

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. SMAI

F. BASTENAIRE

Étude des propriétés statistiques de l'estimation d'un seuil de réponse par la méthode des K résultats identiques

Revue de statistique appliquée, tome 25, n° 2 (1977), p. 5-26

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_2_5_0

© Société française de statistique, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE L'ESTIMATION D'UN SEUIL DE RÉPONSE PAR LA MÉTHODE DES K RÉSULTATS IDENTIQUES

M. SMAI et F. BASTENAIRE

RESUME

L'estimation, même approchée, du seuil de réponse par une alternative (on dit aussi par "tout ou rien") à une sollicitation quantitative n'est possible avec un nombre assez limité d'essais (disons moins d'une quinzaine) que par très peu de méthodes. L'une d'elles, que nous nommons "des k résultats identiques", n'exige à la fois que peu d'essais et peu d'information préalable sur la valeur du seuil cherché.

En vue d'en préciser exactement les qualités, nous avons calculé le biais et la dispersion de l'estimation obtenue ainsi que l'espérance mathématique et l'écart-type du nombre d'essais nécessaires (aléatoire avec cette méthode) en fonction des diverses conditions d'application qui peuvent, en pratique, se présenter.

I — INTRODUCTION

Nombreux sont, au laboratoire, les essais dont le résultat ne peut prendre que deux modalités qui s'excluent réciproquement. C'est le cas de beaucoup d'essais biologiques où un animal mis en expérience meurt ou survit au traitement qui lui a été appliqué. C'est aussi le cas pour beaucoup d'essais de matériaux qui peuvent satisfaire ou non à une épreuve donnée (rompre ou ne pas rompre, donner lieu ou non à court-circuit etc. . .).

Dans cette situation, la réponse (c'est le nom que l'on donne à un type de résultat) prend deux modalités possibles avec des probabilités respectives p et q . Si l'on effectue plusieurs essais, le nombre de résultats d'un type donné suit donc la loi binomiale.

Lorsque, de plus, les conditions de l'essai peuvent être modifiées par la valeur d'un paramètre dont l'expérimentateur a le choix, les probabilités p et q deviennent des fonctions $p(x)$, $q(x)$ et peuvent être représentées par des courbes appelées courbes de réponse. Bien entendu, $p(x)$ et $q(x)$ varient entre 0 et 1 mais le plus souvent, en pratique, de façon monotone.

Un type de variation de $p(x)$ et de $q(x)$ fréquemment observé est donné par la courbe sigmoïde normale c'est-à-dire par l'intégrale d'une loi de LAPLACE-GAUSS.

Ce fait s'explique facilement quand on peut admettre que l'événement observé (mort ou survie par exemple) est, en fait, déterminé par comparaison de la dose appliquée à une dose limite inobservable mais distribuée selon la loi normale. La probabilité de l'événement observé se ramène alors à la probabilité que la dose limite tolérée soit inférieure à la dose appliquée.

En désignant le facteur ou dose par x , la probabilité de l'événement auquel on s'intéresse par $p(x)$ et la fonction de répartition de la variable $N(0, 1)$ par G , on a :

$$p(x) = G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

μ et σ étant deux paramètres de la loi de réponse.

On notera que, pour $x = \mu$, $p(x) = \frac{1}{2}$ quel que soit σ . La valeur de μ est donc la dose médiane. Quant à σ c'est évidemment un paramètre qui caractérise l'étalement de la courbe de réponse.

Il existe différentes méthodes d'estimation de μ et de σ dont une présentation assez complète a été faite dans [1] :

- La méthode des probits permet d'étudier l'allure d'une courbe de réponse et d'estimer ses paramètres si elle est sigmoïde normale.

- La méthode de l'escalier ("Staircase" de DIXON et MOOD) [3] permet aussi d'estimer μ et σ .

- La méthode d'itération stochastique de ROBBINS et MONRO [4] permet d'estimer la valeur de la dose pour laquelle la réponse a lieu avec une probabilité donnée.

- La méthode des k résultats identiques utilisée à cause de sa simplicité et qui permet aussi d'estimer la position de divers points de probabilité donnée de la courbe de réponse.

On se propose de donner ici un tableau complet des propriétés de cette méthode en complément des travaux de BASTENAIRE et WEISZ [5].

II – PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode consiste à rechercher, en faisant varier le paramètre x (que nous appellerons désormais, par commodité, la "dose") dans un sens donné (croissant ou décroissant) et par valeurs régulièrement espacées, la dose pour laquelle k épreuves donnent k résultats identiques et du type dont la probabilité tend vers l'unité lorsque x s'éloigne à l'infini dans le sens choisi.

Le niveau x_1 de la dose appliquée au premier essai est choisi tel que la probabilité de l'événement R que l'on veut réaliser k fois en un même niveau y soit très voisine de zéro.

Les essais sont alors effectués un par un, en succession, le choix de la dose étant défini par la règle suivante :

Le dernier essai s'étant trouvé réalisé au niveau x_i et le nombre total des essais effectués à ce niveau étant n_i ,

a) si le dernier de ces n_i résultats n'a pas produit l'événement R, l'essai suivant doit être effectué au niveau suivant x_{i+1} de la séquence des doses ;

b) si les n_i résultats obtenus au niveau x_i sont tous de type R, l'essai suivant doit être effectué au même niveau x_i à condition que $n_i < k$. Si $n_i = k$, arrêter les essais.

On voit qu'avec cette règle d'action, on change la dose dès qu'une séquence de résultats obtenus en un niveau x_i comprend un résultat contraire à R (qui, de ce fait, ne peut être que le dernier de la séquence), que la suite des essais se termine en un niveau auquel ils ont donné k résultats de type R et qu'aux niveaux qui précèdent ce dernier on n'a jamais à effectuer plus de k essais.

III — SCHEMA THEORIQUE DU PROCESSUS

Les différentes valeurs possibles de x_i constituent une échelle de niveaux.

