta}{\lambda(1)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4)$$

Dans un papier fonctionnel ayant en ordonnée $\log \eta$ et en abscisse $\log \lambda(1)$, cette expression (4) est représentée par un réseau de droites ayant pour pentes $-\frac{1}{\beta}$.

Les figures 6 représentent de tels réseaux de droite permettant pour β connu, déterminé par l'une des méthodes proposées précédemment, et pour $\lambda(1)$ mesuré sur le diagramme $\lambda = f(t)$, de déterminer la valeur de la vie caractéristique.

Méthodologie :

- Sur le papier à échelles fonctionnelles $(\log \lambda(t), \log t)$, on trace la variation observée de λ en fonction du temps sur un échantillon. Si les points s'alignent, tracer la droite et déterminer le facteur de forme β à partir de la pente de cette droite.
- Lire sur le graphique la valeur de λ correspondant à $t = 1$, soit $\lambda(1)$.
- Choisir l'abaque 6 correspondant à la valeur de β déterminée ci-dessus.
- Reporter sur cette abaque la valeur de $\lambda(1)$ et par l'intermédiaire de la droite correspondant à β , lire en ordonnée la valeur de η .

2. Utilisation de la valeur particulière $t_\beta = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$

L'expression (3) se réduit à :

$$\log \lambda(t_\beta) = -\beta \log \eta \quad \text{ou} \quad \log \eta = -\frac{1}{\beta} \log \lambda(t_\beta) \quad (5)$$

d'où

$$\eta = \frac{1}{(\lambda(t_\beta))^{\frac{1}{\beta}}}$$

La courbe de la figure 7 permet de déterminer t_β pour β donné.

Dans un papier fonctionnel d'abscisse $\log \lambda(t_\beta)$ et d'ordonnée $\log \eta$, la relation (5) est représentée par un réseau de droites de pentes $-\frac{1}{\beta}$.

La figure 8 représente un tel réseau, permettant pour β donné, de déterminer la valeur de la vie caractéristique η à partir de la valeur de $\lambda(t_\beta)$.

