

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. JAMBU

Sur l'utilisation conjointe d'une classification hiérarchique et de l'analyse factorielle en composantes principales

Revue de statistique appliquée, tome 25, n° 4 (1977), p. 5-35

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_4_5_0

© Société française de statistique, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'UTILISATION CONJOINTE D'UNE CLASSIFICATION HIÉRARCHIQUE ET DE L'ANALYSE FACTORIELLE EN COMPOSANTES PRINCIPALES

M. JAMBU

I – INTRODUCTION

On oppose volontiers en analyse des données, méthodes de représentation spatiale et méthodes de représentation de classes hiérarchisées ou non. On a déjà montré l'intérêt de l'utilisation conjointe de la méthode de classification hiérarchique fondée sur le critère du χ^2 et de l'analyse des correspondances (cf. [1]. [2]). On se propose dans cette note d'effectuer la même démarche pour l'analyse en composantes principales normée en lui adjoignant une méthode de classification hiérarchique fondée sur le critère de la maximisation du moment centré d'ordre 2 d'une partition. Des relations entre ces deux méthodes peuvent être explicitées. Pour illustrer ces relations, on a utilisé des données portant sur une étude biométrique de crânes de chiens domestiques et de loups réalisée par L. de BONIS (Cf. [3]).

II – PRESENTATION DES DONNEES

Les données extraites des travaux de L. de BONIS et de F. POPLIN sont constituées de mensurations de différentes caractéristiques de crânes effectuées sur une population de 43 crânes dont 12 de loups, 30 de chiens domestiques de grande taille, et d'un crâne fossile de canidé découvert dans le quaternaire du Cantal ; le problème posé par L. de BONIS était celui de l'affectation du crâne inconnu à un ensemble de loups ou de chiens domestiques. Préalablement, il précisait les positions respectives des deux ensembles de référence en appliquant les principes de l'analyse biométrique multidimensionnelle (applications de l'analyse des correspondances et de l'analyse en composantes principales).

On reprendra dans cette note certains résultats exposés par L. de BONIS dans un article publié dans MAMMALIA, qu'on complètera par quelques classifications hiérarchiques et quelques formulations qui font précisément l'objet de ce compte rendu.

(1) Attaché de recherches au CNRS – Université Pierre et Marie Curie – Paris VI.

Soit I l'ensemble des crânes (chiens domestiques, loups, canidé de Jussac).

Soit J l'ensemble des caractéristiques mesurées sur ces crânes. {LCB, LMS, LBM, LP, LM, LAM}.

La figure 1 donne une explication et une description de ces différentes caractéristiques.

Soit $x_{ij} = \{x_{ij}, i \in I, j \in J\}$ le tableau des mesures des caractéristiques effectuées sur les crânes dans le même système d'unité (ici le millimètre).

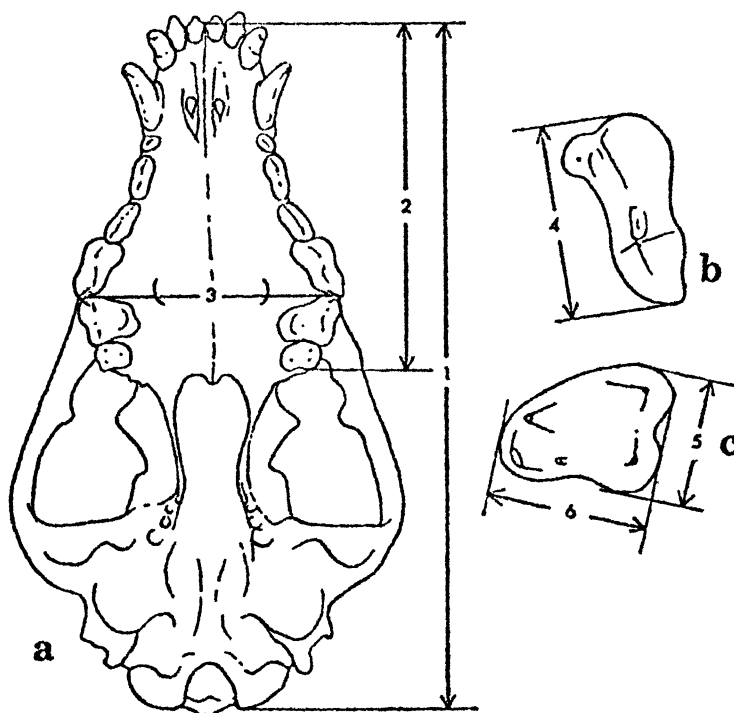


Figure 1 — Schéma des mensurations relevées sur le crâne de Jussac. a) calcarium en vue ventrale ; b) carnassière supérieure gauche en vue occlusale ; c) première molaire supérieure gauche en vue occlusale.

1 (LCB) : longueur condylo-basale. 2(LSM) : longueur de la mâchoire supérieure. 3(LBM) : largeur bi-maxillaire. 4(LP) : longueur de la carnassière supérieure. 5(LM) : longueur de la première molaire supérieure. 6(LAM) : largeur de la première molaire supérieure.

III — POSITION DU PROBLEME

Pour analyser un tel tableau on se propose d'utiliser l'analyse en composantes principales sur les variables centrées réduites (analyse en composantes principales normée) et la classification hiérarchique dont l'algorithme est fondé sur la maximisation du moment centré d'ordre 2 d'une partition. On s'efforcera de répondre aux questions suivantes :

		RACE'S	NUM	LCB	IMS	LRM	LP	LM	LAM
▲	1	BULL-DOG	100	129	64	95	17.5	11.2	13.8
▲	1	BULL-DOG	101	154	74	76	20.0	14.2	16.5
▲	15	CHIEN-IND	102	170	87	71	17.9	12.3	15.9
▲	15	CHIEN-IND	103	188	94	73	19.5	13.3	14.8
▲	15	CHIEN-IND	104	161	81	55	17.1	12.1	13.0
▲	15	CHIEN-IND	105	164	90	58	17.5	12.7	14.7
▲	11	BERGER ALLEMAND	106	203	109	65	20.7	14.0	16.8
▲	13	LEVRIER	107	178	97	57	17.3	12.8	14.3
▲	13	LEVRIER	108	212	114	65	20.5	14.3	15.5
▲	13	LEVRIER	109	221	123	62	21.2	15.2	17.0
▲	14	COLLEY	110	183	97	52	19.3	12.9	13.5
▲	12	DOBERMAN	111	212	112	65	19.7	14.2	16.0
▲	6	SETTER	112	220	117	70	19.8	14.3	15.6
▲	10	CHIEN DES PYRENEES	113	216	113	72	20.5	14.4	17.7
▲	8	BAS-ROUGE	114	216	112	75	19.6	14.0	16.4
▲	11	BERGER ALLEMAND	115	205	110	68	20.8	14.1	16.4
▲	9	BRIARD	116	228	122	78	22.5	14.2	17.8
▲	13	LEVRIER	117	218	112	65	20.3	13.9	17.0
▲	4	BULL-MASTIF	118	190	93	78	19.7	13.2	14.0
▲	9	BRIARD	119	212	111	73	20.5	13.7	16.6
▲	6	SETTER	120	201	105	70	19.8	14.3	15.9
▲	6	SETTER	121	196	106	67	18.5	12.6	14.2
▲	2	BOXER	122	158	71	71	16.7	12.5	13.3
▲	5	DOGUE ALLEMAND	123	255	126	86	21.4	15.0	18.0
▲	5	DOGUE ALLEMAND	124	234	113	83	21.3	14.8	17.0
▲	7	GRONENDAL	125	205	105	70	19.0	12.4	14.9
▲	11	BERGER ALLEMAND	126	186	97	62	19.0	13.2	14.2
▲	5	DOGUE ALLEMAND	127	241	119	87	21.0	14.7	18.3
▲	3	SAINT-BERNARD	128	220	111	88	22.5	15.4	18.0
▲	5	DOGUE ALLEMAND	129	242	120	85	19.9	15.3	17.6
●		LOUP	200	199	105	73	23.4	15.0	19.1
●		LOUP	201	227	117	77	25.0	15.3	18.6
●		LOUP	202	228	122	82	24.7	15.0	18.5
●		LOUP	203	232	123	83	25.3	16.8	15.5
●		LOUP	204	231	121	78	23.5	16.5	19.6
●		LOUP	205	215	118	74	25.7	15.7	19.0
●		LOUP	206	184	100	69	23.3	15.8	19.7
●		LOUP	207	175	94	73	22.2	14.8	17.0
●		LOUP	208	239	124	77	25.0	16.8	27.0
●		LOUP	209	203	109	70	23.3	15.0	18.7
●		LOUP	210	226	118	72	26.0	16.0	19.4
●		LOUP	211	226	119	77	26.5	16.8	19.3
★		CANILE DE JUSSAC	001	210	103	72	20.5	14.0	16.7

Figure 2 – Tableau des données x_{ij} . Unité : le mm

- Sur quels axes les classes obtenues par classification automatique se séparent-elles.

- Quels axes factoriels caractérisent les classes.

- Quelles variables caractérisent les sous-populations déterminées par classification.

- Quelles relations existent entre classes et facteurs.

Avant d'aborder la résolution de ces questions, on rappelle brièvement les résultats principaux associés à l'analyse en composantes principales et à la classification hiérarchique.

IV – L'ANALYSE FACTORIELLE EN COMPOSANTES PRINCIPALES NORMEE (Cf. [4])

IV.1. – Formules

Soit $x_{IJ} = \{x_{ij} = \text{mesuration de la variable } j \text{ de } J \text{ effectuée sur l'élément } i \text{ (ici un crâne) de } I \mid i \in I, j \in J\}$

Soit CardI le nombre d'éléments de l'ensemble I ; (les chiens et loups)

Soit CardJ le nombre d'éléments de l'ensemble J ; (les variables)

$$x_j = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{\text{CardJ}}\} \quad \text{avec} \quad \bar{x}_k = \text{moy}(x_j)$$

$$\sigma_j = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\text{CardJ}}\} \quad \text{avec} \quad \sigma_k^2 = \text{var}(x_j)$$

On se place dans le Nuage $N_J(I)$ des variables centrées réduites.

$$N_J(I) = \left\{ i \in I ; X_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}, m_i = 1 \right\} \subset R_J$$

$$N_J^*(I) = \{i \in I ; x_{ij}, m_i = 1\} \subset R_J$$

- Distance usuelle entre observations dans $N_J(I)$

$$d^2(i, i') = \|i - i'\|^2 = \sum_{j \in J} (X_{ij} - X_{i'j})^2 = \sum_{j \in J} (x_{ij} - x_{i'j})^2 / \sigma_j^2$$

- Distance entre observations dans $N_J^*(I)$

$$d_*^2(i, i') = \|i - i'\|_{\sigma_J}^2 = \sum_{j \in J} (x_{ij} - x_{i'j})^2 / \sigma_j^2$$

- Centres de gravité des Nuages $(N_J(I), N_J^*(I))$

$$G(N_J(I)) = o_J$$

$$G(N_J^*(I)) = x_J$$

- Moments d'inertie des Nuages $N_J(I)$ et $N_J^*(I)$

$$M^2(N_J(I)) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} m_i \|i - g\|^2 = \sum_{i \in I} m_i (X_{ij})^2 = M^2(N_J^*(I))$$

- Matrice de corrélation des variables et moments d'inertie du nuage $N_J(I)$

$$M^2(N_J(I)) = \text{Card}I \cdot \text{Trace}(M) = \text{Card}I \cdot \text{Card}J$$

où M est la matrice de corrélation des variables.

- Facteurs et axes factoriels – Coordonnées des observations dans l'espace factoriel.

Soient $\{F_\alpha(i) ; i \in I, \alpha \in A\}$ les facteurs "observations" associés à l'analyse en composantes principales normée

Les facteurs sont de moyenne nulle, de variance égale à λ_α , et non corrélés deux à deux, en particulier on a :

$$\sum_{i \in I} F_\alpha^2(i) = \lambda_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = M^2(N_J(I)) = \text{Card}I \cdot \text{Card}J$$

- Représentation des variables (éléments de J) dans l'espace factoriel.

Soient $\{G_\alpha(j) , j \in J , \alpha \in A\}$ les facteurs associés aux variables.

On exprime $G_\alpha(j)$ de la façon suivante :

$$G_\alpha(j) = \sum_{i \in I} X_{ij} F_\alpha(i) / \sqrt{\lambda_\alpha}$$

- Distance entre deux observations dans l'espace factoriel

$$d^2(i, i') = \sum_{\alpha \in A} (F_\alpha(i) - F_\alpha(i'))^2$$

IV.2. – Résultats de l'analyse en composantes principales normée sur l'étude des crânes de chiens et de loups

Axes factoriels	1	2	3	4	5	6
Valeurs propres de la matrice d'inertie	183	35	28	8	4	2
Pourcentages d'inertie	70,8 %	13,4 %	10,8 %	3 %	1,5 %	0,5 %
Cumul	70,8 %	84,2 %	95 %	98 %	99,5 %	100 %
Inertie totale $M^2(N_J(I)) = 258$						

Figure 3 – Paramètres principaux de l'Analyse en composantes principales normée.

