

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAX PINHAS

**Processus de diffusion et espérance arrêtée :  
application au calcul actuariel**

*Revue de statistique appliquée*, tome 28, n° 1 (1980), p. 77-79

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1980\\_\\_28\\_1\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_1_77_0)

© Société française de statistique, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# PROCESSUS DE DIFFUSION ET ESPERANCE ARRETEE : APPLICATION AU CALCUL ACTUARIEL

**Max PINHAS**

Université des Sciences Sociales, Toulouse

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé,  $\mathcal{F}(t)$   $t \geq 0$  une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ ,  $(W(t), \mathcal{F}(t))$  un mouvement brownien standard et  $(X(t), \mathcal{F}(t))$  le processus défini par :

$$dX = (m + \rho X) dt + \sigma dW, \quad X(0) = X_0 > 0$$

et  $m, \rho, \sigma$  fonctions déterministes, continues vérifiant pour  $t \geq 0$  :

$$m(t) > 0, \quad \rho(t) \geq 0, \quad \sigma(t) \geq c > 0.$$

Nous savons [1, 2] que  $X$  possède des trajectoires continues (avec la probabilité 1) et qu'il admet pour expression :

$$X(t) = h(t) \left[ X_0 + \int_0^t \frac{m}{h} ds + \int_0^t \frac{\sigma}{h} dW(s) \right] \quad \text{où} \quad h(s) = \exp \int_0^s \rho du.$$

Choisissons un horizon  $T$  et posons :

$$\theta(\omega) = \inf \{t, X(t, \omega) = 0\} \quad \text{et} \quad \theta(\omega) = +\infty$$

si l'ensemble est vide,

$$A = \{\omega, \theta(\omega) \leq T\}.$$

Nous considérons alors la variable aléatoire  $\tilde{X} = X(\theta \wedge T)$ .

L'objectif essentiel de cette note est de construire un minorant de l'espérance arrêtée  $E\tilde{X}$ . Par ailleurs, à titre d'illustration, nous appliquons cette technique à l'étude d'un comportement actuariel.

## 1. UN MINORANT DE $1 - P(A)$

A tout  $\eta > 0$  faisons correspondre le sous-ensemble  $\Delta(\eta)$  du plan  $(\alpha, \beta)$  caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0 \\ \min_{0 \leq t \leq T} \left[ X_0 + \int_0^t \frac{m}{h} ds - \frac{\alpha}{2} g(t) - \beta \right] \geq \eta, \quad \text{où} \quad g(t) = \int_0^t \frac{\sigma^2}{h^2} ds. \end{array} \right.$$

Nous remarquons qu'il existe des valeurs de  $\eta$  pour lesquelles ce sous-ensemble n'est pas vide (par exemple,  $\eta \leq X_0$ ). On vérifie d'autre part que  $\Delta(\eta)$  est borné et fermé.

Puisque cet ensemble est compact nous introduisons la fonction  $\gamma$  :

$$\begin{cases} \gamma(\eta) = 0 & \text{si } \Delta(\eta) = \emptyset \\ \gamma(\eta) = \max(1 - e^{-\alpha\beta}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Utilisant la technique de minoration préconisée dans une étude antérieure [3], nous pouvons affirmer le résultat suivant :

**Théorème.** — La probabilité  $1 - P(A)$  est minorée par  $\sup_{\eta > 0} \gamma(\eta)$ .

## 2. UN MINORANT DE L'ESPERANCE ARRETEE

Comme par définition:  $\theta \wedge T = \min(\theta, T)$ , l'espérance arrêtée est donnée par la formule :

$$E\tilde{X} = h(T) \left[ X_0 + \int_0^T \frac{m}{h} ds \right] (1 - P(A)) + h(T) \int_{CA} \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s, \omega) dP(\omega).$$

$$\text{Or } \left| \int_{CA} \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s, \omega) dP(\omega) \right| \leq \int_{\Omega} \left| \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s, \omega) \right| dP(\omega) \text{ et}$$

$\int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s)$  suit une loi gaussienne, de moyenne nulle et de variance

$$v^2 = \int_0^T \frac{\sigma^2}{h^2} ds.$$

Nous en déduisons le minorant :

$$K = h(T) \left\{ \left[ X_0 + \int_0^T \frac{m}{h} ds \right] \sup \gamma(\eta) - v \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\}$$

## 3. UNE APPLICATION A LA THEORIE DES ASSURANCES (Mutuelles)

Nous supposons dans ce paragraphe que l'équation :

$$dX = [m(t, X) + \rho(t, X) X] dt + \sigma(t) dW$$

régit l'évolution du fonds de réserve de la compagnie.