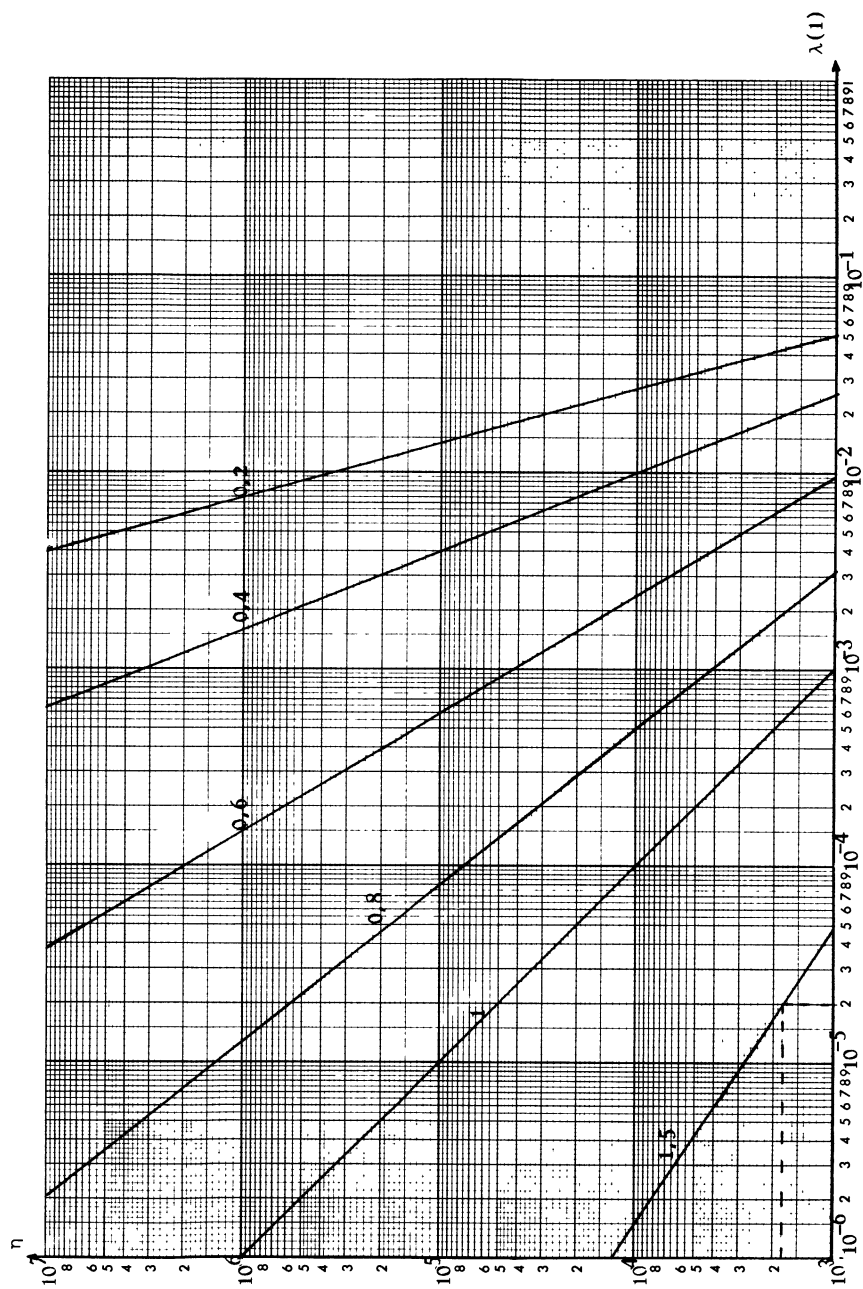


FIGURE 6a

β en paramètre

$\eta = f(\lambda(1))$

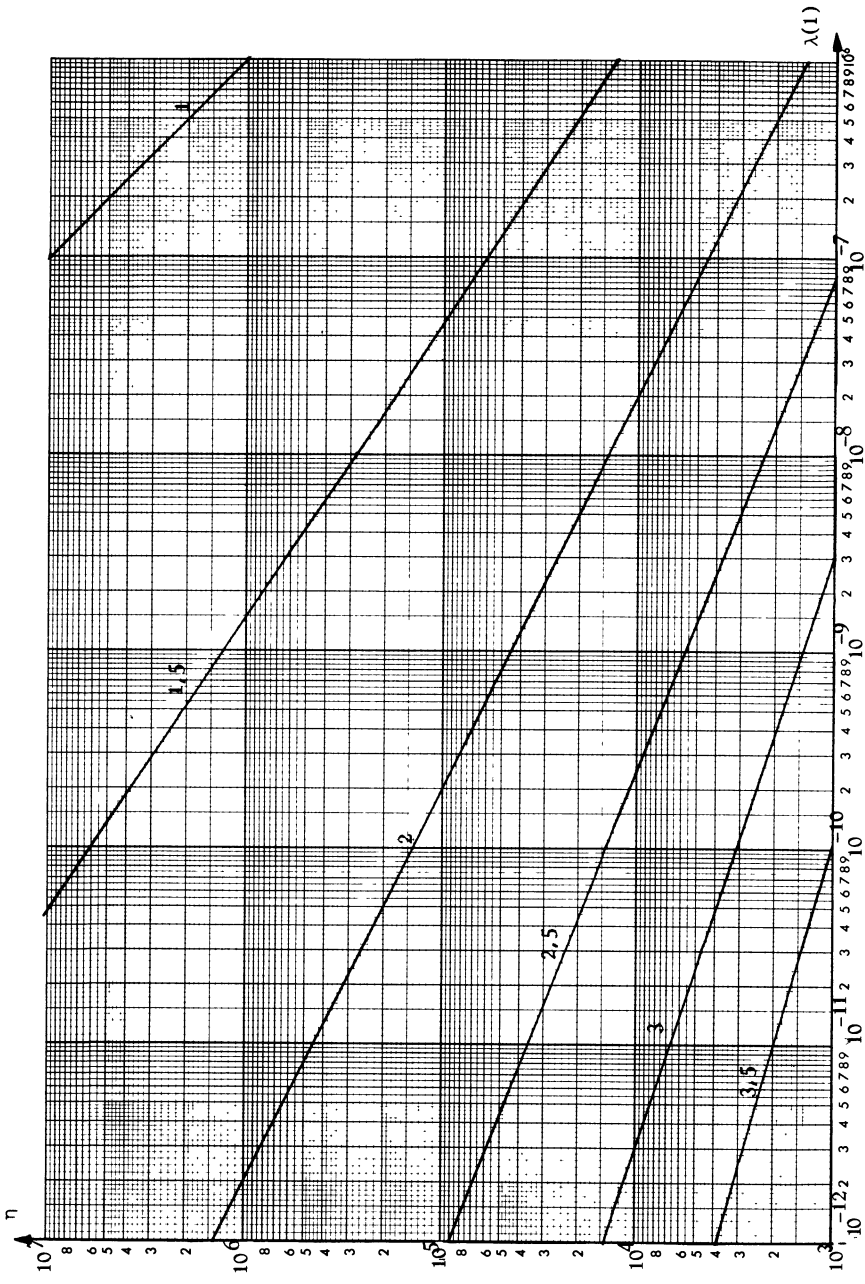


FIGURE 6b
 β en paramètre $\eta = f(\lambda(1))$

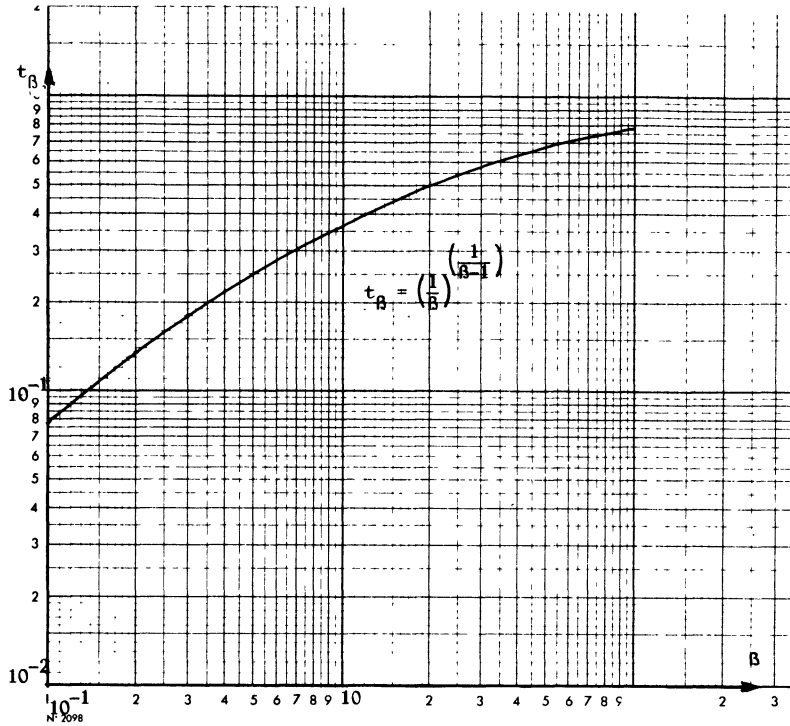


FIGURE 7

Méthodologie :

Après avoir déterminé β comme précédemment :

- Lire avec le graphique de la figure 7, la valeur de t_β .
- Déterminer sur le graphique $\lambda = f(t)$, la valeur de λ correspondant à t_β : $\lambda(t_\beta)$.
- Reporter dans l'abaque de la figure 8 la valeur $\lambda(t_\beta)$ et par l'intermédiaire de la droite correspondant à la valeur de β , lire en ordonnée la valeur de η .

3. Utilisation de la valeur particulière de t , telle que :

$$\log \lambda(t) - \log \beta = 0$$

soit t_* cette valeur.

L'expression (3) se réduit à :

$$0 = (\beta - 1) \log t_* - \beta \log \eta$$

$$\text{ou} \quad \log \eta = \frac{\beta - 1}{\beta} \log t_* \quad (6)$$

$$\text{soit} \quad t_*^{\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right)} = \eta$$

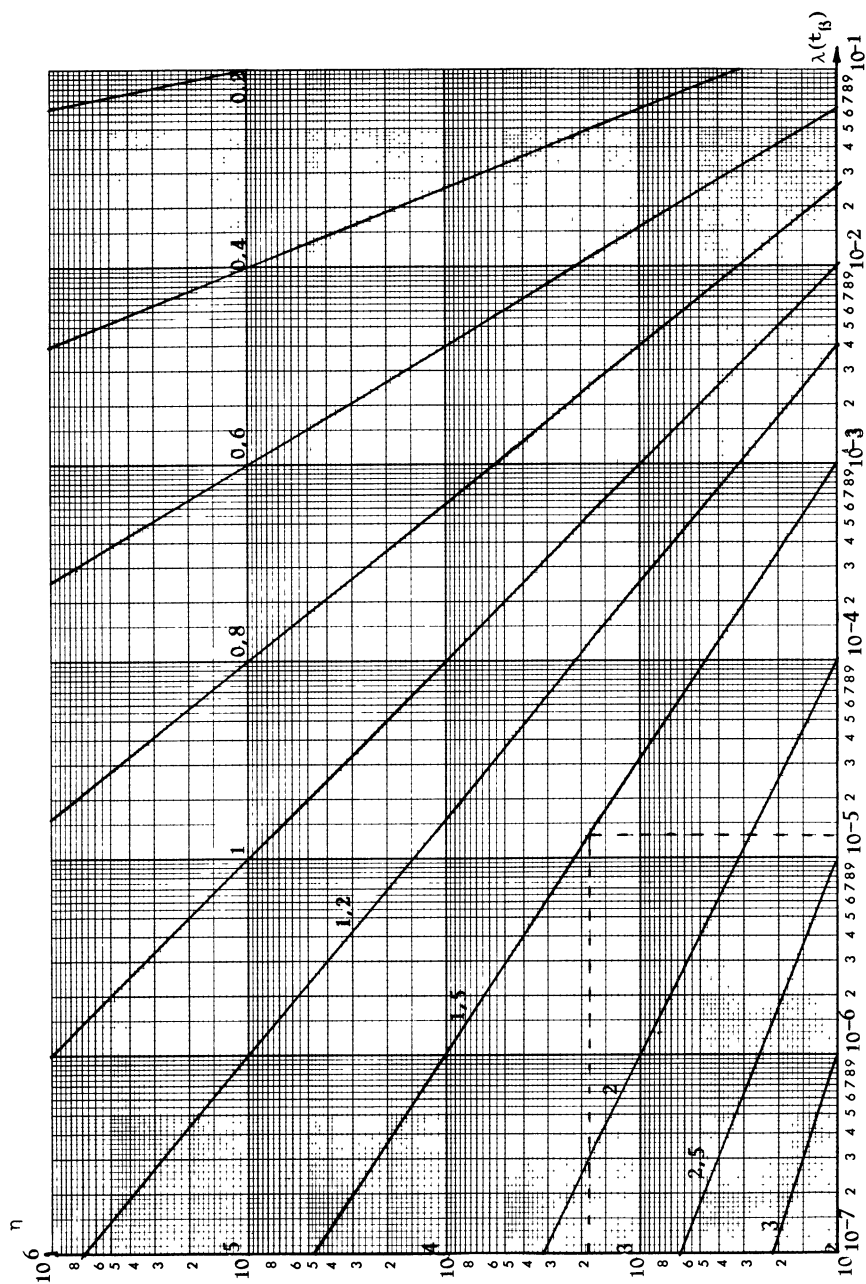


FIGURE 8

$$\eta = f(\lambda(t_B))$$

Dans un papier fonctionnel d'axe des abscisses $\log t$ et d'axe des ordonnées $\log \eta$, l'expression (6) est représentée par un réseau de droites de pentes $\frac{\beta-1}{\beta}$.

Les figures 9 représentent un tel réseau, permettant pour β donné, de déterminer la valeur de la vie caractéristique η , à partir de la valeur de t_* .

Méthodologie :

- Détermination de t_*

Elle se fait aisément dès lors que l'on remarque que l'opération $\log \lambda(t) - \log \beta$, revient dans le papier fonctionnel à effectuer une translation de la droite D représentative de $\lambda(t)$, de la quantité $-\log \beta$ qui est une constante.