Soit x_0 le niveau de cette échelle le plus voisin de la médiane μ de la courbe de réponse sigmoïde normale considérée et Δ l'espacement des niveaux de la dose. L'échelle des niveaux se présente alors comme suit :

$$\dots, (x_0 - n\Delta), x_0 - (n-1)\Delta, \dots, x_0 - \Delta, x_0, x_0 + \Delta, \dots, x_0 + n\Delta$$

soit, d'une manière générale : $x_0 + i\Delta$, i étant entier, négatif, nul ou positif.

Le raisonnement et les calculs ont été faits dans le cas d'une démarche ascendante, ceux d'une démarche descendante s'en déduisant aisément par symétrie.

Si x_r est le niveau de départ de l'expérience, notons X_r la variable aléatoire discrète donnant le niveau d'arrêt.

Les valeurs possibles de X_r sont alors :

$$x_r, x_{r+1}, \dots, x_{m-1}, x_m, \dots,$$

le critère d'arrêt étant l'observation de k réponses de type R.

Etudions la probabilité que X_r prenne la valeur x_m pour une valeur donnée de k .

a) $k = 1$

Pour que $X_r = x_m$, il faut et il suffit que l'événement contraire de R, soit $\bar{R}$, se produise aux niveaux $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{m-1}$ et que R ait lieu au niveau x_m . Les résultats des épreuves étant supposés indépendants en probabilité :

$$P(X_r = x_m) = (1 - p_r)(1 - p_{r+1}) \dots (1 - p_{m-1}) p_m \quad (1)$$

p_i désignant la probabilité de l'événement R au niveau x_i .

b) *k* quelconque

Pour que, partant du niveau x_r , le processus s'arrête au niveau x_m , il faut et il suffit qu'il soit reconduit en $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{m-1}$ et interrompu en x_m .

Il résulte de la règle suivie (cf. § II) que le nombre des essais effectués pour chaque valeur donnée de la dose est inférieur ou égal à k . Comme la probabilité de décider l'arrêt du processus est p_i^k (probabilité d'observer k fois l'événement R) et que, si l'on ne décide pas de l'arrêter, on poursuit les essais en passant au niveau suivant, la probabilité de cette décision est $(1 - p_i^k)$.

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en notant que l'application de la règle opératoire du § II conduit à décider de changer la dose dès la première fois que l'on n'observe pas R , ce qui peut avoir lieu au 1^{er}, 2^e, etc. . . ou k^{eme} essai.

La probabilité de devoir changer la dose est donc :

$$(1 - p_i) + p_i(1 - p_i) + p_i^2(1 - p_i) + \dots + p_i^{k-1}(1 - p_i) = 1 - p_i^k \quad (2)$$

La probabilité d'arrêter les essais au niveau x_m est, en conséquence :

$$\Pr \{X_r = x_m\} = (1 - p_r^k)(1 - p_{r+1}^k) \dots (1 - p_{m-1}^k) p_m^k \quad (3)$$

En notant ${}_r\Pi_m = P(X_r = x_m)$ les formules usuelles de calcul de l'espérance mathématique et de la dispersion nous donnent :

$$1/ E(X_r) = \sum_{m=r}^{+\infty} x_m {}_r\Pi_m.$$

$$2/ D^2(X_r) = E(X_r^2) - E^2(X_r) = \sum_{m=r}^{+\infty} x_m^2 {}_r\Pi_m - \left(\sum_{m=r}^{+\infty} x_m {}_r\Pi_m \right)^2$$

Relevons deux points importants :

D'une part, on s'attend, à juste titre, à ce qu'à chaque niveau de départ x_r corresponde une variable aléatoire discrète X_r à laquelle sont associées une moyenne et une dispersion particulières. On montre toutefois, dans l'annexe I, que la probabilité ${}_r\Pi_m$ tend, pour m fixé, vers une valeur limite quand r tend vers $-\infty$ et qu'elle en diffère de façon négligeable dès que le niveau de départ x_r est inférieur à -3 écarts-types à partir de la moyenne.

D'autre part, si on reprend l'expression de

$${}_r\Pi_m = (1 - p_r^k)(1 - p_{r+1}^k) \dots (1 - p_{m-1}^k) p_m^k$$

les probabilités p_i^k , pour des niveaux s'écartant de plus de 3 écarts-types au-delà de la moyenne, sont voisines de 1 et, par conséquent, $(1 - p_i^k)$ est voisin de 0. On se doute alors que ${}_r\Pi_m$ comportant des facteurs négligeables devienne lui-même très rapidement négligeable. Ces deux remarques sont d'un grand intérêt pratique puisque ,

1) l'influence du niveau de départ étant négligeable dès que celui-ci se situe en deçà de 3 écarts-types par rapport à la moyenne, on peut, en pratique, le prendre égal à cette limite, ce qui permet une économie d'essais.

2) la seconde remarque nous permet de tronquer assez tôt dans 1/ et 2/ la sommation à l'infini sans altération sensible des résultats.

Dans les calculs, les niveaux d'essai utilisés s'échelonnent de -3 écarts-types à $+3$ écarts-types et un contrôle des résultats est possible par la sommation des probabilités des termes pris en compte et comparaison à l'unité.

IV — CALCULS EFFECTUES

Tous les calculs ont été effectués pour une courbe de réponse sigmoïde standard c'est-à-dire de médiane $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$; les résultats peuvent donc être considérés comme des multiples de l'écart-type.

Afin d'étudier l'influence des positions respectives de la médiane μ et de l'échelle des niveaux d'essai, on a pris, pour un pas d'essai Δ , cinq origines différentes situées respectivement en :

$$\mu - \Delta/2, \mu - \Delta/4, \mu, \mu + \Delta/4, \mu + \Delta/2.$$

Cinq valeurs de Δ et six valeurs de k ont été considérées, à savoir :

$$\Delta = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 3/2$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Pour chaque combinaison de k et Δ et chaque valeur de l'origine, on a alors calculé :

— l'espérance mathématique du niveau d'arrêt X_r désigné désormais S pour supprimer toute référence au point x_r de départ de la procédure.

— son écart-type $D(S)$.

— son mode $M(S)$.

— la probabilité $p(E(S))$, correspondant à la valeur $E(S)$.

— des intervalles de confiance à 90 %, 95 % et 98 % respectivement.