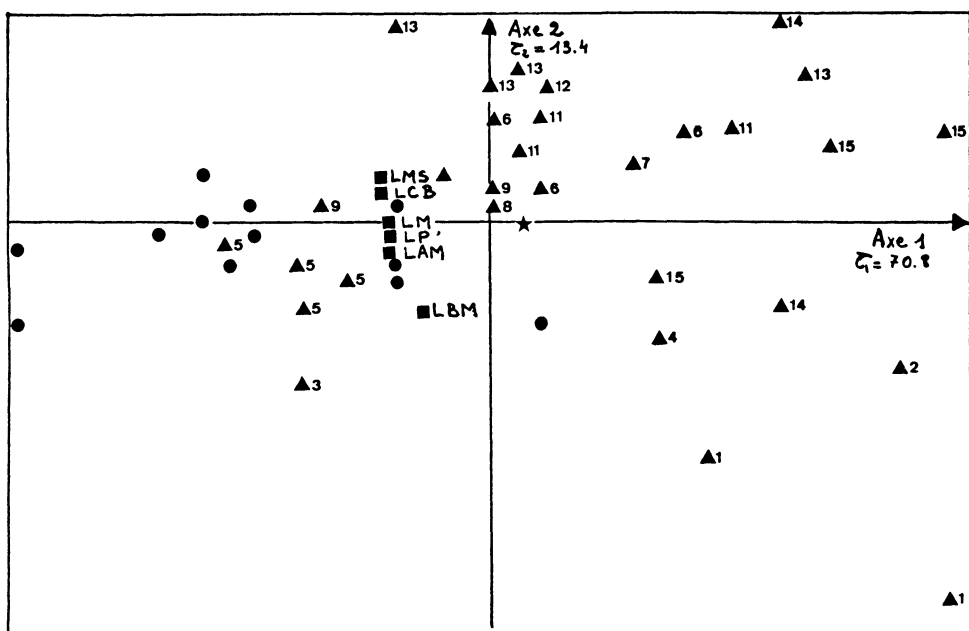


Figure 4 – Représentation dans le système des deux premiers axes factoriels de l'ensemble I des crânes et de l'ensemble J des caractéristiques. {●} = {crânes de loups} ; {▲} = {crânes de chiens} les numéros indiquent les races de chiens * = crâne du canidé de Jussac {■} = {caractéristiques}

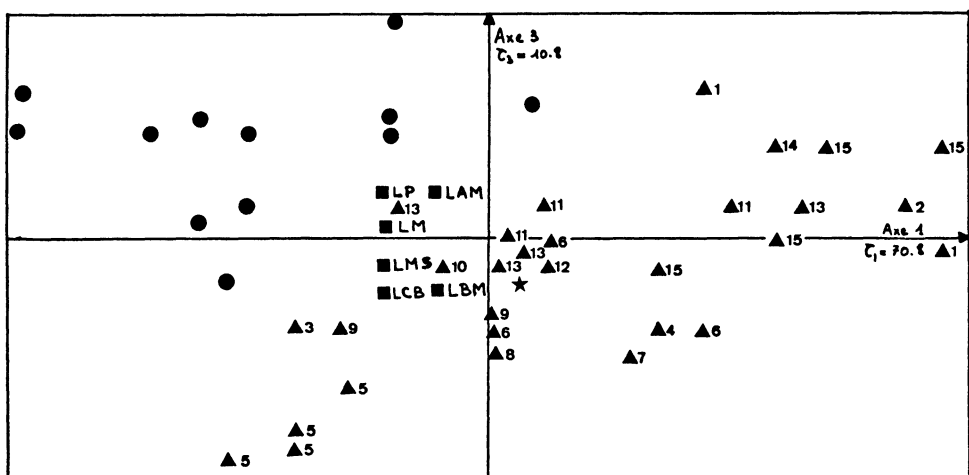


Figure 5 – Représentation dans le système formé par le premier et le troisième axe factoriel de l'ensemble I des crânes et de l'ensemble J des caractéristiques {●} = {crânes de loups} ; {▲} = {crânes de chiens} les numéros indiquent les races de chiens, * = crâne du canidé de Jussac {■} = {caractéristiques}

- Les trois premiers facteurs résumant 95 % de la variance totale du nuage.

Le premier facteur, facteur principal, sépare bien, malgré un recouvrement partiel les deux populations de référence, c'est-à-dire les chiens domestiques et les loups. Les variables choisies, à part la LBM, sont fortement corrélées avec le facteur qui n'exprime que la variation de la *taille des crânes* donc des animaux.

Le deuxième facteur, "fait apparaître une opposition entre la variable LBM (largeur bi-maxillaire) et d'autre part les variables LCB (longueur condylobasale) et LMS (longueur de la mâchoire supérieure). Cet axe traduit une différence dans les proportions du museau et oppose les formes longirhynques aux races brachyrhynques". (In Mammalia, t 38, n° 4, 1974, pp. 717-728 — L. de BONIS). Ce deuxième facteur, sur le plan des animaux sépare les bull-dogs, boxers, dogues allemands, saint-bernard des setters irlandais, levriers, bergers allemands. Sur ce deuxième axe les loups se projettent plutôt dans la dernière population citée.

Le troisième facteur est caractérisé par les variables concernant la denture des animaux. Cet axe sépare les animaux à forte dentition caractérisée par les variables LP, LM, LAM (les loups, les bergers allemands, les dobermans, les levriers, les colleys), des autres races (les saint-bernard, les bull-mastifs, les dogues allemands, les setters).

- Position et caractérisation du crâne du canidé de Jussac

En projetant ce canidé sur les trois premiers facteurs, on peut avancer l'hypothèse que ce crâne est issu d'un chien domestique (1er facteur) de museau de forme longirhynque (2ème facteur) à denture plutôt moyenne (3ème facteur).

A la suite de cette première analyse, nous avons utilisé une méthode de classification hiérarchique à partir de laquelle nous entreprendrons de vérifier les hypothèses avancées dans cette première interprétation.

V. — LA CLASSIFICATION HIERARCHIQUE (Cf. [5])

V.1. — Rappel des notations et résultats principaux

a) Description générale

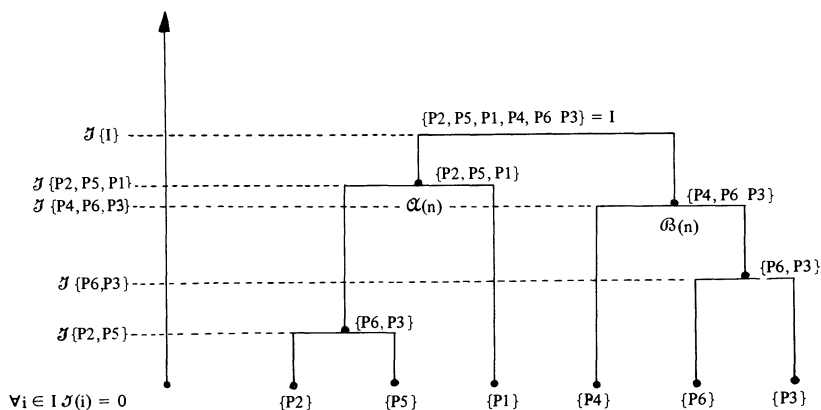


Figure 6. — Représentation d'une hiérarchie de partie, totale indicée A(I) sur I.

Soit I fini, $A \subset \mathcal{P}(I) - \emptyset$; A ordonné par la relation $\subset$ on note :

Som (A) l'ensemble des éléments maximaux de A
 Ter (A) l'ensemble des minimaux de A
 Nod (A) l'ensemble des éléments non minimaux de A
 Pred (a, A) l'ensemble des prédécesseurs de l'élément a dans A
 Suc (a, A) l'ensemble des successeurs de l'élément a dans A
 Suci (a, A) l'ensemble des successeurs immédiats de a dans A

$\mathcal{J}(a)$ est l'indice de diamètre (ou d'agrégation, ou de stratification) de l'élément a de A .

$$\mathcal{J}(i) = 0 \quad \forall i \in I$$

b) Algorithme de classification hiérarchique

On considère comme au § III, le nuage $N_J(I) \subset R_J$ à partir duquel on calcule les distances "usuelles" entre observations (ici les 43 crânes de chiens et de loups).

$$d^2(i, i') = \|i - i'\|^2 = \sum_{j \in J} (X_{ij} - X_{i'j})^2 = \sum_{j \in J} (x_{ij} - x_{i'j})^2 / \sigma_j^2$$

Le principe général de la classifications ascendante hiérarchique est de construire une suite finie de partitions emboîtées à partir de la plus fine $\mathcal{P}_0 = \{\{i\}, i \in I\}$ jusqu'à la plus grossière $\mathcal{P}_{\text{Card}I - 1} = \{I\}$.

On se place dans un espace euclidien (ici R_J). Dans cet espace on considère les distances $\|i - i'\|^2$ et les poids affectés à chaque observation i ; soit m_i ce poids.

A l'étape de rang 0, on considère la partition $H_0 = \{\{i\}, i \in I\}$.

On va chercher à construire une partition $\text{Som}(H_1)$, déduite de $\text{Som}(H_0) = H_0$ de la façon suivante :

$$H_1 = H_0 \cup \{\{k, 1\}\}$$

$$\text{Som}(H_1) = \text{Som}H_0 \cup \{\{k, 1\}\} - \{\{1\}\} - \{\{1\}\}$$

Si $\{k\}$ et $\{1\}$ sont les deux classes de H_0 telle soit minimum la distance entre parties d'ensembles $\partial(\{k\}, \{1\})$.

Passage de l'étape de rang $n - 1$ à l'étape de rang n : Supposons l'étape de rang $(n - 1)$ réalisée. On a alors :

H_{n-1} , hiérarchie de parties de I créée par agrégations successives jusqu'à cette étape

$\text{Som}(H_{n-1})$, les éléments maximaux de cette hiérarchie qui forment une partition de I .

Comme pour l'étape de rang 0, on va construire une hiérarchie H_n , de sommet $\text{Som} H_n$, déduite de $\text{Som}(H_{n-1})$ de la façon suivante.

On calcule sur $\text{Som}(H_{n-1})$ les "distances" (*) $\{\partial(a, b), a, b \in \text{Som}(H_{n-1})\}$; soit $\{s, t\}$ le couple de $\text{Som}(H_{n-1})$ qui réalise le minimum de ∂ . On aura alors :

$$H_n = H_{n-1} \cup \{s \cup t\} - \{t\} \quad \text{avec} \quad s \cap t = \emptyset$$

On calcule alors ∂ sur $\text{Som}(H_n)$ ainsi constituée pour continuer les agrégations.

Dernière étape — Il ne reste que deux parties de I à agréger pour faire $\{I\}$ lui-même. On a donc : $\text{Som}(H_{\text{Card}I-1}) = \{I\}$.

Remarque : L'indice de la hiérarchie, c'est-à-dire le niveau auquel on situe les classes constituées par agrégation est défini ainsi :

Les classes sont placées au niveau qui indique le minimum de ∂ sur la partition qui sert de base à la définition de l'agrégation.

Il reste à définir la fonction ∂ pour le cas qui nous intéresse dans cette note.

Définition du critère d'agrégation et de la hiérarchie

Soit Q_1 une partition de I en n éléments

$$Q_1 = \{a_k, a_k \subset I, k = 1, 2, \dots, n\}$$

On se propose de réunir deux parties de I , a_s , et a_t de I qui maximise le moment centré d'ordre 2 de la partition Q_2 de I définie comme suit :

$$Q_2 = \{a_k \mid a_k \subset I; k = 1, \dots, n\} \cup \{a_s \cup a_t\} - \{a_s\} - \{a_t\}$$

$$Q_2 = Q_1 \cup \{a_s \cup a_t\} - \{a_s\} - \{a_t\}$$

Or d'après le théorème de Huyghens sur la décomposition de la variance d'une partition on a :

$$M^2(N_J(I)) = M^2(N_J(Q_1)) + \sum_{a_k \in Q_1} M^2(N_J(a_k))$$

$$M^2(N_J(I)) = M^2(N_J(Q_2)) + \sum_{a_k \in Q_2} M^2(N_J(a_k))$$

D'où l'on tire — avec la définition de Q_2

$$M^2(N_J(Q_2)) = M^2(N_J(Q_1)) + M^2(N_J(a_s)) + M^2(N_J(a_t)) - M^2(N_J(a_s \cup a_t))$$

$M^2(N_J(Q_1))$ a une valeur fixée — le critère est de maximiser

$M^2(N_J(Q_2))$ c'est-à-dire qu'on va rendre la quantité

$[-M^2(N_J(a_s)) - M^2(N_J(a_t)) + M^2(N_J(a_s \cup a_t))]$ minimum — On choisit cette quantité pour $\partial(a_s, a_t)$.

La distance ∂ entre parties d'ensembles de I est désormais définie.

(*) ∂ est naturellement construit différemment de la distance initiale définie dans R_J sur les observations de $N_J(I)$.