On obtient donc une droite D' parallèle à D .

Dans le papier fonctionnel de la figure 10, on a tracé une échelle à droite du papier, donnant directement la valeur de $\log \beta$ et le sens dans lequel la translation de la droite D doit être effectuée selon la valeur de β .

Pour $\beta < 1$, $\log \beta < 0$ et $-\log \beta > 0$, la translation se fait donc vers le haut, pour $\beta > 1$, $\log \beta > 0$ et $-\log \beta < 0$, la translation se fait donc vers le bas.

On déterminera t_* en recherchant l'abscisse de la droite D' qui correspond à l'ordonnée y pour laquelle $\log \lambda(t) - \log \beta = 0$ soit $\log y = 0$ d'où $y = 1$. Pour cela, on détermine d'abord β à partir de la mesure de la pente de la droite D , puis on trace D' par translation de D de la quantité $-\log \beta$ et on détermine t_* , abscisse du point de D' d'ordonnée $y = 1$.

Dans le graphique de la figure 9 contenant la droite correspondant à la valeur de β mesurée, lire la valeur de la vie caractéristique, donnée par l'ordonnée du point de la droite β choisie dont l'abscisse est le t_* mesuré précédemment.

4. Critique des méthodes précédentes

Si elles permettent en simplifiant les formules de calculer η , ou de le déterminer à partir des abaques proposées, il reste néanmoins malaisé de déterminer les valeurs des λ correspondant aux valeurs particulières de t , car elles sont souvent hors des limites du diagramme et obligent à des extrapolations.

La dernière méthode exposée se propose d'utiliser un couple $(t, \lambda(t))$ pris sur la droite $\lambda = f(t)$ immédiatement accessible dans les limites du diagramme.

5. Détermination de η à partir de valeurs de t et $\lambda(t)$ directement accessibles sur le diagramme.

- Calcul direct

De l'expression du taux instantané de défaillance

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta-1}$$

on tire :

$$\eta = \left(\frac{\beta}{\lambda(t)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot t^{\frac{\beta-1}{\beta}} \quad (7)$$