Ces derniers indiquent les limites probables entre lesquelles se situerait une valeur particulière de S . Remarquons toutefois que ces intervalles de confiance sont à α % au plus du fait de la nature discrète de S (cf. [5], tableau IV).

Les résultats détaillés de cette étude, pour quelques combinaisons de Δ et de k , ont été reportés dans les tableaux A 1 à A 4.

En second lieu, il nous a paru intéressant d'étudier le nombre total d'essais à effectuer pour mener la procédure à son terme. Ce nombre étant, comme le nombre de niveaux de la dose, un nombre aléatoire, on a calculé son espérance mathématique et son écart-type (tableau C).

V – DISCUSSION DES RESULTATS

La valeur de $E(S)$ indique dans quelle partie de l'étendue des niveaux on aboutira, en moyenne, en procédant avec un couple (k, Δ) donné. $D(S)$ nous renseigne sur l'amplitude de la fluctuation aléatoire dont le niveau d'arrêt est affecté.

Les résultats des tableaux A 1 à A 4 montrent que le positionnement de l'échelle des niveaux d'essai par rapport à la médiane de la courbe de réponse n'a qu'une influence très faible sur $E(S)$ et $D(S)$ tant que $\Delta < 1$ et peu importante pour $\Delta = 1$. En pratique, même dans ce dernier cas, on peut négliger leurs variations.

Bien que le mode $M(S)$ subisse, par contre, des variations importantes lorsque varie le positionnement de l'échelle, ceci n'a que peu de répercussions sur le comportement de S . En effet, ces variations sont dues au caractère discret de la distribution de probabilité de S et au passage brusque du mode $M(S)$ d'un niveau de la dose à un autre lorsque cette distribution change progressivement de forme. Cette même observation s'applique aussi aux bornes des intervalles de confiance de S .

En s'appuyant donc, en définitive, sur les critères $E(S)$ et $D(S)$, on peut dire que le positionnement de l'échelle des niveaux de la dose n'introduit qu'une incertitude très faible sur les estimations recherchées.

Les résultats peuvent alors être résumés sous la forme du tableau B établi pour une origine de l'échelle coïncidant avec la médiane.

Ce tableau nous révèle les propriétés statistiques essentielles de S . On constate que $E(S)$ augmente, à la fois en fonction du pas Δ et de k . Ceci se comprend intuitivement en notant que l'événement recherché (k fois R) se produira pour une valeur d'autant plus faible de la dose que l'on aura resserré et donc multiplié les niveaux d'essais et d'autant plus tard que k sera élevé.

La dispersion $D(S)$ croît en fonction de Δ et décroît en fonction de k .

L'étendue des intervalles de confiance est relativement grande même pour les valeurs élevées de k et faibles de Δ .

La sélection d'une combinaison de k et de Δ peut être basée sur les valeurs $E(S)$ et $D(S)$ du tableau B.

S'il est nécessaire que l'erreur systématique reste faible, il faut adapter la valeur de k à celle de Δ . On prendra, par exemple,

	$k = 1$ et $\Delta = 0,5$ ou 1
ou	$k = 2$ et $\Delta = 0,25$
ou	$k = 3$ et $\Delta = 0,125$.

Le choix de k et de Δ ne doit toutefois pas être gouverné par la seule considération de l'erreur systématique qui peut d'ailleurs, selon le but recherché, être parfaitement admissible.

Il y a lieu de considérer, en outre et surtout, la dispersion $D(S)$ et l'espérance mathématique du nombre d'essais jusqu'à l'arrêt de la procédure.

On a vu, d'après les résultats du tableau B, que la dispersion $D(S)$ décroît lorsque Δ décroît et lorsque k augmente mais, simultanément, comme l'indique le tableau C, $E(N)$ croît lorsque k croît et lorsque Δ décroît.

Ainsi, toute augmentation de la reproductibilité se paie en nombre d'essais.

L'examen simultané des tableaux B et C montre que, pour une même valeur de $D(S)$, des combinaisons différentes de k et Δ peuvent conduire à des valeurs différentes de $E(N)$. Exemple :

$$\begin{array}{llll} k = 2 & \Delta = 1 & D(S) = 0,765 & E(N) = 6,43 \\ k = 4 & \Delta = 1,5 & D(S) = 0,769 & E(N) = 8,24. \end{array}$$

Dans ce cas et si, par ailleurs, la valeur de $E(S)$ n'est pas prise en considération, la meilleure combinaison est celle qui conduit à la valeur la plus faible de $E(N)$.

Une manière de comparer les mérites respectifs des différentes combinaisons de k et de Δ consiste à former le tableau des quantités : $D^2(S) E(N)$, la variance d'un estimateur étant, en général, inversement proportionnelle au nombre d'épreuves.

Le tableau D indique les valeurs du produit $D^2(S) E(N)$. On voit que, pour chaque valeur de k , ce produit passe par un minimum pour une certaine valeur de Δ , les différences étant assez accentuées. Ainsi, "l'efficacité" de la solution $k = 1, \Delta = 1$ pour laquelle $D^2(S) E(N) = 3,40$ est sensiblement supérieure à celle de la solution $k = 1, \Delta = 0,125$ pour laquelle $D^2(S) E(N) = 5,69$.

Au fur et à mesure que k augmente, le minimum qui, pour $k = 1$, correspond à $\Delta = 1$, correspond à des valeurs décroissantes de Δ (0,5 à partir de $k = 4$).

On note aussi que le minimum absolu, dans ce tableau, est la valeur de 3,40 calculée pour $k = 1, \Delta = 1$, tandis que les minimas trouvés pour les valeurs $k = 1, 2, 3$ etc. . . croissent de façon sensible (3,76 ; 4,17 ; 4,45 etc. . .).

VI — CONCLUSIONS

La méthode qui consiste, pour déterminer la position d'une courbe de réponse par tout ou rien à un stimulus ou dose, à faire varier cette dose par valeurs régulièrement espacées jusqu'à ce que k essais effectués dans les mêmes conditions donnent k réponses identiques permet, avec un très petit nombre d'essais, d'obtenir une valeur approchée de la médiane de la courbe de réponse considérée.

