

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J.-L. MALLET

Interpolation en μ - moyenne quadratique

Revue de statistique appliquée, tome 23, n° 2 (1975), p. 61-86

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1975__23_2_61_0>

© Société française de statistique, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION EN μ - MOYENNE QUADRATIQUE

J.-L. MALLET

Ecole Nationale Supérieure de Géologie Appliquée
et de Prospection Minière (Nancy)

Centre de Recherche Pétrographique
et Géochimique (Nancy)

I – PRESENTATION DE L'INTERPOLATION EN μ -MOYENNE QUADRATIQUE

I.1 – Problème posé

Soit d'une part t_0 un point fixé dans $\mathbb{R}^n$ et T un ensemble fini de N points $t_i \in \mathbb{R}^n$:

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

Soit d'autre part F une fonction (réelle ou complexe) définie (donc bornée) sur $(T \cup t_0)$ et connue seulement par ses valeurs numériques $F(t_i)$ sur l'ensemble T . Nous nous proposons de trouver une valeur $\hat{F}(t_0)$ approchant la valeur inconnue $F(t_0)$ en un certain sens à définir de telle façon que l'on ait :

$$t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}(t_0) = F(t_0)$$

Ce problème, qui possède a priori une infinité de solutions lorsque t_0 n'appartient pas à T , ne peut évidemment être résolu que moyennant un certain nombre d'hypothèses "a priori". C'est en essayant de limiter au maximum ces hypothèses que nous avons été conduits à imaginer la méthode d'interpolation en μ -moyenne quadratique dont le principe est directement inspiré de la méthode des filtres autorégressifs.

Pour cette raison et afin de bien préciser les motivations qui nous ont amené à concevoir cette méthode d'interpolation, nous pensons qu'il n'est pas inutile de donner (sans démonstrations) une présentation rapide de la technique des filtres autorégressifs en insistant sur les points qui ont retenu notre attention.

I. 2 – Méthode des filtres autorégressifs

Remarque préliminaire

La fonction F étant fixée, on peut toujours trouver un espace probabilisé

(1) Article remis en Décembre 1973, révisé en Juillet 1974

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une fonction aléatoire $f(\omega, t)$ définie sur $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$ de façon à posséder les propriétés (f1) et (f2) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(f1)} \quad \forall t \in (T \cup t_0) : E\{|f(\omega, t)|^2\} < +\infty \\ \text{(f2)} \quad \exists \omega_0 \in \Omega : \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow f(\omega_0, t) = F(t) \end{array} \right.$$

Par exemple, si nous choisissons $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_M\} \\ \mathcal{A} = \text{ensemble des parties de } \Omega \end{array} \right.$$

... alors l'application $f(\omega, t)$ définie sur $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$ par les relations (f1') et (f2') ci-dessous est effectivement une fonction aléatoire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(f1')} \quad \forall \omega \in \Omega : f(\omega, \cdot) = \text{fonction bornée sur } (T \cup t_0) \\ \text{(f2')} \quad \forall t \in (T \cup t_0) : f(\omega_0, t) = F(t) \end{array} \right.$$

De plus, compte tenu de la relation (f2'), cette fonction aléatoire vérifie effectivement la propriété (f2) et la propriété (f1) est également vérifiée car d'après la relation (f1') on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in (T \cup t_0) : E\{|f(\omega, t)|^2\} &= \int_{\Omega} |f(\omega, t)|^2 \cdot P(d\omega) \\ &\leq \sup_{t \in (T \cup t_0)} \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega, t)|^2 < +\infty \end{aligned}$$

Ceci dit, il est important de remarquer pour la suite de l'exposé que la propriété (f1) implique pour $f(\omega, t)$ l'existence sur $(T \cup t_0)$ d'une fonction moyenne Φ_f et d'une fonction de covariance Γ_{ff} telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) : \Phi_f(t) = E\{f(\omega, t)\} \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} : \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = E\{f(\omega, t_1) \cdot \overline{f(\omega, t_2)}\} \end{array} \right.$$

Cela implique également l'existence de la fonction de covariance centrée Γ_{ff}^c définie de la façon suivante :

$$\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \Gamma_{ff}(t_1, t_2) - \Phi_f(t_1) \cdot \overline{\Phi_f(t_2)}$$

Définition

Soit d'une part $f(\omega, t)$ une fonction aléatoire vérifiant les propriétés (f1) et (f2) définies au paragraphe précédent, et soit d'autre part $\{U_0^c, U_1^c, \dots, U_N^c\}$ un ensemble de $(N + 1)$ variables aléatoires centrées telles que :

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0^c(\omega) = f(\omega, t_0) - \Phi_f(t_0) \\ U_1^c(\omega) = f(\omega, t_1) - \Phi_f(t_1) \\ \vdots \\ U_N^c(\omega) = f(\omega, t_N) - \Phi_f(t_N) \end{array} \right.$$