On a alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n) &= \mathcal{J}(a_s \cup a_t) = M^2(N_J\{a_s, a_t\}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ne pas confondre avec} \\ M^2(N_J(a_s \cup a_t)) \end{array} \right) \\ \text{avec} \quad a_s \cap a_t &= \emptyset \\ &= \frac{\text{Card}(a_s) \cdot \text{Card}(a_t)}{\text{Card}(n)} \left\| g(N_J(a_s)) - g(N_J(a_t)) \right\|^2 \end{aligned}$$

$g(a)$ désigne le centre d'inertie de la classe a dans R_J

Taux d'inertie afférant aux noeuds notés n de la hiérarchie $A(I)$

$$\begin{aligned} M^2(N_J(I)) &= \sum_{n \in \text{Nod}(A(I))} \mathcal{J}(n) \quad (\text{car } M^2(N_J(Q_{\text{Card}I-1} = I)) = 0) \\ \tau(n) &= \frac{\mathcal{J}(n)}{M^2(N_J(I))} ; \quad \sum_{n \in \text{Nod}(A(I))} \tau(n) = 0 \\ T(Q_n) &= \frac{M^2(N_J(Q_n))}{M^2(N_J(I))} ; \end{aligned}$$

τ est croissant sur $\text{Nod}(A(I))$; T est décroissant sur $\text{Nod}(A(I))$

Conclusion : La classification hiérarchique est généralement définie par trois paramètres :

- la distance initiale entre observations
- les masses affectées à chaque observation
- le critère d'agrégation

$$\mathcal{CH} = (d, m, \partial)$$

Dans le cas présent, après avoir défini, d et ∂ , il reste à choisir les masses affectées à chaque observation. Pour effectuer les comparaisons avec l'analyse en composantes principales normée, les masses affectées sont les masses unité.

V.2. – Etude de l'exemple – Taxinomie des chiens et des loups

V.2.1. – Description de la hiérarchie

Inertie totale du Nuage $N_J(I)$: 258

- La colonne 1, notée N , désigne les numéros des noeuds édifés par classification hiérarchique - les noeuds sont numérotés de $\text{CARDI} + 1$ à $2 * \text{CARDI} - 1$, si CARDI est le nombre d'éléments de l'ensemble I .

- La colonne 2, notée $\mathcal{J}(N)$, consigne pour chaque noeud N , les valeurs de l'indice de diamètre des noeuds $\mathcal{J}(N)$ (Cf. § V.1.b).

- La colonne 3, notée $\tau(N)$, consigne les taux d'inertie afférant au noeud N .

- La colonne 4, notée $T(Q_N)$, consigne les taux d'inertie afférant à la participation Q_N , définie en coupant l'arbre au niveau du noeud N .

N	$\mathcal{J}(N)$	$\tau(N)$	$T(Q_N)$	A(N)	B(N)	P(N)
1	2	3	4	5	6	7
44	0.07	0	100	12	9	2
45	0.07	0	100	16	7	2
46	0.12			40	31	2
47	0.13			20	15	2
48	0.15			36	41	2
49	0.18			26	22	2
50	0.19			21	43	2
51	0.22			18	44	3
52	0.22			19	4	2
53	0.25			33	32	2
54	0.25			30	28	2
55	0.27		100	8	6	2
56	0.31		99	47	14	3
57	0.35		99	51	45	5
58	0.38		99	24	54	3
59	0.48		98	39	34	2
60	0.44		98	56	13	4
61	0.56		98	48	42	3
62	0.59		98	25	29	2
63	0.74		98	27	11	2
64	0.77		98	46	37	3
65	0.78		97	50	60	6
66	0.88		97	63	55	4
67	0.98		97	17	53	3
68	1.05		96	61	35	4
69	1.25		96	23	3	2
70	1.37		96	62	58	5
71	1.49		95	10	57	6
72	1.57	0	94	64	38	4
73	1.70	1	93	66	5	5
74	2.04	1	92	49	52	4
75	2.26	1	92	71	65	12
76	2.66	1	90	69	2	3
77	3.01	1	89	68	67	7
78	4.82	2	87	76	1	4
79	8.75	3	84	74	75	16
80	10.70	4	80	72	77	11
81	14.49	5	74	80	70	16
82	16.09	6	68	73	78	9
83	18.53	7	60	81	59	18
84	42.10	16	45	82	79	25
85	114.60	44	0	84	83	43

Figure 7 – Paramètres principaux de la classification automatique

- La colonne 6, notée B(N), consigne le benjamin du noeud N, (l'autre successeur immédiat du noeud N).
- La colonne 7, notée P(N), consigne les nombres d'éléments du noeud N.

V.2.2. – *Interprétation succincte de la classification hiérarchique*

La classification hiérarchique sépare assez bien les deux populations de référence de chiens et de loups. On remarquera cependant l'inclusion d'un groupe de chiens, noté 70 dans la classification, composé de quatre dogues allemands.

Pour caractériser les différenciations à d'autres niveaux de l'arbre, nous utiliserons les contributions.

Position et caractérisation du canidé de Jussac – Dans cette classification le crâne du canidé de Jussac est affecté à la classe des chiens domestiques.

VI. – CARACTERISATION DES CLASSIFICATIONS A L'AIDE DES CONTRIBUTIONS

On propose ici, d'étendre certains calculs proposés par ailleurs (Cf. [1]) pour l'interprétation des classifications ascendantes hiérarchiques fondées sur l'application d'un critère du χ^2 ; en liminaire on rappelle quelques formules qui servent également en analyse en composantes principales pour le calcul des contributions.

VI.1. – Contributions en analyse factorielle en composantes principales

Distance d'une observation $i \in N_J(I)$, au centre de gravité du nuage (ici o_J).

$$\rho^2(i) = ||i - g(I)||^2 = \sum_{j \in J} (X_{ij})^2$$

On a :

$$M^2(N_J(I)) = \sum_{i \in I} \rho^2(i) = \sum_{a \in A} \lambda_a = \sum_{i \in I, j \in J} (X_{ij})^2$$

$$\rho^2(i) = \sum_{a \in A} F_a^2(i)$$

$\rho^2(i)$ = Contribution du point i à $M^2(N_J(I))$ ou variance de i

$F_a^2(i)$ = Contribution absolue du point i au moment d'inertie λ_a

$F_a^2(i)/\lambda_a$ = Contribution relative du point i au moment d'inertie λ_a

$F_a^2(i)/\rho^2(i)$ = Contribution du point i à cause de la distance entre le point i et le centre de gravité du Nuage $N_J(I) = \cos^2 \theta$

On peut noter $X_{ij} = \{X_{ij}, j \in J\}$ ensemble des coordonnées du point i dans $N_J(I)$

$$O_J = O_{GJ} = \{0, j \in J\}$$

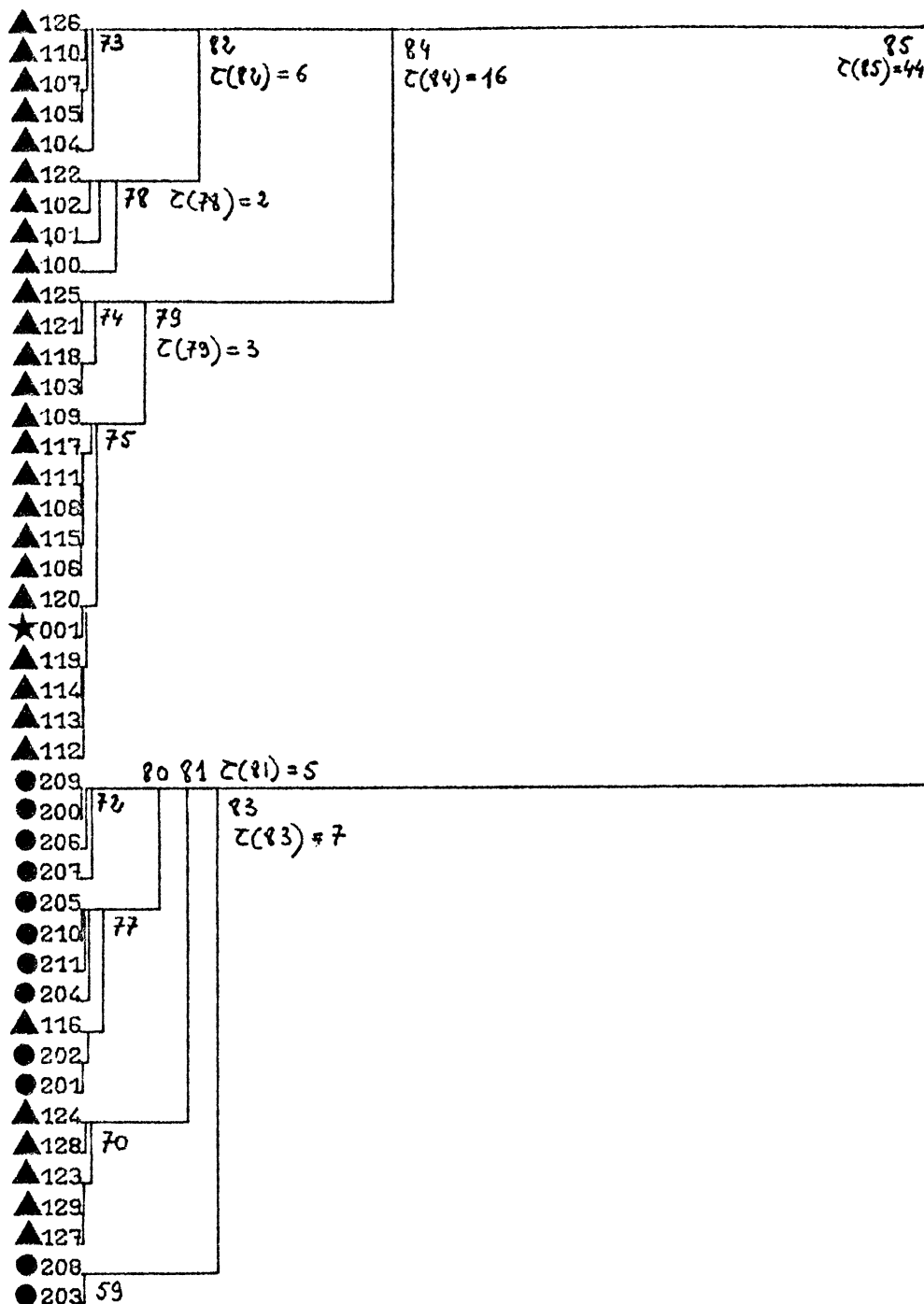
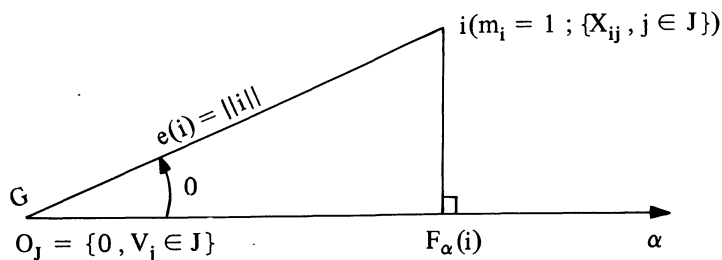


Figure 8 – Taxinomie des crânes de chiens et de loups ; {▲} = {crânes de chiens} ; {●} = {crânes de loups} ; ★ = crâne inconnu.



VI.2. – Mise en éléments supplémentaires des classes de la hiérarchie sur le diagramme de l'Analyse factorielle

Soit une classe q d'individus i de I – les coordonnées d'une classe q sont les suivantes :

$$X_{qJ} = \{X_{qj}, j \in J\} \quad \text{avec} \quad X_{qj} = \frac{\sum \{X_{ij}, i \in q\}}{\text{Card } q} \quad (m_i = 1 \quad \forall i \in I)$$

$$F_\alpha(q) = \sum_{i \in q} \{F_\alpha(i) / \text{Card } q\} \quad \text{avec Card } q = \text{nombre d'éléments } i \text{ de } q$$

Applications à la hiérarchie indicée : Toute classe non terminale est de deux successeurs immédiats ; soit q une classe $a(q)$ et $b(q)$ ses successeurs immédiats – q est centre de gravité de $q(q)$ et $b(q)$.