La méthode est pratiquement insensible à la position de la grille des valeurs de la dose par rapport à la courbe de réponse inconnue.

Pour des combinaisons de k et de l'espacement des doses couvrant les conditions pratiques d'application de la méthode, les propriétés statistiques (espérance mathématique ou biais, dispersion, intervalle de confiance) de l'estimateur défini par cette méthode ont été calculées ainsi que le nombre moyen et l'écart-type du nombre aléatoire d'épreuves à réaliser pour appliquer la procédure. Ces tableaux permettent à tout utilisateur de connaître la précision du résultat obtenu et son coût exprimé en nombre d'épreuves.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ULMO J. — Détermination expérimentale de la courbe représentant les variations, en fonction d'un paramètre, de la probabilité d'un phénomène se traduisant par une alternative, quand celle-ci est une courbe de GALTON. *Annales des Mines* (1952), n° III-IV.
- [2] FINNEY D.J. — Probit analysis — A statistical treatment of the sigmoid response curve. Cambridge University Press.
- [3] DIXON W.J., MOOD A.M. — A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *J. Am. Stat. Ass.* (1948), 43, pp. 109-126.
- [4] ROBBINS H., MONRO S. — A Stochastic approximation method. *Ann. Math. Stat.* (1951), 22, pp. 400-407.
- [5] BASTENAIRE F., WEISZ M. — Contribution à l'étude de l'aspect statistique de la fatigue (1^{ère} partie, paragraphes H, I). *Revue de Métallurgie* (1958), 55, n° 8, pp. 785-796.
- [6] BASTENAIRE F., WEISZ M. — Contribution à l'étude de la dispersion des résultats des essais de fatigue des aciers. Rapport intérieur IRSID - EM 34 (1957).

APPENDICE I

CONVERGENCE DE LA LOI DE DISTRIBUTION DE X_r (cf. § III) VERS UNE FORME LIMITE QUAND x_r S'ÉLOIGNE INDEFINIMENT DE L'ORIGINE.

(Démonstration extraite d'une étude de F. BASTENAIRE et M. WEISZ [7]).

On peut se demander ce qu'il advient à la distribution de X_r lorsque l'on fait varier le niveau de départ x_r de la procédure. Nous allons voir que la distribution de X_r se stabilise, c'est-à-dire tend vers une forme limite, lorsque le premier niveau d'essai x_r est choisi de plus en plus éloigné de la médiane de la courbe de réponse. De plus, cette convergence est extrêmement rapide et pratiquement réalisée dès que $x_r - \mu$ est égal à -3σ (dans le cas d'une procédure ascendante).

Nous avons vu au § III que :

$$\Pr \{X_r = x_m\} = (1 - p_r^k) (1 - p_{r+1}^k) \dots (1 - p_{m-1}^k) p_m^k \quad (\text{A.1})$$

avec, dans le cas d'une courbe de réponse pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{A.2})$$

Posons $z = t^2/2$ et, pour avoir une correspondance biunivoque entre t et z , supposons $x_i < 0$.

On peut alors écrire :

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_i^2}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{2z}} dz \quad (\text{A.3})$$

d'où puisque $z \geq x_i^2/2$:

$$p_i < \frac{1}{|x_i| \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_i^2}{2}}^{+\infty} e^{-z} dz$$

soit :

$$p_i < \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{|x_i| \sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.4})$$

Cette inégalité est valable quel que soit $x_i < 0$ et, notamment, que i soit supérieur, égal ou inférieur à r .

De même, pour tout i :

$$x_i = x_r + (i - r) \Delta \quad (\text{A.5})$$

et

$$x_i^2 = x_r^2 + 2(i-r) \Delta x_r + (i-r)^2 \Delta^2 \quad (\text{A.6})$$

Soit maintenant l un entier $< r$. Comme x_r est, par hypothèse, négatif, on a :

$$|x_l| > |x_r|$$

et, d'après (A.6) :

$$x_l^2 > x_r^2 + 2(l-r) \Delta x_r$$

De l'inégalité (A.4) appliquée à p_l :

$$p_l < \frac{e^{-\frac{x_l^2}{2}}}{|x_l| \sqrt{2\pi}}$$

on déduit :

$$p_l < \frac{e^{-\frac{x_r^2}{2} + (r-l) \Delta x_r}}{|x_r| \sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.7})$$

soit, en posant :

$$A = \frac{e^{-\frac{x_r^2}{2}}}{|x_r| \sqrt{2\pi}} \quad B = e^{\Delta x_r} \quad j = r - 1$$

$$p_l < A B^j \quad (\text{A.8})$$

Notons que, x_r étant par hypothèse négatif, B est inférieur à l'unité. Les probabilités p_l sont donc majorées par les termes d'une série géométrique.

Posons (cf. éq. (1) du texte) :

$${}_r\Pi_m = \Pr \{X_r = x_m\} = (1 - p_r^k) \dots (1 - p_{m-1}^k) p_m^k$$

et, avec $s < r$:

$${}_s\Pi_m = \Pr \{X_s = x_m\} = (1 - p_s^k) \dots (1 - p_{r-1}^k) (1 - p_r^k) \dots (1 - p_{m-1}^k) p_m^k, \quad (\text{A.9})$$

alors :

$${}_s\Pi_m = (1 - p_s^k) \dots (1 - p_{r-1}^k) {}_r\Pi_m \quad (\text{A.10})$$

Notons que :

$$(1 - p_s^k) (1 - p_{s+1}^k) = 1 - p_s^k - p_{s+1}^k + p_s^k p_{s+1}^k > 1 - p_s^k - p_{s+1}^k$$

et, par récurrence, que :

$$1 - p_s^k - p_{s+1}^k \dots - p_{r-1}^k < (1 - p_s^k) \dots (1 - p_{r-1}^k) < 1 \quad (\text{A.11})$$

Multiplions la double inégalité (A.11) par la quantité positive ${}_r\Pi_m$, il vient d'après (A.10) :

$${}_r\Pi_m \left(1 - \sum_{i=s}^{r-1} p_i^k \right) < {}_s\Pi_m < {}_r\Pi_m \quad (\text{A.12})$$

En utilisant l'inégalité (A.8) établie plus haut, il est facile de donner une autre expression de la borne inférieure de ${}_s\Pi_m$ car :

$$\sum_{i=s}^{r-1} p_i^k < \sum_{j=1}^{r-s} A^k B^{kj} \quad (\text{A.13})$$

$$< \frac{A^k B^k (1 - B^{k(r-s)})}{(1 - B^k)} \quad (\text{A.14})$$

le second membre de (A.13) étant la somme des termes d'une progression géométrique de raison $B^k < 1$.