\*  $X_0$  valeur initiale.

\*  $\rho \geq 0$  taux d'intérêt à court-terme.

\*  $p \, dt$  prime perçue pendant  $[t, t + dt]$ .

\* risques élémentaires gaussiens, indépendants, de moyenne  $\mu \, dt$ , et de variance  $\sigma^2 \, dt$  ( $\mu$  et  $\sigma$  fonctions déterministes continues,  $\mu(t) > 0$  et  $\sigma(t) \geq c > 0$ ).

\*  $m = p - \mu$  chargement de sécurité instantané.

Envisageons la politique consistant à déterminer le chargement de sécurité par la condition (imposée aussi longtemps que  $X$  reste positif) :

$$m + \rho X = \frac{\tau}{2} \sigma^2$$

(où  $\tau$  est une constante positive) d'où  $p = \mu + \frac{\tau}{2} \sigma^2 - \rho X$ .

Alors  $dX$  devient égal à  $\frac{\tau}{2} \sigma^2 \, dt + \sigma \, dW$  et le minorant de l'espérance arrêtée vaut :

$$K = \left[ X_0 + \frac{\tau}{2} \int_0^T \sigma^2 \, ds \right] \sup \gamma(\eta) - \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^T \sigma^2 \, ds \right]^{1/2}.$$

Un calcul élémentaire donne [3] :

$$\sup \gamma(\tau_i) = \begin{cases} 1 - \exp \left( - \frac{\left( X_0 + \frac{\tau}{2} \sigma^2 T \right)^2}{2 \sigma^2 T} \right) & \text{si } T \leq \frac{2 X_0}{\tau \sigma^2} \\ 1 - \exp(-\tau X_0) & \text{si } T \geq \frac{2 X_0}{\tau \sigma^2}. \end{cases}$$

Comme  $\sup \gamma(\tau_i)$  reste constamment supérieur ou égal à  $1 - \exp(-\tau X_0)$ , un autre minorant (plus simple) de l'espérance arrêtée apparaît :

$$L = \left( X_0 + \frac{\tau}{2} \int_0^T \sigma^2 \, ds \right) (1 - e^{-\tau X_0}) - \left( \frac{2}{\pi} \int_0^T \sigma^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Indiquons enfin *deux utilisations* immédiates de ce minorant.  $L$  est, de façon évidente, une fonction croissante de  $\tau$  (variable positive), dont le domaine des valeurs contient la demi-droite  $R_+$ . Par conséquent :

a) si  $X_0$  est fixé à l'avance, en résolvant par rapport à  $\tau$  l'équation  $L = X_0$  et en reportant la valeur de la racine dans l'expression de  $p$ , on obtient une évaluation de la prime unitaire qui garantit que le fonds de réserve à l'instant  $T$  — compte-tenu de la règle de cessation d'activité en cas de fonds de réserve nul sur  $[0, T]$  — se situera, en moyenne, à un niveau supérieur ou égal à son niveau initial.

b) dans le cas où  $X_0$  et  $\tau$  sont *toutes deux variables de décision*, et où à la condition précédente s'ajoute l'obligation de limiter à  $\epsilon$  la probabilité de ruine (pour un exercice de durée infinie), les équations  $L = X_0$  et  $\epsilon = e^{-\tau X_0}$  (cf. [3]) déterminent sans ambiguïté les exigences de cette politique.

[1] LIPTZER-SHYRIAIEV. — "Statistique des processus stochastiques".

[2] FRIEDMAN. — "Stochastic differential equations" Academic Press.

[3] PINHAS. — "Probabilité de survie et martingale exponentielle". (Cahier n° 31 de l'U.E.R. de Sciences Economiques, Toulouse 1).