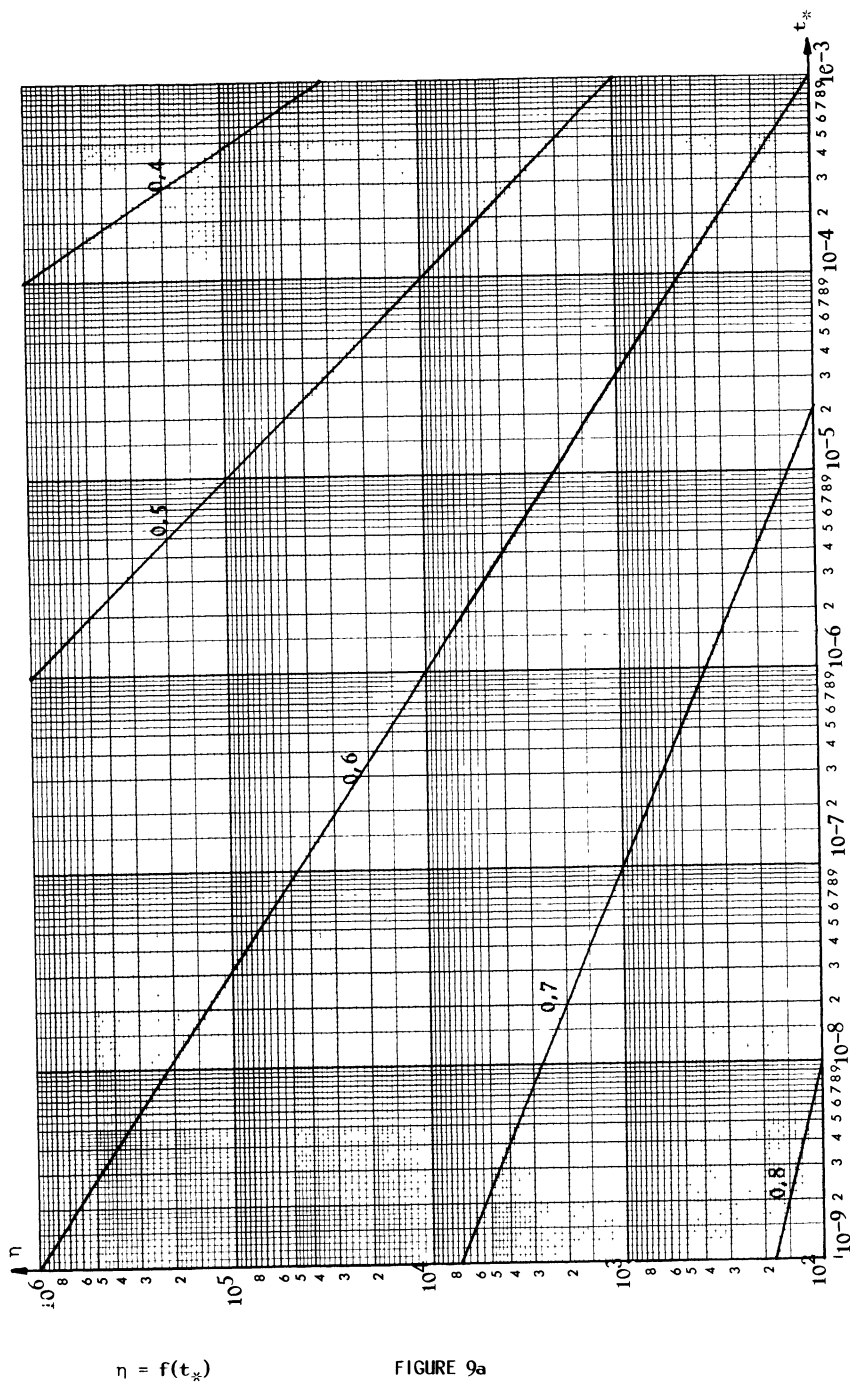


FIGURE 9a

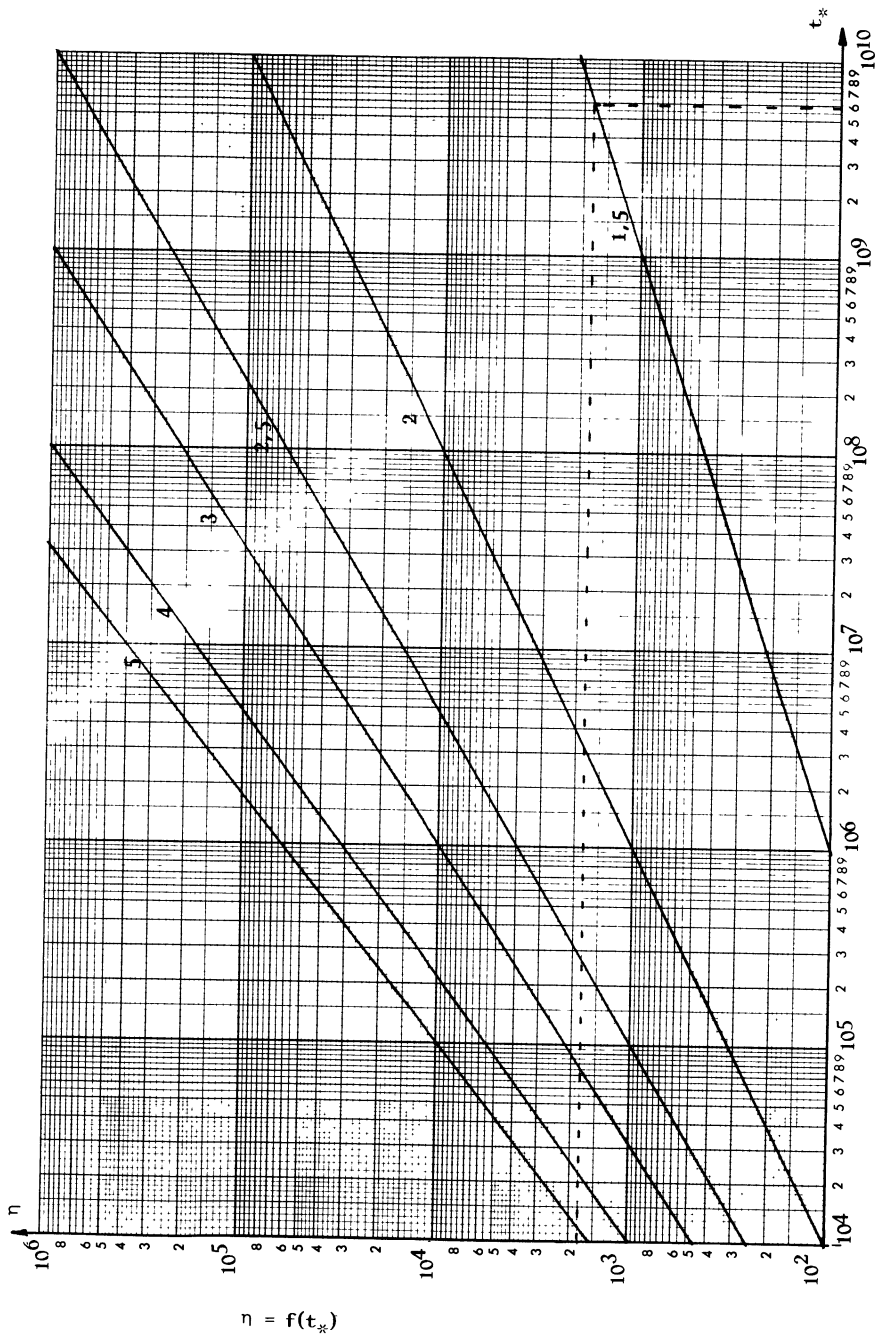
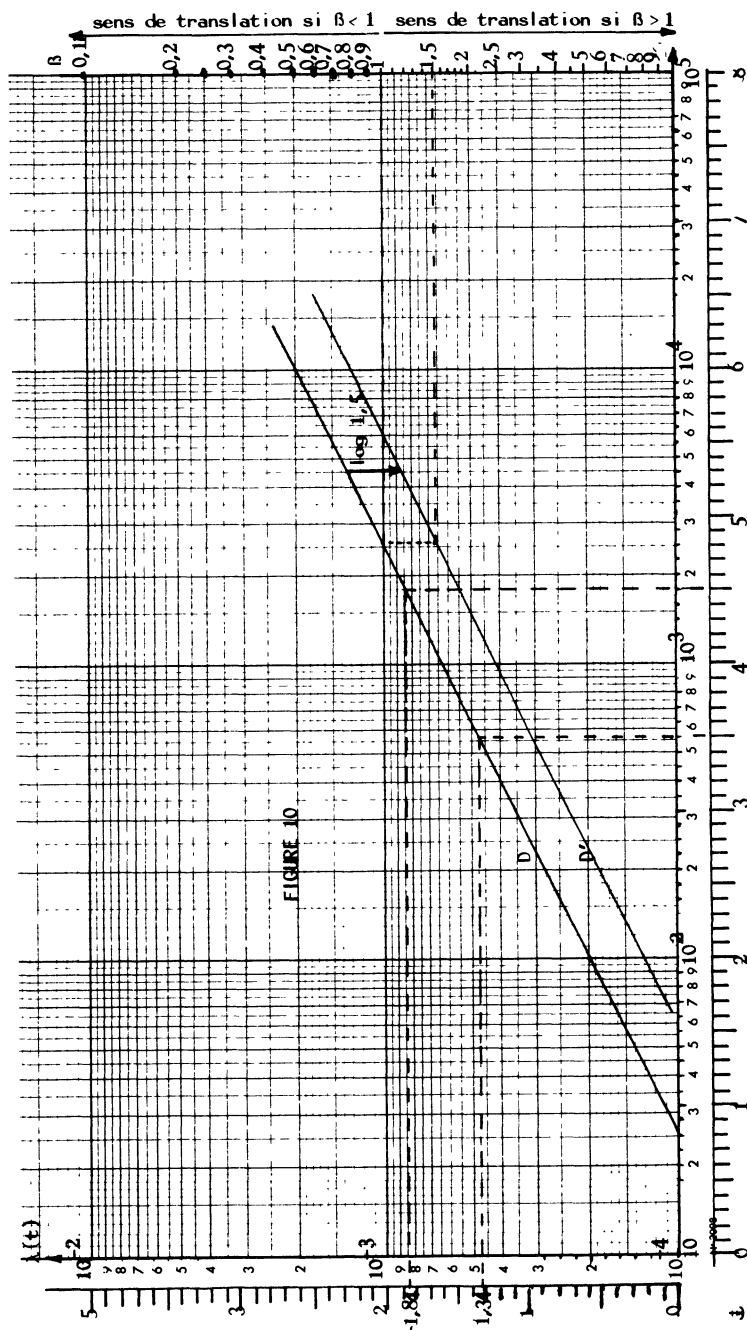


FIGURE 9b



En portant dans cette formule un couple de valeurs de t et $\lambda(t)$ pris sur la droite représentative de $\lambda = f(t)$ dans le papier à échelles fonctionnelles, on a accès directement à la valeur de η .

Détermination de η par des abaques

L'expression (7) peut se mettre sous la forme

$$\log \eta = \frac{1}{\beta} \log \beta - \frac{1}{\beta} \log \lambda(t) + \frac{\beta - 1}{\beta} \log t$$

cette expression pour β et $\lambda(t)$ donnés est représentée par une droite.

Les abaques des figures 11 à 13 montrent pour trois valeurs de $\lambda(t)$: $10^{-4}/h$, $10^{-5}/h$, $10^{-6}/h$, les réseaux de droites obtenus pour différentes valeurs de β .

Méthodologie :

- Tracer les observations $\lambda(t) = f(t)$ sur le papier à échelles fonctionnelles. Si les points obtenus s'alignent, tracer la droite.
- Déterminer β à partir de la mesure de la pente.
- Choisir dans le diagramme une valeur de $\lambda(t)$ pour laquelle on possède l'abaque correspondant.
- Déterminer l'abscisse du point de la droite ayant cette valeur de $\lambda(t)$ comme ordonnée, soit t .
- Reporter la valeur trouvée de t dans l'abaque correspondant à $\lambda(t)$ choisi et par l'intermédiaire de la droite du réseau correspondant à la valeur β déterminée ci-dessus, lire la valeur de η correspondante en ordonnée.