Dans ces conditions, lorsqu'on fait tendre s vers $-\infty$,

$$\sum_{-\infty}^{r-1} p_i^k < \frac{A^k B^k}{1 - B^k} \quad (\text{A.15})$$

et, de la double inégalité (A.12), on tire que quel que soit s :

$${}_r\Pi_m \left(1 - \frac{A^k B^k}{1 - B^k} \right) < {}_s\Pi_m < {}_r\Pi_m \quad (\text{A.16})$$

Il est aisé de donner à r une valeur telle que la quantité $A^k B^k / (1 - B^k)$, qui dépend de x_r par l'intermédiaire de A et B , soit inférieure à 1. La probabilité ${}_s\Pi_m$ étant bornée inférieurement par une valeur positive et décroissant lorsque $s \rightarrow -\infty$, elle possède donc une limite. On peut même se servir de l'inégalité A.16 pour savoir comment choisir x_r afin d'obtenir une approximation de cette limite de précision minimum fixée d'avance.

Exemples :

- 1) Cas le plus défavorable : $k = 1$; $\Delta = 0,125$
avec $x_r = -3$,

$$A = \frac{e^{-\frac{x_r^2}{2}}}{|x_r| \sqrt{2\pi}} \quad B = e^{\Delta x_r}$$

$$\frac{A^k B^k}{1 - B^k} = 3,25 \cdot 10^{-3}$$

d'où :

$$0,99625 \quad {}_r\Pi_m < \text{limite de } \Pi_m < {}_r\Pi_m$$

$$2) k = 1 ; \Delta = 1 ; x_r = -3$$

$$\frac{A^k - B^k}{1 - B^k} = 7,74 \cdot 10^{-5}$$

$$0,999922 {}_r\Pi_m < \text{limite de } \Pi_m < {}_r\Pi_m$$

$$3) k = 2 ; \Delta = 0,25 ; x_r = -3$$

$$\frac{A^k - B^k}{1 - B^k} = 6,27 \cdot 10^{-7}$$

Il apparaît donc que la convergence est très rapide, la convergence réelle étant d'ailleurs encore plus rapide que ne le montre notre calcul d'approximation qui n'est qu'assez grossier.

APPENDICE II

NOMBRE D'ÉPREUVES À EFFECTUER POUR LA REALISATION DE LA PROCEDURE

Ce nombre d'épreuves est aléatoire à double titre puisque, d'une part, le niveau d'arrêt S est aléatoire et que, d'autre part, même sachant que la procédure s'est arrêtée en S , le nombre d'épreuves à effectuer en un niveau donné est aussi aléatoire.

Le nombre total d'essais à effectuer apparaît donc comme étant la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.

On peut tourner la difficulté de ce problème en raisonnant à l'aide des probabilités conditionnelles à l'événement $S = x_m$.

On sait, en effet, que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire est égale à celle de son espérance mathématique conditionnelle.

En désignant par N le nombre aléatoire d'épreuves à effectuer, on a :

$$E(N) = E(E(N/S = x_m)) \quad (A.2.1)$$

et, pour la variance, une expression analogue :

$$D^2(N) = D^2(E(N/S = x_m)) + E(D^2(N/S = x_m)) \quad (A.2.2)$$

On peut donc obtenir $E(N)$ et $D^2(N)$ si l'on connaît

$$E(N/S = x_m) \quad \text{et} \quad D^2(N/S = x_m).$$

Pour que des essais soient effectués en un niveau x_j , il faut que ceux réalisés en x_{j-1} aient conduit à la décision de poursuivre la procédure, ainsi que ceux réalisés en x_{j-2} , x_{j-3} etc. . . jusqu'à x_r . Le fait d'atteindre le niveau x_j implique donc que parmi les, disons, l_r , l_{r+1} , . . . , l_{j-1} , essais effectués respectivement aux niveaux x_r , x_{r+1} , . . . , x_{j-1} le dernier ait toujours donné pour résultats $\bar{R}$.

D'après l'axiome des probabilités composées, la probabilité de cette suite d'événements est :

$$(p_r^{(l_r-1)} \cdot q_r) (p_{r+1}^{(l_{r+1}-1)} \cdot q_{r+1}) \dots (p_{j-1}^{(l_{j-1}-1)} \cdot q_{j-1}) \quad (A.2.3)$$

La probabilité que la suite des essais soit constituée de l_r essais en x_r , l_{r+1} en x_{r+1} etc. . . , l_{m-1} en x_{m-1} et, qu'en x_m , la procédure s'achève est donc, N_r , N_{r+1} , . . . , N_m désignant les nombres (aléatoires) d'essais en chaque niveau :

$$\Pr \{N_r = l_r, N_{r+1} = l_{r+1}, \dots, N_{m-1} = l_{m-1}, N_m = k\} = p_r^{l_r-1} q_r \dots p_{m-1}^{l_{m-1}-1} q_{m-1} p_m^k \quad (A.2.4)$$

Afin de condenser la notation, désignons par H l'événement ci-dessus et appliquons l'axiome des probabilités composées :

$$\Pr \{H\} = \Pr \{H/S = x_m\} \cdot \Pr \{S = x_m\} \quad (\text{A.2.5})$$

On en déduit $\Pr \{H/S = x_m\}$ en utilisant l'expression donnée dans le texte pour $\Pr \{S = x_m\}$ (éq. (3)) :

$$\Pr \{H/S = x_m\} = \frac{\prod_{j=r}^{j=m-1} (p_j^{l_j-1} q_j)}{\prod_{j=r}^{j=m-1} (1 - p_j^k)} \quad (\text{A.2.6})$$