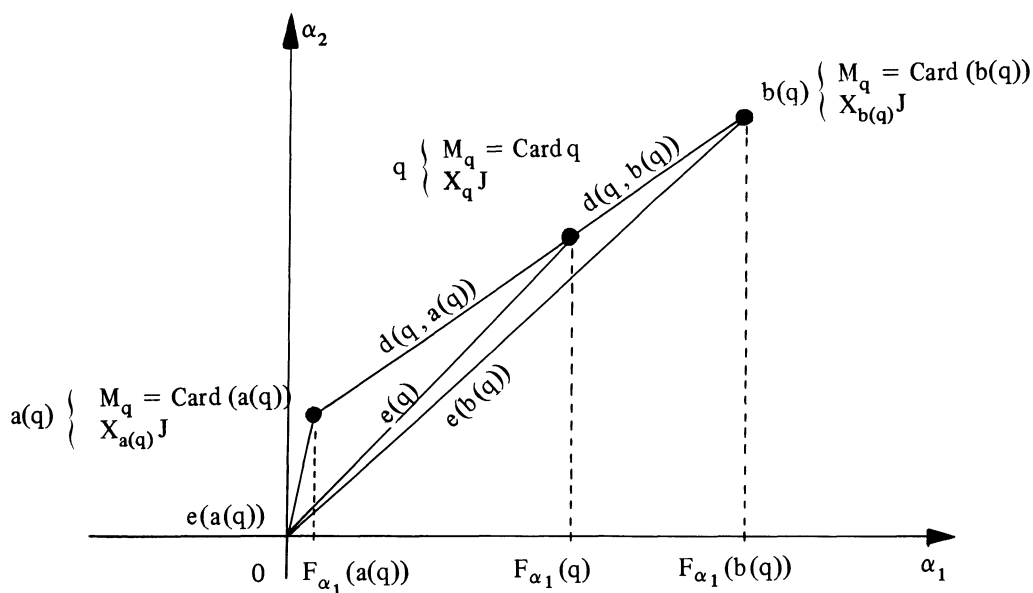


Figure 9 – Représentation des nœuds dans l'espace factoriel

$$d^2(q, a(q)) = \|q - a(q)\|^2 = \rho_q^2(q) = \sum_{\alpha \in A} |F_\alpha(q) - F_\alpha(a(q))|^2$$

On veut calculer le rapport $\|q - a(q)\|^2 / \|q - b(q)\|^2$

On a
$$F_\alpha(q) = \frac{\text{Card}(b(q)) F_\alpha(a(q)) + \text{Card}(a(q)) F_\alpha(b(q))}{\text{Card}(a(q)) + \text{Card}(b(q))}$$

Avec
$$q = a(q) \cup b(q)$$

et
$$a(q) \cap b(q) = \emptyset$$

On pose
$$n_q = \text{Card} q \quad ; \quad n_a = \text{Card}(a(q)) ; n_b = \text{Card}(b(q))$$

$$F_\alpha(a) \text{ pour } F_\alpha(a(q)) \quad ; \quad F_\alpha(b) \text{ pour } F_\alpha(b(q))$$

$$\begin{aligned} \|q - a(q)\|^2 &= \sum_{\alpha \in A} \left| \frac{n_b \cdot F_\alpha(a) + n_a F_\alpha(b)}{n_b + n_a} - F_\alpha(a) \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in A} \left| \frac{n_b \cdot F_\alpha(a) + n_a F_\alpha(b) - (n_b + n_a) F_\alpha(a)}{n_q} \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in A} \left| \frac{n_a F_\alpha(b) - n_a F_\alpha(a)}{n_q} \right|^2 \\ &= \left(\frac{n_a}{n_q} \right)^2 \sum_{\alpha \in A} |F_\alpha(b) - F_\alpha(a)|^2 \end{aligned}$$

$$\|q - b(q)\|^2 = \left(\frac{n_b}{n_q} \right)^2 \sum_{\alpha \in A} |F_\alpha(b) - F_\alpha(a)|^2$$

Donc
$$\frac{\|q - b(q)\|}{\|q - a(q)\|} = \frac{n_a}{n_b}$$

ou
$$n_{a(q)} \cdot \|q - b(q)\| - n_{b(q)} \cdot \|q - a(q)\| = 0$$

Remarque : Ceci s'étend à l'Analyse des correspondances selon une formulation analogue en considérant les expressions.

$$d^2(q, a(q)) = \|f_J^{a(q)} - f^q\|_{f_J}^2 = \sum_{\alpha \in A} |F_\alpha(q) - F_\alpha(a(q))|^2$$

On aura alors

$$f_{a(q)} \cdot \rho_q(b(q)) - f_{b(q)} \cdot \rho_q(a(q)) = 0$$

 où
$$\rho_q(s) = \|f_J^s - f_J^q\|_{f_J}$$

VI.2. — Contributions des éléments de J (ensemble des caractéristiques) aux éléments de I (ensemble des crânes de chiens et de loups)

Ces calculs proviennent de la décomposition de l'inertie du nuage $N_J(I)$ sur l'ensemble $I \times J$. D'après les formules précédentes, on aura :

$$M^2(N_J(I)) = \sum_{i \in I, j \in J} (X_{ij})^2 ; \rho^2(i) = \sum_{j \in J} (X_{ij})^2$$

On étudiera donc le tableau des contributions des paires $(i, j) \in I \times J$ à l'inertie du Nuage, et le tableau des contributions relatives à $\rho^2(i)$ des éléments de J (figures 10 et 11).

Ces tableaux permettent, *avant* d'effectuer une analyse (soit une analyse factorielle, soit une classification) de donner une première description du tableau des données en répondant sommairement aux préoccupations suivantes :

- Détermination des observations excentriques (a contrario, des éléments centraux du nuage).
- Détermination des couples (i, j) les plus significatifs du nuage.
- Détermination des caractéristiques influentes sur la distance du point observation au centre du nuage.

VI.3. — Contributions des éléments de J (ensemble des caractéristiques) à la distance d'une classe q de I (ensemble des crânes) au centre du nuage $N_J(I)$

Soit Q une partition de l'ensemble I.

On considère le nuage $N_J(Q) = \{q \in Q ; m_q = \text{Card } q = n_q ; X_{qJ}\} \subset R_J$

Avec $X_{qJ} = \{X_{q1}, \dots, X_{qj}, \dots, X_{q\text{Card } J}\}$

$$X_{qj} = \sum_{i \in q} \{X_{ij}/\text{Card } q\} \text{ avec } X_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}$$

$$\begin{aligned} \text{Préliminaires : } X_{qj} &= \sum_{i \in q} \{X_{ij}/\text{Card } q\} = \sum_{i \in q} \left\{ \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j} \cdot \frac{1}{\text{Card } q} \right\} \\ &= \frac{1}{\text{Card } q} \sum_{i \in q} \frac{x_{ij}}{\sigma_j} - \frac{1}{\text{Card } q} \sum_{i \in q} \frac{\bar{x}_j}{\sigma_j} \\ &= \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i \in q} \{x_{ij}/\text{Card } q\} - \frac{\bar{x}_j}{\sigma_j} \\ &= \frac{x_{qj} - \bar{x}_j}{\sigma_j} \end{aligned}$$

$$g(N_J(Q)) = O_J = g(N_J(I))$$

	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
LCB	-30.6	-13.8	-6.4	-1.5	-10.3	-8.9	-0.0	-3.9	0.3	1.3
LMS	-31.9	-18.6	-6.7	-2.7	-11.5	-4.8	0.1	-1.6	1.0	4.8
LBN	8.6	0.7	-0.1	0.0	-15.8	-10.8	-2.8	-12.4	-2.8	-5.7
LP	-7.5	-0.7	-5.9	-1.4	-8.2	-7.5	-0.1	-8.3	-0.2	0.0
LM	-20.8	-0.0	-8.7	-2.2	-10.5	-5.8	-0.2	-4.9	0.0	1.8
LAM	-5.4	-0.2	-0.7	-2.5	-8.4	-2.8	-0.0	-3.9	-1.2	-0.0
RHO(J)	27.1	8.8	7.4	2.7	17.0	10.4	0.8	9.0	1.4	3.5

	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
LCB	-2.5	0.3	1.2	0.7	0.7	0.0	2.8	0.9	-1.2	0.3
LMS	-1.8	0.5	2.0	0.7	0.5	0.2	4.2	0.5	-3.2	0.3
LBN	-21.8	-2.8	-0.3	-0.0	0.4	-1.0	1.7	-2.8	1.7	0.0
LP	-1.8	-1.1	-0.9	-0.2	-1.3	-0.0	1.2	-0.3	-1.1	-0.2
LM	-4.3	-0.0	0.0	0.0	-0.2	-0.1	-0.0	-0.3	-2.6	-0.8
LAM	-6.4	-0.6	-1.0	0.2	-0.2	-0.2	0.3	-0.0	-4.7	-0.1
RHO(J)	9.9	1.4	1.4	0.5	0.8	0.4	2.6	1.3	3.7	0.4

	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
LCB	-0.1	-0.4	-11.7	13.3	4.5	0.0	-1.9	6.9	1.2	7.3
LMS	-0.0	-0.0	-22.3	6.6	0.7	0.0	-1.6	2.7	0.3	3.2
LBN	-0.3	-1.5	-0.1	9.9	6.1	-0.3	-5.7	11.5	13.1	3.6
LP	-0.9	-3.9	-11.2	0.1	0.0	-2.5	-2.5	-0.0	1.2	-0.8
LM	0.0	-6.2	-7.1	1.1	0.6	-7.8	-2.6	0.3	2.7	2.2
LAM	-0.7	-4.1	-7.2	0.5	-0.0	-2.4	-4.1	0.8	0.5	0.2
RHO(J)	0.5	4.2	15.4	8.1	3.1	3.3	4.7	5.7	4.9	5.7

	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
LCB	-0.2	2.6	2.8	3.9	3.6	0.5	-2.4	-4.8	6.1	-0.0
LMS	-0.0	2.0	4.2	4.8	3.7	2.4	-0.7	-2.7	5.4	0.1
LBN	0.0	1.2	4.9	6.1	1.7	0.2	-0.6	0.0	1.2	-0.3
LP	3.2	9.2	7.8	10.5	3.5	12.7	2.9	0.8	9.2	2.9
LM	1.1	2.2	1.1	13.7	10.5	4.3	4.9	0.6	13.7	1.1
LAM	2.2	1.3	1.1	36.5	3.4	2.0	3.6	-0.0	50.8	1.4
RHO(J)	1.7	4.7	5.7	19.5	6.8	5.7	3.9	2.3	22.3	1.5

	210	211	001
LCB	2.4	2.4	0.1
LMS	2.4	2.7	-0.2
LBN	-0.0	1.2	-0.0
LP	14.4	17.4	-0.2
LM	6.3	13.7	-0.2
LAM	2.9	2.6	-0.1
RHO(J)	7.3	10.3	0.2

INERTIE TOTALE DU NUAGE 258

Figure 10 – Tableau des contributions relatives des paires (i, j) de I × J à l'inertie totale du nuage N_J(I) (× 1000)
Tableau des $\rho^2(j)$ pour j ∈ J (× 10)

	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
LCB	-23.2	-40.7	-22.0	-14.7	-15.7	-22.2	-0.6	-11.1	4.8	9.9
LMS	-30.4	-54.7	-23.7	-26.1	-17.5	-11.0	3.5	-4.6	18.4	35.1
LBM	8.2	2.1	-0.3	0.2	-24.1	-26.7	-86.8	-35.6	-51.2	-41.7
LP	-7.1	-1.9	-20.6	-13.3	-14.0	-18.5	-2.4	-23.7	-3.4	0.1
LN	-19.9	-0.1	-30.6	-20.8	-15.1	-13.8	-5.9	-13.9	0.0	13.2
LAM	-5.1	-0.5	-2.3	-24.3	-12.7	-6.9	-1.0	-11.1	-22.2	-0.0
RHO(J)	27.1	8.8	7.4	2.7	17.0	10.4	0.8	9.0	1.4	3.5

	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
LCB	-6.6	5.0	22.4	35.3	20.2	0.0	27.3	18.2	-8.1	15.3
LMS	-4.1	10.1	36.0	40.7	16.4	14.7	40.8	10.8	-22.1	20.4
LBM	-56.7	-53.2	-5.2	-0.3	12.3	-63.6	19.9	-57.1	12.0	1.5
LP	-4.7	-20.7	-17.1	-10.2	-39.0	-2.5	11.8	-6.7	-7.5	-11.0
LN	-11.1	-0.4	0.0	1.3	-5.8	-5.7	-0.2	-7.1	-18.0	-46.0
LAM	-16.8	-10.6	-19.3	12.1	-6.3	-13.5	3.0	-0.0	-32.3	-5.8
RHO(J)	9.9	1.4	1.4	0.5	0.8	0.4	2.6	1.3	3.7	0.4

	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
LCB	-7.4	-2.6	-19.7	42.2	37.9	0.0	-10.3	30.8	6.4	32.8
LMS	-1.9	-0.0	-37.5	21.1	6.3	0.0	-8.0	12.3	1.6	14.5
LBM	-14.2	-9.2	-0.1	31.5	50.8	-2.2	-30.9	51.6	68.9	38.7
LP	-46.7	-24.0	-18.8	0.2	0.3	-19.2	-13.5	-0.0	6.4	-3.5
LN	0.0	-38.7	-11.9	3.5	4.7	-60.4	-14.2	1.6	14.0	9.8
LAM	-32.7	-25.5	-12.0	1.5	-0.0	-16.2	-22.4	3.7	2.5	0.7
RHO(J)	0.5	4.2	15.4	8.1	3.1	3.3	4.7	5.7	4.9	5.7

	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
LCB	-2.8	14.2	12.8	5.1	13.5	2.4	-15.5	-53.8	7.1	-0.3
LMS	-0.6	10.6	19.1	6.3	14.1	10.7	-4.9	-30.8	6.2	1.9
LBM	0.4	6.4	22.6	0.0	6.6	0.7	-3.9	0.3	1.4	-4.8
LP	47.7	50.1	35.6	14.0	13.2	57.8	19.3	8.8	10.6	50.3
LN	16.2	11.9	5.0	18.1	39.9	19.5	32.5	6.3	15.9	19.7
LAM	32.4	6.9	5.0	48.7	12.7	8.9	23.9	-0.0	58.8	23.9
RHO(J)	1.7	4.7	5.7	18.5	6.8	5.7	3.8	2.3	22.3	1.5

	210	211	001
LCB	8.3	5.9	17.5
LMS	8.3	6.8	-27.9
LBM	-0.0	2.9	-0.8
LP	50.9	43.6	-23.4
LN	22.4	34.3	-23.4
LAM	10.1	6.5	-7.0
RHO(J)	7.3	10.3	0.2

Figure 11 – Tableau des contributions relatives au $\rho^2(j)$ ($\times 100$)
Tableau des $\rho^2(j)$ pour $j \in J$ ($\times 10$)

$$\rho^2(q) = \|q - g(I)\|^2 = \sum_{j \in J} (X_{qj})^2$$

$$\begin{aligned} M^2(N_J(Q)) &= \sum_{q \in Q} m_q \|q - g(I)\|^2 \\ &= \sum_{q \in Q} \text{Card} q \sum_{j \in J} (X_{qj})^2 \end{aligned}$$

Formulation du calcul des contributions

On s'intéresse aux quantités $\rho^2(q)$ et $\{(X_{qj})^2, \text{Signe}(X_{qj}) : j \in J\}$ l'examen des quantités $\{\rho^2(q) ; q \in A(I)\}$ permet d'apprécier si la classe q ainsi constituée est une classe centrale ou excentrique.