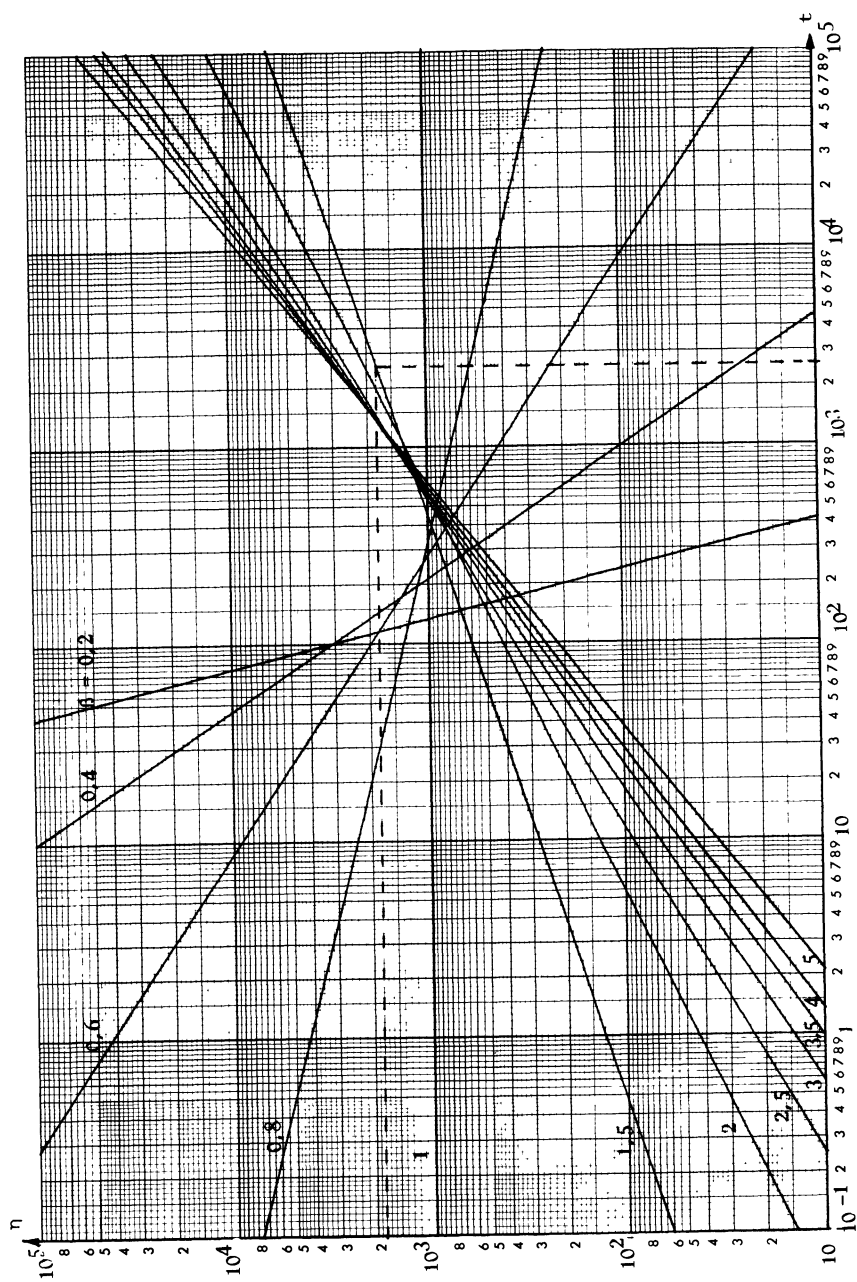
c) Exemple d'application des méthodes proposées

La droite D tracée dans les papiers à échelles fonctionnelles des figures 2, 3, 5 et 10 correspond à un modèle de Weibull de paramètres $\beta = 1,5$ et $\eta = 1800h$.

Elle a été tracée à partir de 2 points calculés à partir de ce modèle.

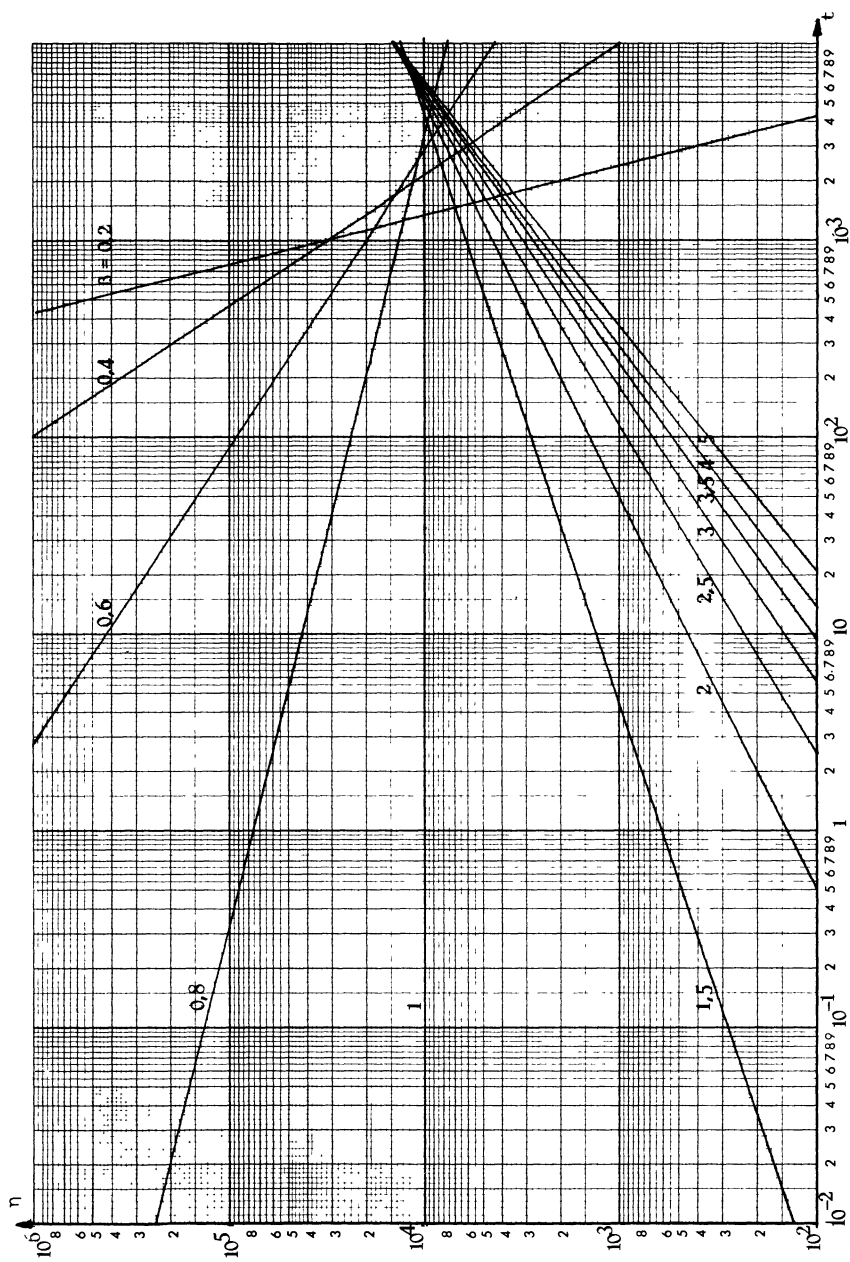
1. Détermination du facteur de forme en utilisant les abaques

- * Dans les figures 2 et 3 en menant par le point 0 la parallèle à D , le segment obtenu coupe la droite verticale ou le secteur circulaire gradués en valeur de β , au point $\beta = 1,5$.
- * Dans la figure 5, pour deux points A et B pris sur D et tels que $x_A = 3$ et $x_B = 4$, on lit respectivement $y_A = 1,08$ et $y_B = 1,58$.
comme $x_B - x_A = 1$, on a $p = y_B - y_A = 1,58 - 1,08 = 0,5$ et $\beta = p + 1 = 0,5 + 1 = 1,5$.
- * Dans la figure 10, les échelles linéaires sont obtenues par les relations $a = 8 + 2\log \lambda$ et $b = 2\log t - 2$ pour les ordonnées et les abscisses respectivement.