L'équation (A.2.6) ci-dessus montre que la loi de probabilité conditionnelle à l'événement $S = x_m$ de l'ensemble des variables aléatoires $N_r, N_{r+1}, \dots, N_{m-1}$ est obtenue en formant le produit de leurs lois individuelles conditionnelles à la non-réalisation de k fois l'événement R en chacun des niveaux $x_r, x_{r+1}, \dots, x_m$:

$$\Pr \{H/S = x_m\} = \prod_{j=r}^{j=m-1} \left(\frac{p_j^{l_j-1} q_j}{1 - p_j^k} \right) \quad (\text{A.2.7})$$

Les variables $N_r, N_{r+1}, \dots, N_{m-1}$ considérées conditionnellement à l'événement $S = x_m$ sont donc indépendantes entre elles et en posant :

$$N = N_r + N_{r+1} + \dots + N_{m-1} + k \quad (\text{A.2.8})$$

on a, non seulement :

$$E(N/S = x_m) = \sum_{j=r}^{m-1} E(N_j/S = x_m) + k \quad (\text{A.2.9})$$

mais aussi :

$$D^2(N/S = x_m) = \sum_{j=r}^{j=m-1} D^2(N_j/S = x_m) \quad (\text{A.2.10})$$

De l'expression de la loi de probabilité conditionnelle de N_j :

$$\Pr \{N_j = l_j/S = x_m\} = \frac{p_j^{l_j-1} \cdot q_j}{1 - p_j^k} \quad (\text{A.2.11})$$

on tire :

$$E(N_j/S = x_m) = \frac{q_j}{1 - p_j^k} \sum_{l=1}^{l=k} l p_j^{(l-1)} \quad (\text{A.2.12})$$

et

$$E(N_j^2/S = x_m) = \frac{q_j}{1 - p_j^k} \sum_{l=1}^{l=k} l^2 p_j^{(l-1)} \quad (\text{A.2.13})$$

L'équation (A.2.12) permet le calcul de :

$$E(N/S = x_m) = \sum_{j=r}^{j=m-1} \frac{q_j}{1 - p_j^k} \sum_{l=1}^{l=k} l p_j^{(l-1)} + k \quad (\text{A.2.14})$$

puis de $E(N)$:

$$E(N) = k + \sum_{m=r}^{\infty} {}_r\Pi_m \sum_{j=r}^{j=m-1} \frac{q_j}{1 - p_j^k} \sum_{l=1}^{l=k} l p_j^{(l-1)} \quad (\text{A.2.15})$$

grâce aux probabilités ${}_r\Pi_m = \Pr \{X_r = x_m\}$.

De la même façon, on a d'abord

$$D^2(N_j/S = x_m) = E(N_j^2/S = x_m) - (E(N_j/S = x_m))^2$$

que l'on peut expliciter grâce à (A.2.12) et (A.2.13) puis :

$$D^2(N/S = x_m) = \sum_{j=r}^{m=1} D^2(N_j/S = x_m) \quad (\text{A.2.16})$$

et enfin, d'après (A.2.2) :

$$D^2(N) = \sum_{m=r}^{\infty} {}_r\Pi_m (E(N/S = x_m))^2 - (E(N))^2 + \sum_{m=r}^{\infty} {}_r\Pi_m D^2(N/S = x_m) \quad (\text{A.2.17})$$

SYMBOLES UTILISES DANS LES TABLEAUX A 1 A A 4 ET B

DELTA : Valeur du pas.

K : Nombre des réalisations recherchées de R au niveau d'arrêt.

ORG : Origine de l'échelle de pas DELTA.

E(S) : Espérance mathématique du niveau d'arrêt.

D(S) : Ecart-type du niveau d'arrêt.

M(S) : Mode du niveau d'arrêt.

PCT : Pourcentage moyen de réalisation de R en E(S).

Les tableaux A 1 à A 4 donnent E(S), D(S), M(S), PCT et les intervalles de confiance correspondant à trois niveaux de confiance pour diverses valeurs de DELTA, K et ORG. (DELTA = 0.5 et 1).

Le tableau B rassemble les résultats obtenus pour toutes les valeurs de DELTA étudiées avec ORG = 0.

Tableau A1

DELTA = 0.500									
K = 1									
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.250	-0.244	0.759	-0.250	40.3	LOW=-1.750 UP= 0.750	LOW=-1.750 UP= 1.250	LOW=-2.250 UP= 1.250		
-0.125	-0.244	0.759	-0.125	40.4	LOW=-1.625 UP= 0.875	LOW=-1.625 UP= 0.875	LOW=-2.125 UP= 1.375		
0.000	-0.244	0.758	0.000	40.4	LOW=-1.500 UP= 1.000	LOW=-2.000 UP= 1.000	LOW=-2.000 UP= 1.500		
0.125	-0.238	0.748	0.125	40.6	LOW=-1.375 UP= 1.125	LOW=-1.875 UP= 1.125	LOW=-1.875 UP= 1.125		
0.250	-0.235	0.744	-0.250	40.7	LOW=-1.750 UP= 0.750	LOW=-1.750 UP= 1.250	LOW=-2.250 UP= 1.250		
DELTA = 0.500									
K = 2									
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.250	0.479	0.635	0.750	68.4	LOW=-0.750 UP= 1.250	LOW=-0.750 UP= 1.750	LOW=-1.250 UP= 1.750		
-0.125	0.479	0.635	0.375	68.4	LOW=-0.625 UP= 1.375	LOW=-0.625 UP= 1.375	LOW=-1.125 UP= 1.875		
0.000	0.479	0.635	0.500	68.4	LOW=-0.500 UP= 1.500	LOW=-1.000 UP= 1.500	LOW=-1.000 UP= 2.000		
0.125	0.479	0.635	0.625	68.4	LOW=-0.375 UP= 1.625	LOW=-0.875 UP= 1.625	LOW=-0.875 UP= 1.625		
0.250	0.479	0.635	0.750	68.4	LOW=-0.750 UP= 1.250	LOW=-0.750 UP= 1.750	LOW=-1.250 UP= 1.750		
DELTA = 0.500									
K = 3									
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.250	0.824	0.580	0.750	79.5	LOW=-0.250 UP= 1.750	LOW=-0.250 UP= 1.750	LOW=-0.750 UP= 2.250		
-0.125	0.824	0.580	0.875	79.5	LOW=-0.125 UP= 1.875	LOW=-0.125 UP= 1.875	LOW=-0.625 UP= 1.875		
0.000	0.824	0.580	1.000	79.5	LOW= 0.000 UP= 1.500	LOW=-0.500 UP= 2.000	LOW=-0.500 UP= 2.000		
0.125	0.824	0.580	1.125	79.5	LOW=-0.375 UP= 1.625	LOW=-0.375 UP= 1.625	LOW=-0.375 UP= 2.125		
0.250	0.824	0.580	0.750	79.5	LOW=-0.250 UP= 1.750	LOW=-0.250 UP= 1.750	LOW=-0.750 UP= 2.250		