Le signe de (X_{qj}) (ou plutôt le signe de $(x_{qj} - \bar{x}_j)$) permet d'apprécier si la caractéristique j contribue faiblement ou fortement à la distance de la classe q au centre de gravité du Nuage.

Si $(X_{qj})^2 \cdot \text{Card} q$ est élevé et que $(x_{qj} - \bar{x}_j)$ est positif (respectivement négatif) la classe q intervient dans $M^2(N_J(Q))$ à cause d'un taux x_{ij} anormalement élevé (respectivement bas).

Dans la pratique, on étudie deux tableaux (Cf. figures 12, 13) ; le premier tableau consigne pour chaque nœud q et chaque caractéristique j de J les valeurs $\{\text{Signe}(x_{qj} - \bar{x}_j) \cdot (X_{qj})^2\}$ le second tableau consigne pour chaque nœud q et chaque caractéristique j de J les valeurs relatives au $\rho^2(q)$

$$\{\text{Signe}(x_{qj} - \bar{x}_j) \cdot (X_{qj})^2 / \rho^2(q)\}$$

La consultation des deux tableaux précédents et de la représentation arborescente indique quelques directions.

Elle confirme que la discrimination entre chiens et loups est le fait principalement de trois caractéristiques $\{LP, LM, LAM\}$ de la denture des animaux (contributions élevées pour les loups, moins élevées pour les chiens) et a un degré moindre les variables caractérisant la forme des crânes. Pour les autres classes on remarquera les classes suivantes, la classe 70 {quatre dogues allemands, un saint-bernard} caractérisée par la contribution élevée de la largeur bi-maxillaire $\{LMB+\}$ — les autres classes de loups caractérisées par la longueur de la carnassière supérieure $\{LP+\}$. La classe 82 caractérisée par une contribution faible de la longueur de la mâchoire supérieure $\{LMS-\}$. Les classes de chiens sont naturellement caractérisées par des contributions faibles des variables de dentures $\{LP- ; LM- ; LAM-\}$.

VI.4. — Contributions des éléments de J (ensemble des caractéristiques) à la distance entre successeurs immédiats d'une classe q de $A(I)$ (ensemble des classes de crânes)

Dans ce type de classification hiérarchique, il peut être utile de décomposer la distance entre l'aîné ($a(q) = a$) et le benjamin ($b(q) = b$) du nœud q , suivant les axes de R_J .

N	RHO=2	LCB	LMS	LBN	LP	LN	LAM
44	1.3	5.0	14.0	-53.7	-10.4	-0.1	-16.4
45	0.6	-0.2	7.3	-73.5	-2.5	18.0	-4.5
46	1.6	-1.3	0.1	-0.6	53.8	18.0	29.2
47	0.6	13.7	13.7	7.0	-27.3	-13.7	-6.7
48	6.4	5.2	9.5	0.1	54.5	21.2	9.6
49	3.7	-0.7	0.0	-5.4	-22.1	-43.4	-22.4
50	0.3	0.2	-11.0	-8.2	-46.2	-4.6	-26.6
51	1.2	8.3	13.9	-38.0	-9.7	-1.2	-8.2
52	3.1	-11.2	-24.6	4.5	-10.5	-19.3	-23.3
53	5.1	12.7	15.1	12.9	43.2	8.1	6.0
54	5.6	32.5	13.7	46.0	-1.0	4.9	1.9
55	9.6	-16.6	-8.0	-31.2	-21.2	-14.0	-8.9
56	0.4	29.8	31.4	3.3	-25.0	-8.9	-0.6
57	0.9	3.8	12.3	-67.1	-7.2	-2.4	-7.2
58	6.3	36.4	16.5	40.7	-0.2	4.4	1.3
59	20.7	6.2	6.3	3.9	12.3	13.1	54.1
60	0.6	23.7	36.6	0.1	-24.8	-3.6	-5.0
61	7.5	5.5	8.5	0.7	50.7	28.2	8.4
62	3.7	16.2	3.7	64.5	2.9	9.9	0.7
63	7.0	-8.2	-5.9	-6.1	-7.9	-12.6	-19.4
64	2.1	-6.1	-0.7	-1.8	34.3	23.5	28.6
65	0.3	23.4	18.2	-0.4	-40.6	-5.4	-12.0
66	8.0	-12.6	-7.1	-38.5	-14.6	-13.6	-13.5
67	3.9	13.9	23.0	15.6	35.0	4.1	5.4
68	1.1	7.4	10.1	1.7	40.9	30.3	9.7
69	10.7	-21.4	-22.2	-0.2	-20.0	-18.9	-7.2
70	5.0	30.7	11.6	59.0	0.1	6.2	1.4
71	1.1	5.9	19.5	-65.5	-3.8	-0.0	-4.3
72	1.7	-17.0	-5.2	-0.8	24.4	23.6	19.9
73	0.5	-13.5	-9.5	-34.6	-14.5	-14.4	-13.4
74	2.9	-5.0	-6.7	-0.0	-13.8	-39.5	-30.1
75	0.5	13.6	23.9	-97.6	-15.6	-1.0	-8.3
76	9.2	-29.3	-42.2	0.0	-13.5	-10.3	-4.7
77	5.3	11.3	14.6	5.4	41.0	19.2	8.5
78	-12.5	-30.0	-38.4	1.3	-11.2	-13.8	-5.0
79	0.6	2.0	4.3	-20.7	-23.1	-18.2	-18.2
80	3.0	2.8	6.7	2.8	43.0	25.3	13.3
81	2.7	12.6	10.9	17.6	25.9	22.0	9.9
82	5.0	-24.6	-25.1	-7.6	-15.4	-16.8	-10.6
83	3.7	11.4	10.2	13.9	23.9	21.8	18.8
84	1.9	-11.4	-10.1	-13.9	-24.0	-21.9	-10.8

Figure 12 — Tableau des contributions au $\rho^2(N)$, relatives signées pour tout nœud N de la hiérarchie.

N	RHO=2	LCB	LMS	LBN	LP	LN	LAM
44	1.3	0.7	1.9	-7.2	-1.4	-0.0	-2.2
45	0.6	-0.2	0.0	-4.6	-0.1	-0.3	-0.3
46	1.6	-0.2	0.0	-0.1	7.9	2.8	4.6
47	0.6	1.1	1.1	0.4	-1.6	-1.1	-0.4
48	6.4	3.3	6.1	0.1	35.0	13.6	6.2
49	3.7	-0.3	0.0	-2.0	-8.1	-18.1	-8.2
50	0.3	0.0	-0.3	-0.2	-1.3	-0.1	-0.7
51	1.2	1.1	1.7	-7.2	-1.2	-0.2	-1.0
52	3.1	-3.5	-7.7	1.4	-3.2	-6.2	-9.1
53	5.1	7.0	7.7	7.1	21.9	4.1	3.0
54	5.6	18.2	7.7	25.8	-0.6	2.6	1.1
55	9.6	-15.9	-7.7	-23.9	-20.3	-13.5	-8.6
56	0.4	1.3	1.4	0.1	-1.1	-0.4	-0.0
57	0.9	0.3	1.1	-6.1	-0.7	-0.2	-0.7
58	20.7	12.8	13.1	8.1	25.4	35.3	111.9
59	0.6	1.7	2.1	0.0	-1.4	-0.2	-0.3
60	7.5	4.1	6.4	0.6	38.2	19.7	6.3
61	3.7	6.7	1.4	23.9	1.1	3.7	0.3
62	7.0	-5.7	-4.1	-32.0	-5.5	-8.7	-13.5
63	2.1	-1.3	-0.2	-0.4	-1.4	-0.2	-0.4
64	0.3	0.8	0.5	-0.0	7.8	5.3	6.0
65	8.0	-10.2	-5.7	-31.0	-11.7	-11.0	-10.9
66	3.9	7.1	8.6	6.1	13.8	1.6	2.1
67	10.7	-23.0	-34.6	-0.2	-21.5	-20.3	-7.8
68	5.0	15.3	5.8	25.0	0.0	3.1	0.7
69	1.1	0.6	2.1	-7.3	-0.4	-0.0	-0.5
70	1.7	-3.0	-0.9	-0.2	6.0	4.1	3.3
71	0.5	-1.9	-0.0	-5.4	-0.8	-0.1	-0.4
72	2.5	0.7	1.3	-2.0	-0.8	-0.1	-0.4
73	9.5	-12.6	-9.0	-22.8	-13.8	-13.6	-12.7
74	2.9	-5.4	-1.9	-0.0	-5.4	-11.3	-8.6
75	0.5	0.7	1.3	-2.0	-0.8	-0.1	-0.4
76	9.2	-26.8	-38.8	0.0	-12.4	-9.5	-4.3
77	5.3	6.0	7.6	2.8	21.8	10.2	4.5
78	-12.5	-37.3	-48.2	1.6	-14.0	-17.2	-6.2
79	0.6	0.1	0.2	-1.2	-1.6	-1.0	-1.5
80	3.0	0.9	2.0	0.9	14.9	7.7	4.0
81	2.7	3.5	3.0	4.8	7.4	6.0	2.7
82	5.0	-22.1	-22.6	-6.8	-13.9	-15.2	-9.5
83	3.7	4.2	3.6	5.2	6.8	8.1	7.0
84	1.9	-3.2	-1.9	-2.7	-4.6	-4.2	-3.6

Figure 13 — Tableau des contributions au $\rho^2(N)$, absolues signées pour tout nœud N de la hiérarchie

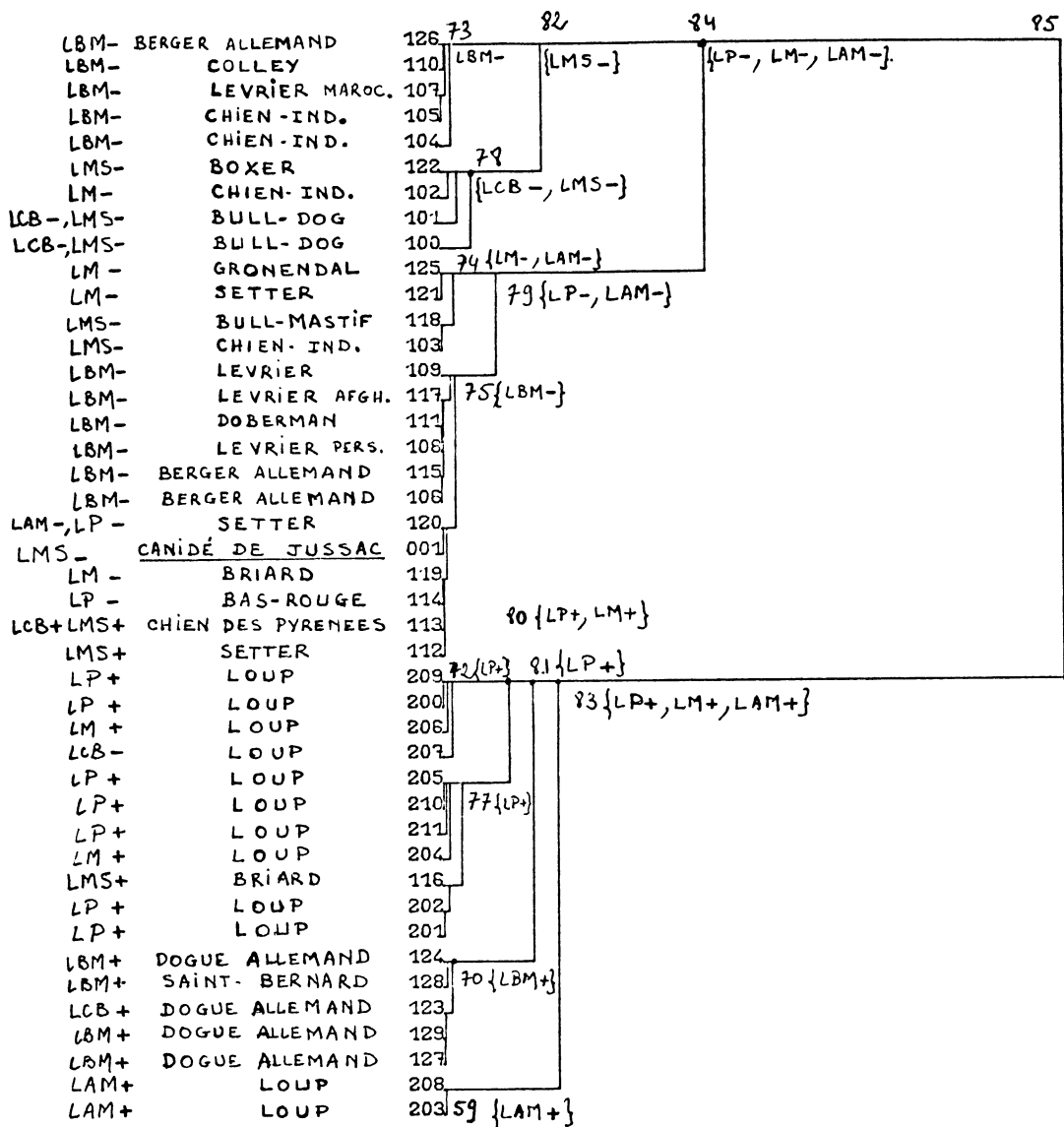


Figure 14 – Représentation des caractéristiques les plus discriminantes sur la classification hiérarchique (contributions aux ρ^2 élevées).