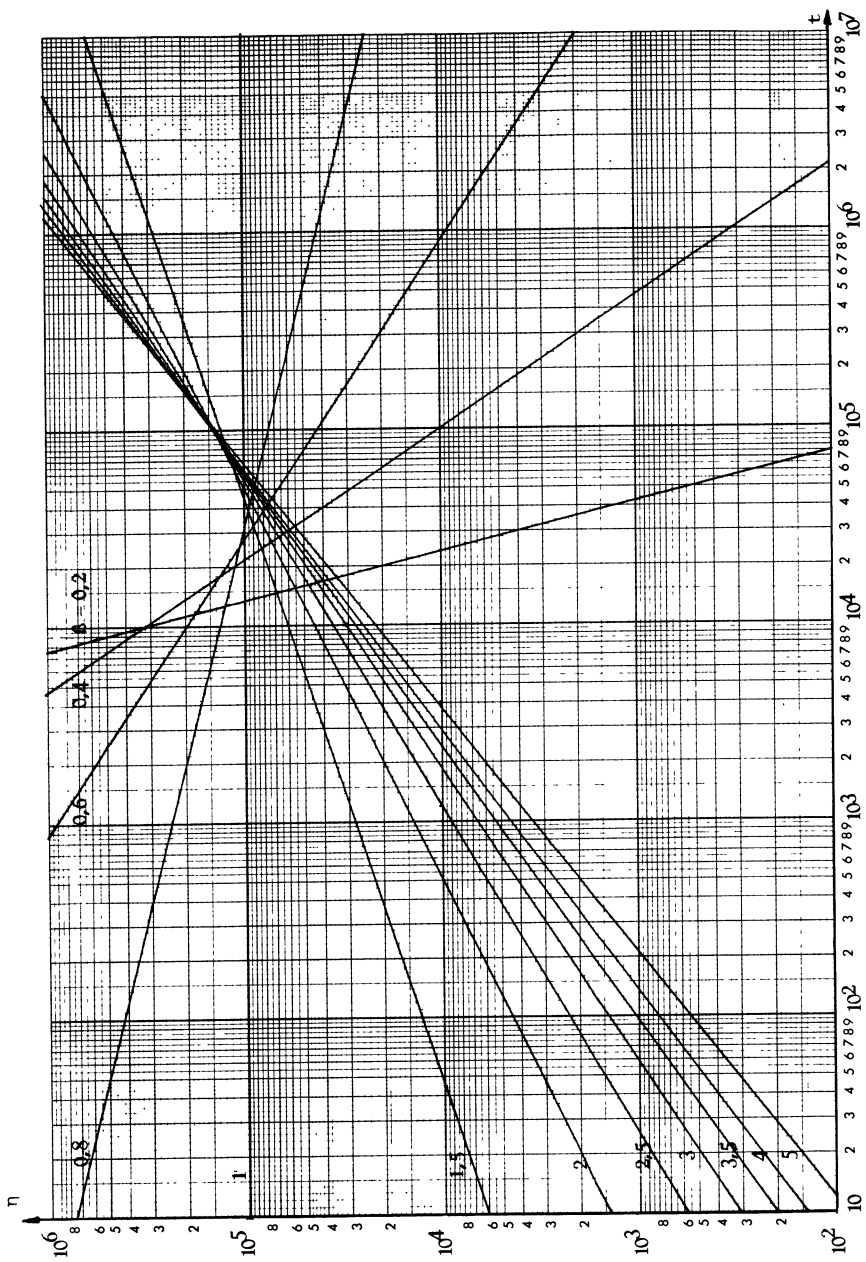
$$\lambda(t) = 10^{-3}$$

FIGURE 11



$\lambda(t) = 10^{-4}$

FIGURE 12



$\lambda(t) = 10^{-5}$

FIGURE 13

2. Détermination de la vie caractéristique η :

- Utilisation de $t = 1 h$

L'extrapolation sur le diagramme de la figure 3 permet de déterminer $\lambda(1) = 1,96 \cdot 10^{-5}/h$.

En reportant cette valeur dans l'abaque 6a, par l'intermédiaire de la droite $\beta = 1,5$, on lit $\eta = 1,8 \cdot 10^3 h$.

- Utilisation de t_β

Pour $\beta = 1,5$, l'abaque de la figure 7 donne la valeur $t_\beta = 0,44 h$.

L'extrapolation sur la figure 3 pour la valeur $t_\beta = 0,44 h$ donne $\lambda(t_\beta) = 1,3 \cdot 10^{-5}/h$. En reportant cette valeur dans l'abaque de la figure 8, par l'intermédiaire de la droite $\beta = 1,5$, on lit $\eta = 1,8 \cdot 10^3 h$.

- Utilisation de t_*

Après translation de la droite D , dans le diagramme de la figure 10, de la valeur $-\log 1,5$, on obtient la droite D' . L'extrapolation à partir de cette droite permet de lire pour $(\lambda(t_*) - \log 1,5) = 0$ la valeur $t_* = 5,8 \cdot 10^9 h$.

En reportant cette valeur dans l'abaque de la figure 9, par l'intermédiaire de la droite $\beta = 1,5$, on détermine $\eta = 1,8 \cdot 10^3 h$.

- Utilisation d'un couple $(t, \lambda(t))$ directement accessible sur le diagramme $\lambda = f(t)$.

Sur le diagramme de la figure 3, on choisit sur D le point d'ordonnée $\lambda = 10^{-3}/h$ auquel correspond l'abscisse $t = 2,55 \cdot 10^3 h$.

Dans l'abaque de la figure 11, en reportant cette valeur de t , par l'intermédiaire de la droite $\beta = 1,5$, on lit $\eta = 1,8 \cdot 10^3 h$.

Cette dernière méthode est beaucoup plus simple d'emploi que les précédentes, car elle ne nécessite aucune extrapolation, à partir du moment où l'on a construit l'abaque correspondant à la valeur de $\lambda(t)$ choisie. En son absence, il reste toujours la possibilité d'effectuer le calcul direct de η , en reportant les valeurs de β et du couple $(t, \lambda(t))$ dans la formule (7).

2.3 Effet d'un gamma dans le modèle de Weibull

a) L'expression de $R(t)$ devient :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta^\beta} (t - \gamma)^{\beta-1}$$

et
$$\log \lambda(t) = \log \beta + (\beta - 1) \log(t - \gamma) - \beta \log \eta$$

Dans le papier à échelles fonctionnelles $\log \lambda$, $\log t$, cette expression n'est plus représentée par une droite. Nous allons déterminer sa position par rapport à la droite d'expression

$$\log \lambda'(t) = \log \beta + (\beta - 1) \log t - \beta \log \eta$$

de même valeurs de paramètres β et η .

On peut écrire :

$$\log \lambda(t) - \log \lambda'(t) = (\beta - 1)(\log(t - \gamma) - \log t)$$

d'où
$$\frac{\lambda(t)}{\lambda'(t)} = \left(\frac{t - \gamma}{t} \right)^{\beta - 1}$$

Si $\beta - 1 > 0$

$$t \geq \gamma \text{ entraîne } 0 \leq \left(\frac{t - \gamma}{t} \right)^{\beta - 1} < 1$$

et par suite

$$\lambda(t) < \lambda'(t) \text{ pour } t \text{ donné } \gamma \leq t \leq \infty$$

La courbe représentative de $\lambda(t)$ est donc toujours en dessous de la droite représentative de $\lambda'(t)$ dans le papier à échelles $\log$, $\log$.

Si $\beta = 0$ $\lambda(t)$ et $\lambda'(t)$ sont constants et égaux entre eux.

Si $\beta - 1 < 0$, $t \geq \gamma$ entraîne $0 \leq \frac{t - \gamma}{t} < 1$ et $1 < \left(\frac{t - \gamma}{t} \right)^{|\beta - 1|} \leq \infty$ et par suite $\lambda(t) > \lambda'(t)$ pour $\gamma \leq t \leq \infty$.

La courbe représentative de $\lambda(t)$ est donc toujours au dessus de la courbe représentative de $\lambda'(t)$ dans le papier à échelle $\log$, $\log$.

*b) Etude de la pente de la courbe $\log \lambda(t) = f(t - \gamma)$
en fonction de $\log t$.*

Posons :

$$y = \log \lambda(t) = \log \beta + (\beta - 1) \log(t - \gamma) - \beta \log \eta$$

$$x = \log t$$

et
$$z = \log(t - \gamma)$$

Calculons la dérivée de $\log \lambda(t)$ par rapport à $\log t$.

A partir des variables définies ci-dessus, on peut écrire :

$$\frac{d \log \lambda(t)}{d \log t} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

avec $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ et en posant $\frac{1}{K} = \text{Log } 10$

on a : $\frac{dy}{dz} = \beta - 1$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \cdot K$ d'où $\frac{dt}{dx} = t \cdot \frac{1}{K}$

et $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t - \gamma} \cdot K$ d'où $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{t - \gamma} \cdot K \cdot t \cdot \frac{1}{K} = \frac{t}{t - \gamma}$

et : $\frac{dy}{dx} = (\beta - 1) \cdot \frac{t}{t - \gamma}$

Tableau de variation :

$(\beta - 1) > 0$				$(\beta - 1) < 0$			
t	γ	+	$+\infty$	t	γ	+	$+\infty$
$t - \gamma$	0	+	$+\infty$	$t - \gamma$	0	+	$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$	$+\infty$		$\beta - 1$	$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$		$\beta - 1$

Conclusions : dans le papier à échelles $\log \lambda$, $\log t$,

- 1) Pour $\beta - 1 = 0$ soit $\beta = 1$ la courbe $\log \lambda(t) = f(t - \gamma)$ est une droite confondue avec la droite $\log \lambda'(t) = f(t)$.
- 2) Pour $\beta > 1$, la courbe $\log \lambda(t)$ est en dessous de la droite $\log \lambda'(t)$, sa pente variant de $+\infty$ pour $t = \gamma$ à $\beta - 1$ pour $t \Rightarrow \infty$, elle a sa concavité dirigée vers le bas et admet 2 asymptotes. D'une part la verticale $\log t = \log \gamma$, d'autre part, la droite $\log \lambda'(t)$ figure 14.
- 3) Pour $\beta < 1$, la courbe $\log \lambda(t)$ est au dessus de la droite $\log \lambda'(t)$, sa pente varie de $-\infty$ à $\beta - 1$, sa concavité est dirigée vers le haut et elle admet 2 asymptotes : la verticale $\log t = \log \gamma$ et la droite $\log \lambda'(t)$ figure 15.