Tableau A2

DELTA = 0.500							
K = 4							
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98
-0.250	1.043	0.548	1.250	85.1	LOW= 0.250 UP= 1.750	LOW=-0.250 UP= 2.250	LOW=-0.250 UP= 2.250
-0.125	1.043	0.548	0.875	85.1	LOW= 0.375 UP= 1.875	LOW=-0.125 UP= 1.875	LOW=-0.125 UP= 2.375
0.000	1.043	0.548	1.000	85.1	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.000
0.125	1.043	0.548	1.125	85.1	LOW= 0.125 UP= 2.125	LOW= 0.125 UP= 2.125	LOW=-0.375 UP= 2.125
0.250	1.043	0.548	1.250	85.1	LOW= 0.250 UP= 1.750	LOW=-0.250 UP= 2.250	LOW=-0.250 UP= 2.250
DELTA = 0.500							
K = 5							
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98
-0.250	1.200	0.526	1.250	88.5	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW=-0.250 UP= 2.250
-0.125	1.200	0.526	1.375	88.5	LOW= 0.375 UP= 1.875	LOW= 0.375 UP= 2.375	LOW=-0.125 UP= 2.375
0.000	1.200	0.526	1.000	88.5	LOW= 0.500 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.500
0.125	1.199	0.525	1.125	88.5	LOW= 0.125 UP= 2.125	LOW= 0.125 UP= 2.125	LOW= 0.125 UP= 2.125
0.250	1.200	0.526	1.250	88.5	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW=-0.250 UP= 2.250
DELTA = 0.500							
K = 6							
ORG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98
-0.250	1.320	0.509	1.250	90.7	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250
-0.125	1.321	0.509	1.375	90.7	LOW= 0.375 UP= 1.875	LOW= 0.375 UP= 2.375	LOW= 0.375 UP= 2.375
0.000	1.321	0.509	1.500	90.7	LOW= 0.500 UP= 2.000	LOW= 0.500 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.500
0.125	1.320	0.509	1.125	90.7	LOW= 0.625 UP= 2.125	LOW= 0.125 UP= 2.125	LOW= 0.125 UP= 2.625
0.250	1.320	0.509	1.250	90.7	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250

Tableau A3

DELTA = 1.000							K = 1	
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCI	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98	
-0.500	0.272	0.893	0.500	60.7	LOW=-1.500 UP= 1.500	LOW=-1.500 UP= 1.500	LOW=-1.500 UP= 2.500	
-0.250	0.273	0.893	0.750	60.7	LOW=-1.250 UP= 1.750	LOW=-1.250 UP= 1.750	LOW=-2.250 UP= 1.750	
0.000	0.273	0.893	0.000	60.7	LOW=-1.000 UP= 2.000	LOW=-1.000 UP= 2.000	LOW=-2.000 UP= 2.000	
0.250	0.281	0.876	0.250	61.1	LOW=-0.750 UP= 1.250	LOW=-1.750 UP= 2.250	LOW=-1.750 UP= 2.250	
0.500	0.291	0.866	0.500	61.4	LOW=-1.500 UP= 1.500	LOW=-1.500 UP= 1.500	LOW=-1.500 UP= 2.500	
DELTA = 1.000							K = 2	
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCI	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98	
-0.500	0.925	0.763	0.500	82.3	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	
-0.250	0.927	0.765	0.750	82.3	LOW=-0.250 UP= 1.750	LOW=-0.250 UP= 2.750	LOW=-1.250 UP= 2.750	
0.000	0.928	0.765	1.000	82.3	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW=-1.000 UP= 2.000	LOW=-1.000 UP= 2.000	
0.250	0.918	0.756	1.250	82.1	LOW=-0.750 UP= 2.250	LOW=-0.750 UP= 2.250	LOW=-0.750 UP= 2.250	
0.500	0.925	0.762	0.500	82.3	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	
DELTA = 1.000							K = 3	
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCI	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98	
-0.500	1.236	0.704	1.500	89.2	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	
-0.250	1.242	0.708	1.750	89.3	LOW=-0.250 UP= 2.750	LOW=-0.250 UP= 2.750	LOW=-0.250 UP= 2.750	
0.000	1.243	0.710	1.000	89.3	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 3.000	
0.250	1.217	0.695	1.250	88.8	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW=-0.750 UP= 2.250	
0.500	1.236	0.704	1.500	89.2	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	LOW=-0.500 UP= 2.500	