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \|X_{a(q)J} - X_{b(q)J}\|^2 &= \sum_{j \in J} (X_{aj} - X_{bj})^2 \\
 &= \sum_{j \in J} \frac{x_{aj} - x_{bj}}{\sigma_j}^2
 \end{aligned}$$

On appellera la quantité $(X_{aj} - X_{bj})^2 / \|X_{aJ} - X_{bJ}\|^2$ la contribution relative de l'élément j de J au noeud q (c'est-à-dire à l'écart entre ses successeurs immédiats).

Comme on a également :

$$\mathcal{J}(q) = \frac{n_a \cdot n_b}{n_q} \|X_{aJ} - X_{bJ}\|^2$$

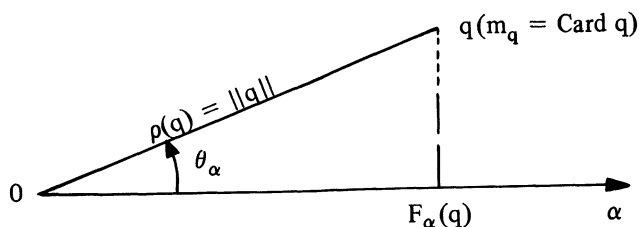
On pourra calculer la contribution absolue de l'élément j de J à l'indice de diamètre de la classe q.

N	RHO**2	LCB	LMS	LBM	LP	LM	LAM
44	0.2	0.0	12.8	0.0	62.8	3.2	21.2
45	0.2	3.1	3.1	77.3	1.0	3.1	12.4
46	0.2	9.3	30.1	50.6	0.7	0.0	9.3
47	0.3	8.5	1.8	21.7	46.2	19.8	1.8
48	0.3	53.3	0.0	18.3	4.6	16.8	7.1
49	0.4	30.3	1.0	34.0	11.1	8.2	17.4
50	0.4	29.4	5.0	13.4	18.5	12.3	21.4
51	0.3	14.5	1.5	0.0	2.2	21.1	60.8
52	0.5	1.4	1.1	76.5	1.4	1.1	18.5
53	0.5	0.2	21.3	65.9	2.8	9.5	0.3
54	0.5	0.3	1.0	10.3	35.9	39.4	13.1
55	0.5	50.1	40.9	2.7	0.9	1.2	4.2
56	0.5	1.2	2.4	12.4	6.6	36.9	40.6
57	0.3	46.5	15.3	10.5	17.6	1.3	8.8
58	0.6	43.6	33.0	0.0	23.3	0.0	0.1
59	0.9	7.7	0.6	55.9	1.4	0.0	34.5
60	0.6	6.8	19.6	25.7	4.0	6.5	37.4
61	0.8	5.0	0.4	26.3	7.4	60.8	0.1
62	1.2	22.7	1.6	29.3	17.8	17.0	11.5
63	1.5	0.8	0.0	30.2	1.0	3.5	4.5
64	1.2	34.7	19.4	7.5	0.0	30.9	7.5
65	0.6	26.0	66.7	5.4	0.1	0.2	1.6
66	0.9	28.7	6.2	0.4	52.8	5.7	6.2
67	1.5	0.0	1.8	2.0	57.2	34.1	4.9
68	1.4	7.1	2.3	13.4	71.6	4.3	1.3
69	2.5	8.1	46.4	0.0	8.8	0.9	35.9
70	1.1	42.4	37.0	0.3	17.2	0.5	2.6
71	1.8	9.1	33.7	10.3	5.8	38.2	3.1
72	2.1	27.1	24.5	3.6	9.0	5.8	30.0
73	2.1	18.1	43.4	3.2	9.8	17.0	8.8
74	2.0	8.8	37.5	32.9	5.3	15.3	0.1
75	0.8	0.1	6.1	88.1	3.6	2.1	0.0
76	4.0	3.5	2.7	8.4	27.8	45.9	11.7
77	1.8	0.8	0.4	10.9	15.9	64.1	7.8
78	6.4	21.3	12.6	32.5	1.2	28.2	4.3
79	2.9	14.2	21.5	5.7	6.9	33.8	17.8
80	4.2	41.3	33.3	10.3	11.7	3.2	0.2
81	4.2	21.1	2.3	39.2	31.7	2.4	3.2
82	7.2	8.8	21.4	67.8	0.0	0.3	1.6
83	10.4	2.8	3.4	0.4	5.2	11.7	76.5
84	7.3	34.7	37.7	3.2	8.3	11.3	4.7
85	11.0	11.4	10.2	13.9	23.9	21.8	18.8

Figure 15 – Tableau des contributions relatives des éléments de J à l'écart entre successeurs immédiats de chaque noeud N de la hiérarchie. La colonne RHO**2 indique, pour tout noeud N, le carré de la distance entre successeurs immédiats de N.

VI.5. – Contributions mutuelles entre classes d'une hiérarchie et facteurs de l'Analyse en Composantes principales normée

Un des premiers calculs à effectuer est celui des contributions relatives des facteurs aux classes (ou plus exactement le $\cos^2$ de l'angle θ_α formé par le rayon vecteur de la classe q et par l'axe factoriel α).



Comme on a $\rho^2(q) = \sum_{\alpha \in A} F_\alpha^2(q)$

On calculera le tableau des $\cos^2 \theta_\alpha / \rho^2(q) = (F_\alpha(q) / \rho(q))^2$ pour chaque axe factoriel de l'Analyse et pour chaque classe q de la hiérarchie A(I).

Ce tableau permet d'apprécier la position d'une classe q dans le système orthonormé d'axes factoriels, mais aussi la part que prend chaque facteur α dans l'explication de l'écart entre la classe q et le centre de gravité du Nuage (qui est le point moyen de l'analyse).

On a effectué ces calculs (Cf. [7]) et la représentation des classes les plus hautes dans la hiérarchie dans les systèmes d'axes factoriels (1 - 2) et (1 - 3), sur l'exemple de l'étude des crânes de chiens et de loups.

Un autre calcul permet d'aller plus loin dans la comparaison des classes aux facteurs ; il provient de la double décomposition de la variance totale du nuage sur les facteurs et sur les classes de la hiérarchie.

Considérons un niveau d'une classe q de A(I) ; soit $\mathcal{J}(q)$ et $a(q) = a$ et $b(q) = b$ ses successeurs immédiats.

On a

$$\mathcal{J}(q) = \mathcal{J}(a(q) \cup b(q)) = \frac{\text{Card} a \cdot \text{Card} b}{\text{Card} q} \|X_{aJ} - X_{bJ}\|^2$$

avec $a(q) \cap b(q) = \emptyset$

Or

$$\sum_{q \in \text{Nod}(A(I))} \mathcal{J}(q) = M^2(N_J(I)) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$$

De plus on a :

$$\|X_{aJ} - X_{bJ}\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |F_\alpha(a) - F_\alpha(b)|^2 = d^2(a, b)$$

On a donc

$$M^2(N_J(I)) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = \sum_{q \in \text{Nod} A(I)} \mathcal{J}(q) = \sum_{q \in \text{Nod}(A(I))} \frac{\text{Card} a \cdot \text{Card} b}{\text{Card} q} |F_\alpha(a) - F_\alpha(b)|^2$$

AXES FACTORIELS

	1	2	3	4	5	6
N 44	31	108	-18	4	18	8
N 45	31	66	12	-2	-9	6
N 46	-83	-14	89	11	-16	0
N 47	6	16	-70	-14	-9	6
N 48	-225	18	84	69	-25	-5
N 49	157	53	-61	-7	-46	7
N 50	42	12	-16	-3	17	-9
N 51	25	106	-17	-7	7	-2
N 52	132	-68	-45	33	0	-8
N 53	-210	-22	-9	59	-45	-3
N 54	-165	-49	-155	-29	34	-1
N 55	290	86	47	-38	7	14
N 56	-8	22	-56	-20	-4	5
N 57	28	90	-5	-5	0	1
N 58	-183	-38	-163	-23	28	-4
N 59	-416	-53	113	-130	-19	-4
N 60	-6	38	-61	-14	2	7
N 61	-248	8	84	77	-10	-5
N 62	-140	-87	-90	22	25	-6
N 63	231	116	43	21	-3	-12
N 64	-78	-21	119	7	0	4
N 65	9	29	-46	-11	7	2
N 66	260	101	45	-8	1	0
N 67	-184	-10	-22	43	-48	1
N 68	-250	6	66	60	5	-1
N 69	310	-94	4	-34	5	-12
N 70	-166	-58	-134	-5	26	-5
N 71	11	103	-1	-3	6	4
N 72	-47	-37	115	15	5	7
N 73	288	95	49	-8	1	-3
N 74	154	-7	-63	12	-22	0
N 75	10	60	-24	-7	6	3
N 76	270	-126	41	-21	21	-10
N 77	-221	-1	24	53	-17	0
N 78	305	-172	27	-16	3	-2
N 79	46	47	-33	-2	0	2
N 80	-158	-14	57	39	-9	2
N 81	-161	-27	-2	25	1	0
N 82	296	-23	39	-12	2	-3
N 83	-183	-30	10	6	0	0
N 84	136	22	-7	-5	0	0
N 85	0	0	0	0	0	0

Figure 16 - Tableau des coordonnées des classes de la hiérarchie dans l'espace factoriel (x 100).

AXES FACTORIELS

	1	2	3	4	5	6
100	413	-309	-15	0	-51	22
101	188	-189	114	3	53	-5
102	252	-72	1	-58	-33	2
103	134	-48	-24	18	1	-8
104	399	69	66	-10	1	-23
105	306	61	67	-40	4	15
106	39	77	25	-10	-12	3
107	273	111	26	-36	10	12
108	24	111	26	21	15	9
109	-71	167	17	1	33	23
110	257	163	63	29	-12	-19
111	36	104	-20	-12	22	3
112	-2	84	-16	4	24	15
113	-38	33	-29	-33	4	4
114	3	13	-66	-20	8	9
115	24	58	0	5	-6	9
116	-130	12	-76	11	-56	11
117	14	103	-14	-30	-14	-19
118	150	-90	-63	48	0	-8
119	10	20	-54	-8	-27	2
120	56	23	-12	0	34	8
121	176	63	-70	-3	-32	16
122	369	-116	7	-10	43	-27
123	-221	-16	-178	-11	10	-11
124	-118	-47	-144	14	22	-22
125	137	43	-93	-12	-60	-1
126	204	69	17	13	5	-5
127	-170	-65	-152	-28	3	-6
128	-162	-126	-67	28	28	8
129	-159	-34	-158	-30	66	4
200	-83	-38	92	8	-17	-1
201	-203	-71	17	61	-35	-18
202	-218	-36	-37	57	-54	10
203	-409	-82	95	-103	-15	7
204	-255	-1	12	10	52	9
205	-209	4	80	71	-31	10
206	-69	-36	179	-1	32	12
207	44	-83	106	41	21	17
208	-422	131	-158	-23	-16	-15
209	-83	10	86	14	-16	1
210	-241	33	89	67	-19	-21
211	-294	-11	82	94	19	-4
001	27	1	-20	-8	1	-27

Figure 17 - Tableau des coordonnées des éléments de I, ensemble des crânes dans l'espace factoriel (x 100).

AXES FACTORIELS

	RO2	1	2	3	4	5	6
N 44	134	4	87	2	0	2	0
N 45	57	17	77	2	0	1	0
N 46	156	44	1	51	0	1	0
N 47	56	0	4	88	3	1	0
N 48	639	79	0	11	7	1	0
N 49	365	67	7	18	0	5	0
N 50	28	67	5	9	0	12	3
N 51	124	5	91	2	0	0	0
N 52	311	74	15	6	3	0	0
N 53	506	87	0	0	7	4	0
N 54	559	48	4	43	1	2	0
N 55	956	87	7	2	1	0	0
N 56	43	1	11	75	10	0	0
N 57	90	8	90	0	0	0	0
N 58	631	53	2	42	0	1	0
N 59	2063	83	1	6	8	0	0
N 60	56	0	25	68	3	0	1
N 61	751	82	0	9	8	0	0
N 62	367	53	20	22	1	1	0
N 63	695	76	19	2	0	0	0
N 64	208	29	2	67	0	0	0
N 65	33	2	26	65	3	1	0
N 66	803	84	12	2	0	0	0
N 67	393	86	0	2	4	6	0
N 68	707	88	0	6	5	0	0
N 69	1070	90	8	0	1	0	0
N 70	498	55	6	36	0	1	0
N 71	109	1	98	0	0	0	0
N 72	174	13	7	76	1	0	0
N 73	947	67	9	2	0	0	0
N 74	287	83	0	14	0	1	0
N 75	52	2	84	11	1	0	0
N 76	917	79	17	1	0	0	0
N 77	529	92	0	1	5	0	0
N 78	1242	75	23	0	0	0	0
N 79	56	38	40	20	0	0	0
N 80	303	82	0	10	5	0	0
N 81	274	94	2	0	2	0	0
N 82	900	97	0	1	0	0	0
N 83	370	96	2	0	0	0	0
N 84	191	86	2	0	0	0	0

Figure 18 – Tableau des cosinus carrés des angles formés par le rayon vecteur d'un noeud N et chaque axe factoriel (x 100) la colonne RO2 contient les distances au carré des classes au centre d'inertie du Nuage (x 100).