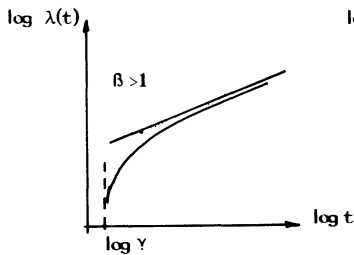


FIGURE 14

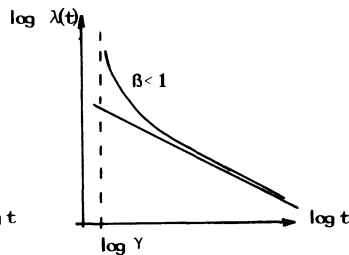


FIGURE 15

c) Détermination de la valeur de γ

Il y a principalement deux méthodes pour déterminer la valeur de γ ; l'une est graphique, l'autre analytique.

- *Méthode graphique*

Elle consiste à retrancher pour chaque observation, une même valeur aux temps de défaillance observés. L'ordonnée des points n'est pas affectée par cette transformation, seule l'action sur la position sur l'échelle des abscisses est "physiquement" plus importante pour les temps observés faibles que pour ceux forts à cause de la transformation $\log t$.

Si après cette opération, la concavité de la courbe obtenue est toujours dirigée du même côté, il faut retrancher une valeur plus grande aux instants de défaillance.

Si au contraire, la concavité est maintenant tournée de l'autre côté, il faut retrancher une valeur plus faible. Ainsi de suite par approximation successive, jusqu'à l'obtention de points qui se répartissent autour d'une droite. Cette dernière valeur retranchée est une estimation de γ .

Remarque :

La valeur à retrancher ne peut pas être plus grande que la plus petite valeur des instants de défaillance observés, car $\log$ (valeur négative) n'a pas de sens ici.

- *Méthode analytique*

Nous rappellerons brièvement cette méthode due à M. DAVID et présentée dans la Revue de Statistique Appliquée.

On prend trois points sur la courbe (A, B et C) de coordonnées respectives $\log \lambda_A, \log t_A$; $\log \lambda_B, \log t_B$; $\log \lambda_C, \log t_C$. Si après avoir retranché une valeur γ identique aux temps t_A, t_B, t_C les points résultants $A', B',$ et C' sont alignés, on peut écrire :

$$\frac{\log \lambda_A}{\log(t_A - \gamma)} = \frac{\log \lambda_B}{\log(t_B - \gamma)} = \frac{\log \lambda_C}{\log(t_C - \gamma)}$$

$$\text{d'où } \frac{\log \lambda_A - \log \lambda_B}{\log(t_A - \gamma) - \log(t_B - \gamma)} = \frac{\log \lambda_B - \log \lambda_C}{\log(t_B - \gamma) - \log(t_C - \gamma)}$$

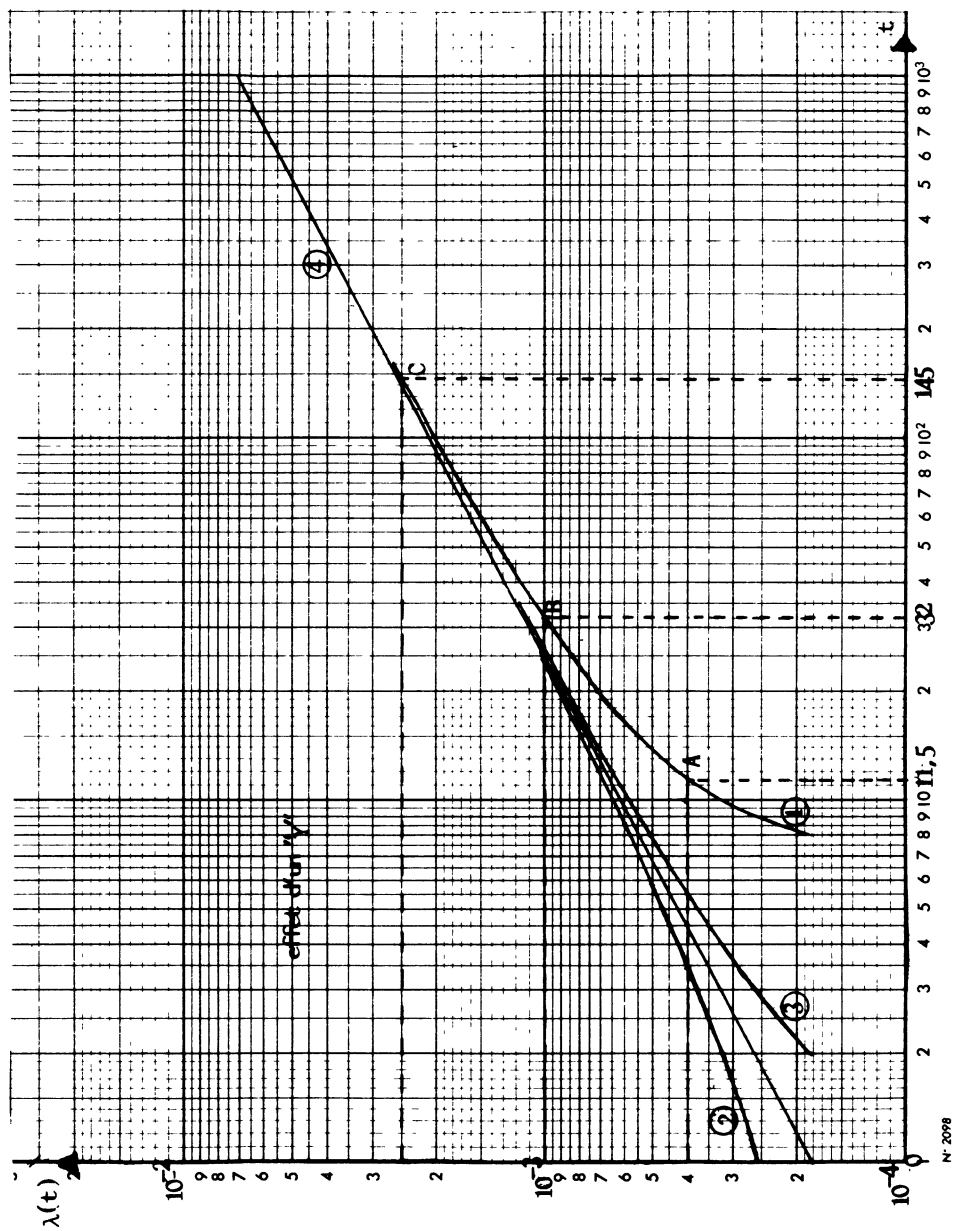
Si on choisit les points A, B et C tels que $\log \lambda_A - \log \lambda_B = \log \lambda_B - \log \lambda_C$,

$$\text{alors } \log(t_A - \gamma) - \log(t_B - \gamma) = \log(t_B - \gamma) - \log(t_C - \gamma)$$

$$\text{ou encore : } \frac{t_A - \gamma}{t_B - \gamma} = \frac{t_B - \gamma}{t_C - \gamma}$$

$$\text{d'où l'on tire : } \gamma = \frac{t_A \cdot t_C - t_B^2}{t_A + t_C - 2 t_B}$$

D'une façon pratique, les erreurs d'estimation faites sur $t_A, t_B,$ et t_C font que la valeur de γ trouvée doit être "affinée" par la méthode graphique. Reste néanmoins que cette méthode permet d'obtenir une première valeur pour démarrer la méthode graphique.