Tableau A4

DELTA = 1.000									
K = 4									
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.500	1.429	0.669	1.500	92.3	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		
-0.250	1.441	0.674	1.750	92.5	LOW= 0.750 UP= 2.750	LOW=-0.250 UP= 2.750	LOW=-0.250 UP= 2.750		
0.000	1.444	0.677	1.000	92.6	LOW= 0.000 UP= 2.000	LOW= 0.000 UP= 3.000	LOW= 0.000 UP= 3.000		
0.250	1.396	0.663	1.250	91.9	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250		
0.500	1.429	0.669	1.500	92.3	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		
DELTA = 1.000									
K = 5									
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.500	1.563	0.648	1.500	94.1	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		
-0.250	1.582	0.651	1.750	94.3	LOW= 0.750 UP= 2.750	LOW= 0.750 UP= 2.750	LOW=-0.250 UP= 2.750		
0.000	1.569	0.654	2.000	94.4	LOW= 1.000 UP= 3.000	LOW= 0.000 UP= 3.000	LOW= 0.000 UP= 3.000		
0.250	1.514	0.646	1.250	93.5	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250		
0.500	1.563	0.648	1.500	94.1	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		
DELTA = 1.000									
K = 6									
URG	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	INT. DE CONF. A 0.90	INT. DE CONF. A 0.95	INT. DE CONF. A 0.98		
-0.500	1.663	0.634	1.500	95.2	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		
-0.250	1.691	0.635	1.750	95.5	LOW= 0.750 UP= 2.750	LOW= 0.750 UP= 2.750	LOW= 0.750 UP= 2.750		
0.000	1.700	0.637	2.000	95.5	LOW= 1.000 UP= 3.000	LOW= 1.000 UP= 3.000	LOW= 0.000 UP= 3.000		
0.250	1.595	0.642	1.250	94.5	LOW= 1.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250	LOW= 0.250 UP= 2.250		
0.500	1.663	0.634	1.500	95.2	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500	LOW= 0.500 UP= 2.500		

PROPRIETES STATISTIQUES DU NIVEAU D'ARRET

	DELTA	E(S)	D(S)	M(S)	PCT	0.90		0.95		0.98	
						LOW	UP	LOW	UP	LOW	UP
K = 1	0.125	-1.045	0.585	-0.875	14.8	-2.125	-0.125	-2.375	0.000	-2.625	0.125
	0.250	-0.673	0.661	-0.500	25.0	-1.750	0.250	-2.000	0.500	-2.500	0.750
	0.500	-0.244	0.758	0.000	40.4	-1.500	1.000	-2.000	1.000	-2.000	1.500
	1.000	0.273	0.893	0.000	60.7	-1.000	2.000	-1.000	2.000	-2.000	2.000
	1.500	0.641	1.005	0.000	73.9	-1.500	1.500	-1.500	3.000	-1.500	3.000
K = 2	0.125	-0.192	0.480	-0.125	42.4	-1.000	0.500	-1.250	0.625	-1.500	0.750
	0.250	0.116	0.546	0.250	54.6	-0.750	1.000	-1.000	1.000	-1.250	1.250
	0.500	0.479	0.635	0.500	68.4	-0.500	1.500	-1.000	1.500	-1.000	2.000
	1.000	0.928	0.765	1.000	82.3	0.000	2.000	-1.000	2.000	-1.000	2.000
	1.500	1.257	0.871	1.500	89.6	0.000	3.000	0.000	3.000	0.000	3.000
K = 3	0.125	0.213	0.430	0.250	58.4	-0.500	0.875	-0.750	1.000	-0.875	1.125
	0.250	0.492	0.493	0.500	68.9	-0.250	1.250	-0.500	1.500	-0.750	1.500
	0.500	0.824	0.580	1.000	79.5	0.000	1.500	-0.500	2.000	-0.500	2.000
	1.000	1.243	0.710	1.000	89.3	0.000	2.000	0.000	2.000	0.000	3.000
	1.500	1.555	0.806	1.500	94.0	0.000	3.000	0.000	3.000	0.000	3.000
K = 4	0.125	0.466	0.400	0.500	68.0	-0.250	1.125	-0.375	1.125	-0.625	1.250
	0.250	0.728	0.462	0.750	76.7	0.000	1.500	-0.250	1.500	-0.500	1.750
	0.500	1.043	0.548	1.000	85.1	0.000	2.000	0.000	2.000	0.000	2.000
	1.000	1.444	0.677	1.000	92.6	0.000	2.000	0.000	3.000	0.000	3.000
	1.500	1.742	0.769	1.500	95.9	0.000	3.000	0.000	3.000	0.000	3.000
K = 5	0.125	0.647	0.380	0.750	74.1	0.000	1.250	-0.125	1.375	-0.375	1.500
	0.250	0.897	0.441	1.000	81.5	0.250	1.500	0.000	1.750	-0.250	1.750
	0.500	1.200	0.526	1.000	88.5	0.500	2.000	0.000	2.000	0.000	2.500
	1.000	1.589	0.654	2.000	94.4	1.000	3.000	0.000	3.000	0.000	3.000
	1.500	1.872	0.754	1.500	96.9	1.500	3.000	0.000	3.000	0.000	3.000

Tableau C

NUMBRE MOYEN D EPROUVETTES NECESSAIRES A LA REALISATION DE LA METHODE

	K = 1		K = 2		K = 3		K = 4		K = 5		K = 6	
	E(N)	D(N)	E(N)	D(N)	E(N)	D(N)	E(N)	D(N)	E(N)	D(N)	E(N)	D(N)
DELTA	16.64	4.67	26.51	5.02	33.32	5.88	39.06	6.86	44.25	7.88	49.10	8.91
0.125	10.31	2.64	15.80	3.03	19.88	3.69	23.45	4.41	26.75	5.14	29.87	5.87
0.250	6.51	1.51	9.80	1.88	12.43	2.39	14.81	2.91	17.06	3.44	19.22	3.96
0.500	4.27	0.89	6.43	1.21	8.28	1.59	10.00	1.97	11.66	2.35	13.27	2.73
1.000	3.43	0.66	5.20	0.94	6.76	1.26	8.24	1.58	9.65	1.91	11.03	2.24

DELTA = PAS UTILISE DANS L EXPERIENCE

E(N) = VALEUR MOYENNE DU NUMBRE D EPROUVETTES NECESSAIRES A L EXPERIENCE

D(N) = ECART-TYPE DE CE NUMBRE

TABLEAU D
Valeurs du produit D^2 (S) E (N) selon k et Δ

$\Delta \backslash k$	0,125	0,250	0,500	1	1,5
1	5,69	4,50	3,74	3,40	3,46
2	6,11	4,71	3,95	3,76	3,94
3	6,16	4,83	4,18	4,17	4,39
4	6,25	5,00	4,45	4,58	4,87
5	6,39	5,20	4,72	4,99	5,49
6	6,54	5,39	4,98	5,38	6,25