On appellera

$$\nu(q, \alpha) = \frac{\text{Carda} \cdot \text{Carbd}}{\text{Cardq}} |F_{\alpha}(a) - F_{\alpha}(b)|^2$$

$$\sum_{q \in \text{Nod}(A(I))} \nu(q, \alpha) = \lambda_{\alpha} \quad ; \quad \sum_{a \in A} \nu(q, \alpha) = \mathcal{J}(n)$$

En termes de contributions on peut dire que $\nu(q, \alpha)$ représente la contribution absolue mutuelle de q et de α , (ou contribution absolue de la paire (q , α) à la trace ; ou contribution absolue de la classe q à l'axe α , ou contribution absolue de l'axe α à la classe q).

D'un point de vue pratique, on analysera plus particulièrement quatre tableaux :

$$T_4 = \{\nu(q, \alpha) \ ; \ q \in A(I) \ ; \ \alpha \in A\} \quad (\text{Cf. Figure 24})$$

Soit $d^2(a, b) = \|a - b\|^2 = \|X_{aI} - X_{bI}\|^2$

On a :

$$d^2(a, b) = \sum_{\alpha \in A} |F_{\alpha}(a) - F_{\alpha}(b)|^2$$

$$\cos^2 \varphi_{\alpha} = \frac{|F_{\alpha}(a) - F_{\alpha}(b)|^2}{d^2(a, b)} = \frac{\nu(q, \alpha)}{\mathcal{J}(q)}$$

Donc la contribution relative à l'indice de diamètre $\mathcal{I}(q)$ de la hiérarchie est le Cos^2 de l'angle formé par le rayon vecteur passant par les successeurs immédiats de la classe q et l'axe factoriel.

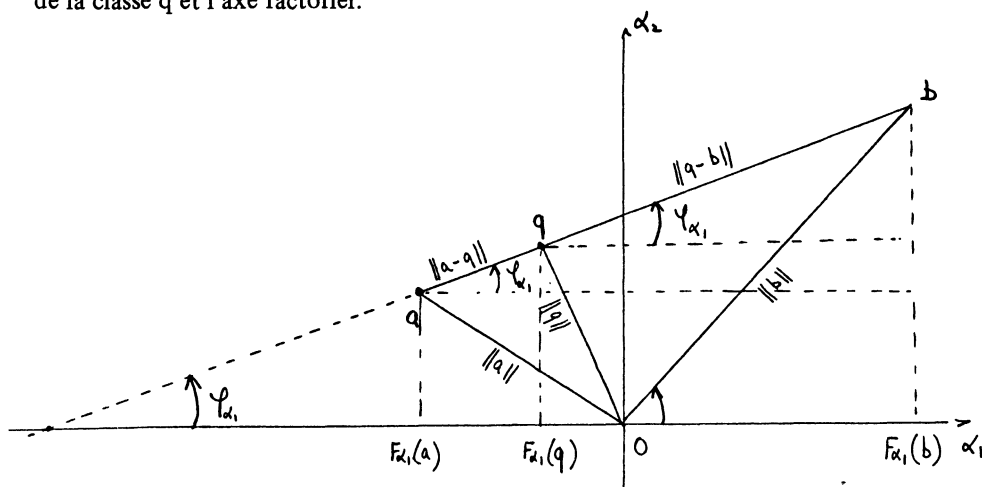


Figure 27 – Interprétation géométrique de $\nu(\alpha, q)/\mathcal{J}(q)$.

On a programmé sur l'exemple d'étude de crânes les tableaux T_1, T_2, T_3, T_4 et projeté dans le système constitué des trois premiers axes factoriels, les fourches principales de la classification (nœuds et successeurs immédiats de nœuds d'indice de niveau élevé). (Cf. figures 19 à 26).

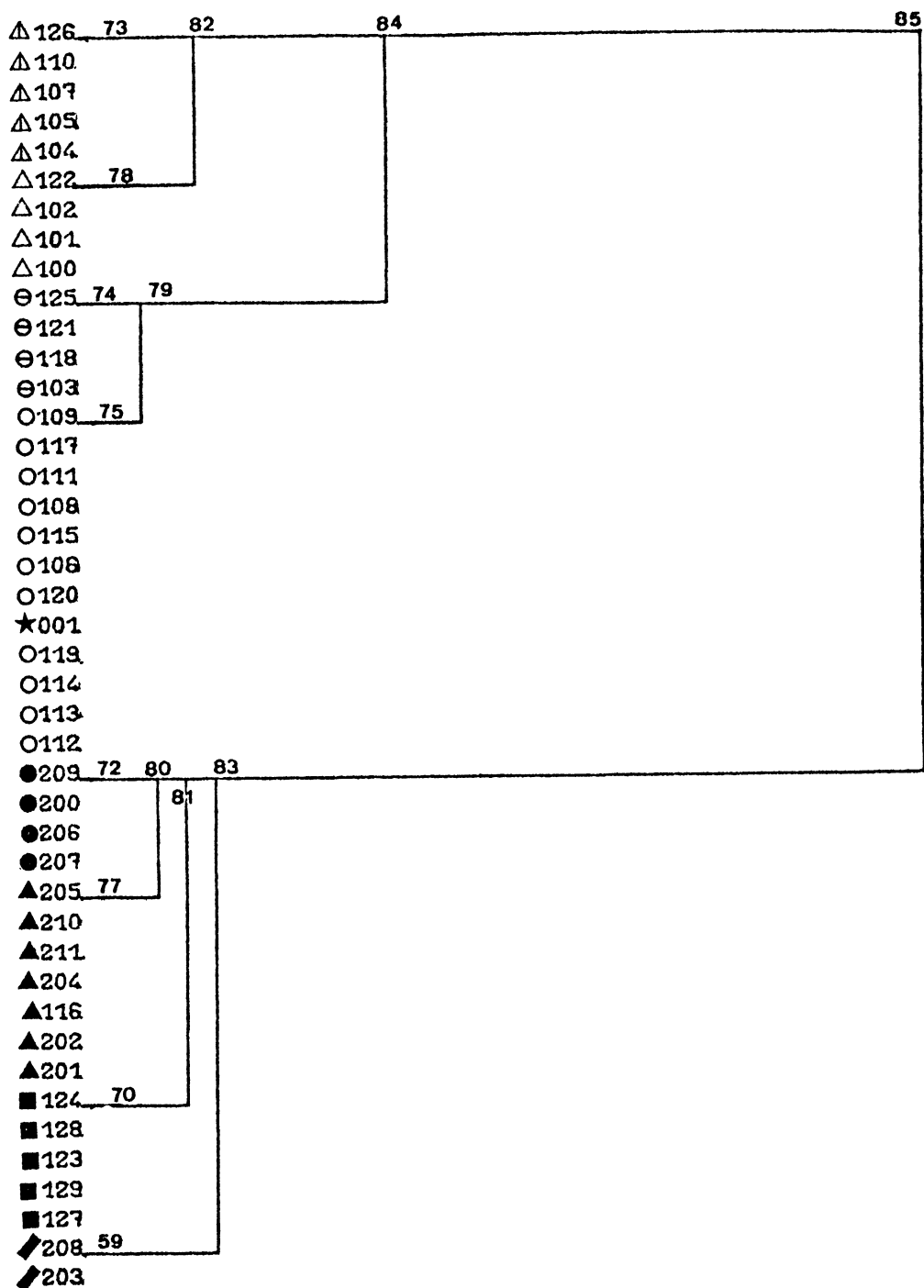


Figure 19. — Taxinomie hiérarchique des crânes de chiens et de loups. Représentation des classes principales.

★ = crâne du canidé de Jussac.

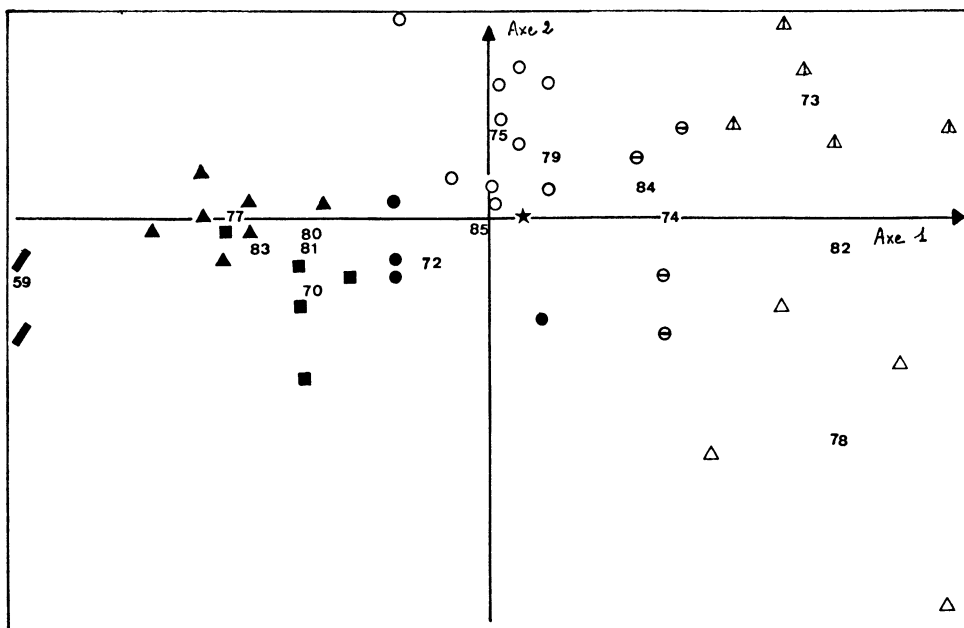


Figure 20 – Représentation et identification des classes supérieures dans l'espace factoriel formé par les axes 1 et 2.

59 = { / } ; 70 = { ■ } ; 77 = { ▲ } ; 72 = { ● }
 75 = { ○ } ; 74 = { ⊙ } ; 78 = { △ } ; 73 = { △ }
 ★ = crâne du canidé de Jussac.

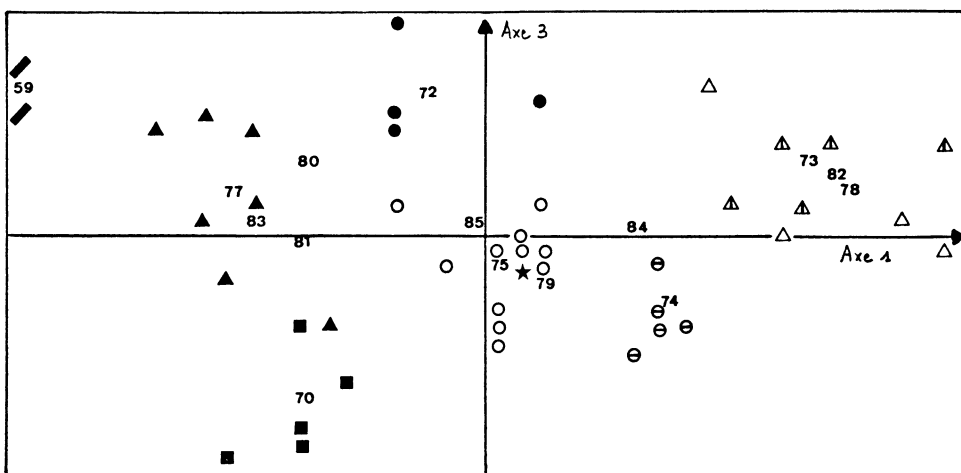


Figure 21 – Représentation et identification des classes supérieures dans l'espace factoriel formé par les axes 1 et 3

59 = { / } ; 70 = { ■ } ; 77 = { ▲ } ; 72 = { ● }
 75 = { ○ } ; 74 = { ⊙ } ; 78 = { △ } ; 73 = { △ }
 ★ = crâne du canidé de Jussac.