Exemple :

Figure 16, la courbe 1 représente la variation du taux de défaillance instantané, d'un modèle de Weibull d'expression :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-7}{364}\right)^{1.536}}$$

La courbe 2 représente le résultat obtenu en translatant de $\gamma = 8$ unités de temps la courbe 1 ; les points ne s'alignent pas.

La courbe 3 correspond à une translation de $\gamma = 6$ unités de temps ; toujours pas d'alignement des points.

La courbe 4 correspond à une translation de $\gamma = 7$ unités de temps des points de la courbe 1.

Remarque :

Bien qu'ayant sa concavité dirigée vers le haut, la courbe 2 ne peut pas correspondre à un mélange de populations, car elle est le résultat d'une translation d'une courbe originelle, d'une valeur de γ trop forte.

Les points A, B et C sur la courbe 3 ont pour coordonnées respectives : $t_A = 11,5, \lambda_A = 4 \cdot 10^{-4}$; $t_B = 32, \lambda_B = 10^{-3}$; $t_C = 145, \lambda_C = 2,5 \cdot 10^{-3}$.

On vérifie que $d_1 = \log \lambda_A - \log \lambda_B = 3,39794 + 3 = -0,39794$ et que $d_2 = \log \lambda_B - \log \lambda_C = -3 + 2,60206 = -0,39794$ donc que $d_1 = d_2$, par suite on peut calculer γ par la formule citée plus haut

$$\gamma = \frac{t_A \cdot t_C - t_B^2}{t_A + t_C - 2 t_B} = \frac{11,5 \times 145}{11,5 + 145 - 2 \times 32} = 6,95$$

ici la valeur calculée ne présente qu'un faible écart vis à vis de la valeur théorique $\gamma_0 = 7$ unités de temps.

2.4 Cas du mélange de deux populations

Le phénomène observé est le résultat de deux modes de défaillance ayant respectivement des probabilités de bon fonctionnement au temps t :

$$R_1(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1}}$$

et
$$R_2(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}}$$

La probabilité de bon fonctionnement résultante a pour expression :

$$R(t) = R_1(t) \times R_2(t)$$

d'où l'on tire le taux instantané de défaillance :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{-1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R_1(t) \times R_2(t)} \left(R_2(t) \frac{dR_1(t)}{dt} + R_1(t) \frac{dR_2(t)}{dt} \right) \\ &= \frac{-1}{R_1(t)} \cdot \frac{dR_1(t)}{dt} + \frac{-1}{R_2(t)} \cdot \frac{dR_2(t)}{dt} = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \end{aligned}$$

soit

$$\lambda(t) = \frac{\beta_1}{\eta_1^{\beta_1}} t^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2-1} \text{ que l'on va encore mettre sous la forme :}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta_1}{\eta_1^{\beta_1}} t^{(\beta_1-1)} \times \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2-\beta_1} \right)$$

$$\text{et} \quad \log \lambda(t) = \log \lambda_1(t) + \log \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{(\beta_2-\beta_1)} \right)$$

La quantité entre parenthèses est $\geq 1 \forall t \geq 0$ et donc

$$\text{Log} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{(\beta_2-\beta_1)} \right) \geq 0$$

Conclusion : Pour tout $t \geq 0$, $\log \lambda(t) \geq \log \lambda_1(t)$

La courbe $\log \lambda(t)$ est donc située au dessus de la droite $\log \lambda_1(t)$ dans un papier à échelles fonctionnelles $\log \lambda(t)$, $\log t$.

$$\text{Pour } t = 0, \quad \log \lambda(0) = \log \lambda_1(0) \quad \text{si } \beta_2 > \beta_1$$

$$\text{Pour } t = \infty, \quad \log \lambda(\infty) = \log \lambda_1(\infty) \quad \text{si } \beta_1 > \beta_2$$

On montrerait de même qu'on peut écrire

$$\log \lambda(t) = \log \lambda_2(t) + \log \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_2^{\beta_2}}{\eta_1^{\beta_1}} t^{\beta_1-\beta_2} \right)$$

avec comme conclusion :

La courbe $\log \lambda(t)$ est donc située au dessus de la droite $\log \lambda_2(t)$ dans un papier à échelles fonctionnelles $\log \lambda(t)$, $\log t$.

$$\text{Pour } t = 0, \quad \log \lambda(0) = \log \lambda_2(0) \quad \text{si } \beta_1 > \beta_2$$

$$\text{Pour } t = \infty, \quad \log \lambda(\infty) = \log \lambda_2(\infty) \quad \text{si } \beta_2 > \beta_1$$

Les figures 17a et 17b montrent la situation de la courbe $\log \lambda(t)$ vis à vis des droites $\log \lambda_1(t)$ et $\log \lambda_2(t)$.

- *Etude de la tangente à la courbe $\log \lambda(t)$.*

Cette étude va permettre de préciser la position de la courbe vis à vis des droites $\log \lambda_1(t)$ et $\log \lambda_2(t)$ dans les échelles fonctionnelles $\log \lambda(t)$, $\log t$.

De l'expression :

$$\log \lambda(t) = \log \lambda_1(t) + \log \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2-\beta_1} \right)$$

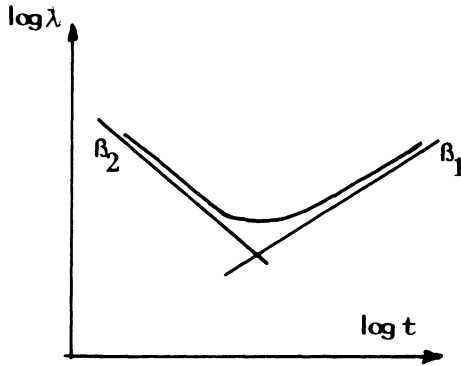


FIGURE 17a

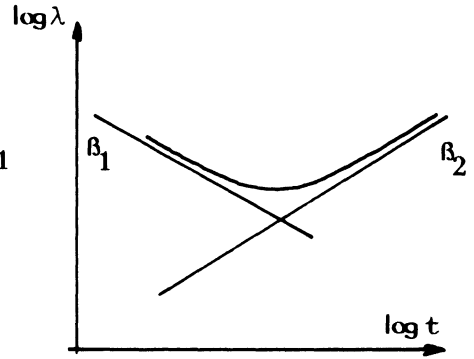


FIGURE 17b

on tire :

$$\frac{d \log \lambda(t)}{d \log t} = \frac{d \log \lambda_1(t)}{d \log t} + \frac{d \log \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2 - \beta_1} \right)}{d \log t}$$

posons $\log t = x$ d'où $dx = \frac{dt}{t} \cdot K$ et $\frac{dt}{dx} = \frac{t}{K}$ avec $K = \frac{1}{\log 10}$

en posant

$$y = \log \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2 - \beta_1} \right)$$

on peut écrire

$$\frac{dy}{d \log t} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} (\beta_2 - \beta_1) t^{\beta_2 - \beta_1}}{1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\eta_1^{\beta_1}}{\eta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2 - \beta_1}}$$

Si $\beta_2 > \beta_1$

Pour $t = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ et par suite

$$\frac{d \log \lambda(t)}{d \log t} = \frac{d \log \lambda_1(t)}{d \log t} = \beta_1 - 1$$

Pour $t = \infty$ $\frac{dy}{dx} \rightarrow \beta_2 - \beta_1$ et par suite

$$\frac{d \log \lambda(t)}{d \log t} = \beta_1 - 1 + \beta_2 - \beta_1 = \beta_2 - 1$$

Conclusion

Si $\beta_2 > \beta_1$

La courbe $\text{Log } \lambda(t)$ admet donc comme asymptotes la droite de pente $\beta_1 - 1$ pour $\text{Log } t \rightarrow -\infty$ et la droite de pente $\beta_2 - 1$ pour $\text{Log } t \rightarrow +\infty$.

Si $\beta_1 > \beta_2$

On montrerait alors facilement que les 2 asymptotes deviennent respectivement la droite de pente $\beta_2 - 1$ pour $\text{Log } t \rightarrow -\infty$ et la droite de pente $\beta_1 - 1$ pour $\text{Log } t \rightarrow +\infty$.