Légende

$\{\Delta\} = 73$
 $\{\triangle\} = 74$
 $\{\Theta\} = 74$
 $\{O\} = 75$
 $\{\bullet\} = 72$
 $\{\blacktriangle\} = 77$
 $\{\blacksquare\} = 70$
 $\{\diagup\} = 59$
 $\star = \text{canidi de}$
 Junac

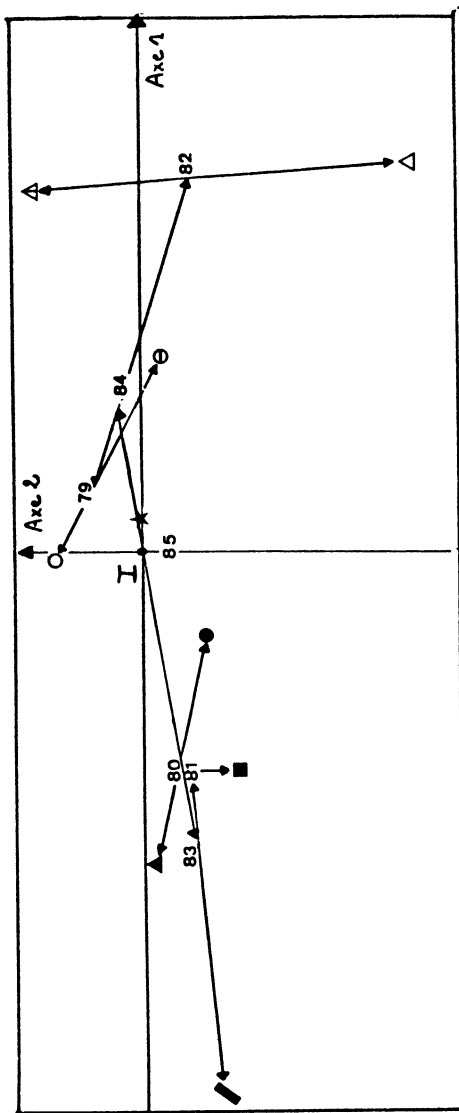


Figure 22 – Représentation dans le système formé par les deux premiers axes factoriels des classes principales (cf. figure 19) et des “fourches” principales. Une fourche est constituée d’un noeud et de ses deux successeurs immédiats.

Légende

$\{\Delta\} = 73$
 $\{\triangle\} = 74$
 $\{\Theta\} = 74$
 $\{O\} = 75$
 $\{\bullet\} = 72$
 $\{\blacktriangle\} = 77$
 $\{\blacksquare\} = 70$
 $\{\diagup\} = 59$
 $\star = \text{canidi de}$
 Junac

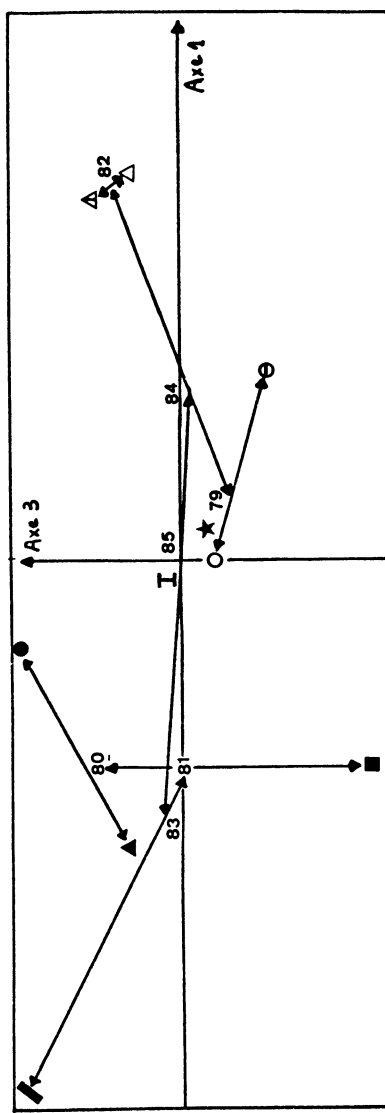


Figure 23 – Représentation dans le système formé par les axes un et trois, des classes principales (cf. figure 19) et des fourches principales (cf. figure 22).

AXES FACTORIELS										AXES FACTORIELS										AXES FACTORIELS									
Q(N)	NIVEAU	1	2	3	4	5	6			Q(N)	NIVEAU	1	2	3	4	5	6			Q(N)	D(A,B)	1	2	3	4	5	6		
N 44	50	7	1	0	0	5	0	0	0	N 44	50	7	0	0	0	0	0	0	0	N 44	50	15	14	3	0	76	3	2	
N 45	50	8	1	0	0	1	0	0	0	N 45	50	8	0	0	0	0	0	0	0	N 45	50	16	13	26	38	16	2	1	
N 46	50	11	0	0	0	0	0	0	0	N 46	50	11	0	0	0	0	0	0	0	N 46	50	23	0	86	1	1	0	0	
N 47	50	12	0	0	0	0	0	0	0	N 47	50	12	0	0	0	0	0	0	0	N 47	50	25	2	1	38	5	50	1	
N 48	50	15	0	0	0	0	0	0	0	N 48	50	15	0	0	0	0	0	0	0	N 48	50	30	33	26	2	0	4	32	
N 49	50	18	0	0	0	0	0	0	0	N 49	50	18	0	0	0	0	0	0	0	N 49	50	36	41	14	2	20	29	33	
N 50	50	19	0	0	0	0	0	0	0	N 50	50	19	0	0	0	0	0	0	0	N 50	50	39	20	12	1	36	33	20	
N 51	66	22	1	0	0	8	7	4	0	N 51	66	22	0	0	0	1	5	0	0	N 51	66	33	8	0	0	19	0	0	
N 52	50	22	0	0	0	0	0	0	0	N 52	50	22	0	0	0	0	0	0	0	N 52	50	44	0	42	37	0	0	0	
N 53	50	25	0	0	0	0	0	0	0	N 53	50	25	0	0	0	0	0	0	0	N 53	50	52	4	15	57	0	6	15	
N 54	50	26	0	0	0	0	0	0	0	N 54	50	26	0	0	0	0	0	0	0	N 54	50	51	2	18	0	0	75	2	
N 55	50	26	0	0	0	0	0	0	0	N 55	50	26	0	0	0	0	0	0	0	N 55	50	53	19	47	31	0	0	0	
N 56	66	30	1	1	1	1	1	1	1	N 56	66	30	0	0	0	0	0	0	0	N 56	66	46	45	6	36	7	3	0	
N 57	119	35	0	19	10	0	3	0	0	N 57	119	35	0	0	0	0	0	0	0	N 57	119	29	1	54	30	5	10	2	
N 58	66	38	21	7	3	2	4	0	0	N 58	66	38	0	0	0	0	0	0	0	N 58	66	58	54	18	8	5	10	1	
N 59	50	43	0	17	6	15	0	0	0	N 59	50	43	0	0	0	0	0	0	0	N 59	50	87	1	40	14	35	0	6	
N 60	75	44	0	29	2	4	6	0	0	N 60	75	44	0	0	0	0	0	0	0	N 60	75	59	0	66	6	10	14	1	
N 61	66	55	31	6	0	4	13	0	0	N 61	66	55	0	0	0	0	0	0	0	N 61	66	83	56	11	0	7	24	0	
N 62	50	58	9	37	11	1	0	0	0	N 62	50	58	0	0	0	0	0	0	0	N 62	50	117	16	53	19	1	0	8	
N 63	50	75	13	44	13	1	1	0	0	N 63	50	75	0	0	0	0	0	0	0	N 63	50	151	18	58	17	1	2	1	
N 64	56	76	1	3	52	1	16	1	0	N 64	56	76	0	0	0	0	0	0	0	N 64	56	114	2	4	69	1	4	5	
N 65	133	77	31	8	28	1	3	0	0	N 65	133	77	0	0	0	0	0	0	0	N 65	133	58	41	11	36	1	21	1	
N 66	100	87	34	8	0	35	1	0	0	N 66	100	87	0	0	0	0	0	0	0	N 66	100	87	39	10	0	40	1	8	
N 67	66	98	43	8	29	13	0	1	0	N 67	66	98	0	0	0	0	0	0	0	N 67	66	141	43	8	30	15	0	1	
N 68	75	104	0	0	38	34	29	1	0	N 68	75	104	0	0	0	0	0	0	0	N 68	75	139	0	0	36	32	28	1	
N 69	50	124	68	9	0	11	29	4	0	N 69	50	124	0	0	0	0	0	0	0	N 69	50	249	55	8	0	9	23	3	
N 70	119	138	22	28	62	24	0	0	0	N 70	119	138	0	0	0	0	0	0	0	N 70	119	115	16	20	45	17	0	0	
N 71	83	148	82	48	4	0	9	4	0	N 71	83	148	0	1	0	0	0	0	0	N 71	83	118	55	32	2	0	6	2	
N 72	75	156	112	29	1	8	3	1	0	N 72	75	156	0	0	0	0	0	0	0	N 72	75	209	71	18	0	5	2	0	
N 73	79	170	153	8	3	0	0	0	0	N 73	79	170	0	0	0	0	0	0	0	N 73	79	212	90	4	2	0	0	2	
N 74	100	204	0	148	13	17	22	2	0	N 74	100	204	0	0	0	0	0	0	0	N 74	100	204	0	72	8	10	1	0	
N 75	300	227	0	164	60	1	0	0	0	N 75	300	227	0	4	0	2	0	0	0	N 75	300	75	0	72	26	0	0	0	
N 76	66	266	99	59	80	9	15	0	0	N 76	66	266	0	0	0	0	0	0	0	N 76	66	399	37	22	30	3	5	0	
N 77	171	301	75	4	165	5	30	0	0	N 77	171	301	0	0	0	0	0	0	0	N 77	171	175	24	1	55	1	16	0	
N 78	75	481	152	252	24	3	40	8	0	N 78	75	481	0	7	0	0	0	0	0	N 78	75	642	31	52	5	0	8	1	
N 79	300	875	624	184	46	12	26	0	0	N 79	300	875	3	4	0	0	0	0	0	N 79	300	291	71	18	5	1	3	0	
N 80	254	1070	770	33	215	35	43	1	0	N 80	254	1070	4	0	7	4	3	1	0	N 80	254	420	72	3	20	3	1	0	
N 81	343	1448	2	68	1262	69	44	2	0	N 81	343	1448	0	1	45	8	11	2	0	N 81	343	430	0	4	87	0	3	0	
N 82	222	1605	5	1585	11	1	0	0	0	N 82	222	1605	0	46	0	0	0	0	0	N 82	222	722	0	0	0	0	0	0	
N 83	177	1830	1155	11	238	7	0	0	0	N 83	177	1830	6	0	8	54	2	0	0	N 83	177	1040	62	0	12	23	0	0	
N 84	575	4205	3590	285	312	5	0	1	0	N 84	575	4205	19	8	11	0	0	0	0	N 84	575	730	85	7	7	0	0	0	
N 85	1046	11460	11111	292	33	21	0	0	0	N 85	1046	11460	60	8	1	2	0	0	0	N 85	1046	1095	98	2	0	0	0	0	

Figure 26 – Tableau des contributions relatives des facteurs aux noeuds (x 100) (cf. Tableau T2)

≈ Tableau des cosinus carré des angles formés par les axes factoriel et les axes passant par les centres de gravité des successeurs immédiats des classes – La colonne D(A, B) contient les carrés des distances entre successeurs immédiats.

Figure 25 – Tableau des contributions relatives des noeuds N aux facteurs (x 100) (cf. tableau T1).

La colonne Q(N) contient le coefficient de pondération $\rho(a(N)) \cdot \rho(b(N))/\rho(N)$.

Figure 24 – Tableau des contributions $\nu(N, \alpha)$ (x 100) des paires (N, α) à l'inertie totale du nuage. La colonne NIVEAU contient les indices de diamètres des classes N.

CONCLUSION

L'utilisation conjointe de l'Analyse factorielle et de la classification hiérarchique fondée sur le critère de maximisation du moment centré d'ordre 2 d'une partition enrichit considérablement l'interprétation des résultats. On notera que la comparaison d'un modèle factoriel et d'un modèle hiérarchique est issu d'un résultat assez général des classifications hiérarchiques totales dans les espaces euclidiens, et que par conséquent, l'illustration et les résultats énoncés pour l'analyse en composantes principales normée sont valables également pour l'analyse en composantes principales non normée, pourvu qu'on choisisse correctement les masses affectées aux observations et la norme dans l'espace de référence (ici le nuage des observations dans l'espace des variables).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JAMBU M. — Quelques calculs utiles à l'interprétation conjointe d'une classification ascendante hiérarchique et d'une analyse des correspondances. Publication du Laboratoire de Statistique Université Pierre et Marie Curie — 1975.
- [2] JAMBU M. — Programme de calcul des contributions mutuelles entre classes d'une hiérarchie et facteurs d'une correspondance. *Les Cahiers de l'Analyse des Données* — Vol. I — 1976 n° 1 pp. 79-94 Dunod.
- [3] DE BONIS L. et LEBEAUX M.O. — A propos d'un crâne de canidé découvert dans le quaternaire du central. Etude multidimensionnelle des caractères discriminants entre chiens et loups — in *Mammalia* — t. 38, n° 4, 1974, pp. 717-728.
- [4] LEBART L. et FENELON J.P. — Informatique et statistique appliquées — 3^e édition Dunod — 1976 Paris.
- [5] JAMBU M. — Techniques de classification automatique appliquées à des données — Sciences Humaines — Thèse de 3^e cycle — 1972. Publication du Laboratoire de Statistique — Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- [6] JAMBU M. — Programme général de construction de classifications ascendantes hiérarchiques (C.A.H.) — In *L'Analyse des Données -T.I.4- La taxinomie*, par J.P. BENZECRI et Collaborateurs.