Soit enfin $[\Gamma^c]$ la matrice carrée à N lignes et N colonnes définie de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\Gamma^c] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix} \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} t_i \in T \\ t_j \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}^c(t_i, t_j) \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si $[\Gamma^c]$ est inversible, alors il existe une régression linéaire $\hat{U}_0^c$ (au sens des moindres carrés) de la variable aléatoire U_0^c en fonction des N variables aléatoires $\{U_1^c, \dots, U_N^c\}$ et, par définition, on appelle interpolation de F au point t_0 au sens des filtres autorégressifs la valeur numérique $\hat{F}(t_0)$ telle que :

$$\hat{F}(t_0) = \Phi_f(t_0) + \hat{U}_0^c(\omega_0)$$

Construction de $\hat{F}(t_0)$

Si nous posons . . .

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_i \in (T \cup t_0) \\ t_j \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}^c(t_i, t_j)$$

. . . alors, d'après la théorie de la régression linéaire, nous savons que la variable aléatoire $\hat{U}_0^c$ vérifie les relations suivantes :

$$(\Lambda 1) \quad \hat{U}_0^c = \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot U_i^c$$

$$(\Lambda 2) \quad : \quad E\{|U_0^c - \hat{U}_0^c|^2\} = \min_{\{\lambda^i\}_{i=1}^N} E\{|U_0^c - \sum_{i=1}^N \lambda^i \cdot U_i^c|^2\}$$

$$(\Lambda 3) \quad : \quad E\{\hat{U}_0^c\} = E\{U_0^c\} = 0$$

$$(\Lambda 4) \quad : \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix}}_{[\Gamma^c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\lambda}^1(t_0) \\ \hat{\lambda}^2(t_0) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}^N(t_0) \end{bmatrix}}_{[\hat{\Lambda}(t_0)]} = \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^c \\ \Gamma_{02}^c \\ \vdots \\ \Gamma_{0N}^c \end{bmatrix}$$

$$(\Lambda 5) \quad : \quad E\{|U_0^c - \hat{U}_0^c|^2\} = \Gamma_{00}^c - \overline{[\hat{\Lambda}(t_0)]^t} \cdot [\Gamma^c] \cdot [\hat{\Lambda}(t_0)]$$

De plus, compte-tenu de la définition de Γ_{ij}^c , on déduit que les coefficients $\{\hat{\lambda}^i(t_0)\}_{i=1}^N$ solution de l'équation (Λ4) sont tels que l'on ait :

$$(\Lambda 6) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} t_0 \in T \\ [\Gamma^c] \text{ inversible} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}^i(t_0) = 1 \text{ si } t_0 = t_i \\ \hat{\lambda}^i(t_0) = 0 \text{ si } t_0 \neq t_i \end{array} \right\}$$

En se souvenant que par construction on a . . .

$$\forall i = (0, 1, \dots, N) \quad : \quad U_i^c(\omega_0) = F(t_i) - \Phi_f(t_i)$$

. . . il s'en suit que l'on peut écrire :

$$(F1) \quad : \quad \hat{F}(t_0) = \Phi_f(t_0) + \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot \{F(t_i) - \Phi_f(t_i)\}$$

$$(F2) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} t_0 \in T \\ [\Gamma^c] \text{ inversible} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t_0) = F(t_0)$$

Nous sommes alors en mesure d'affirmer, grâce à la relation (F2), que la méthode d'estimation de $F(t_0)$ au sens des filtres autorégressifs est effectivement une méthode d'interpolation au sens habituel du terme.

I.3 – Mise en oeuvre de la méthode des filtres autorégressifs

Introduction

D'après ce que nous venons de voir, la méthode des filtres autorégressifs ne peut être mise en oeuvre que si l'on connaît a priori la moyenne Φ_f et la fonction de covariance relatives à la fonction aléatoire $f(\omega, t)$ ce qui n'est pratiquement jamais le cas dans les applications courantes. Pour sortir de cette impasse, on est contraint de formuler "a priori" un certain nombre d'hypothèses :

Hypothèses (H1)

Généralement, on suppose tout d'abord que $f(\omega, t)$ est ergodique du second ordre et vérifie de ce fait, quels que soient t, t_1 et t_2 appartenant à $(T \cup t_0)$, les relations suivantes où B_ρ est une boule de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, de rayon ρ et de volume $|B_\rho|$:

$$\forall \omega_0 \in \Omega : \left\{ \begin{array}{l} \Phi_f(t) = \int_{\Omega} f(\omega, t) \cdot P(d\omega) \\ \\ = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(\omega_0, t+s) ds \\ \\ = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(t+s) ds \\ \\ \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot \overline{f(\omega, t_2)} \cdot P(d\omega) \\ \\ = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(\omega_0, t_1+s) \cdot \overline{f(\omega_0, t_2+s)} \cdot ds \\ \\ = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(t_1+s) \cdot \overline{F(t_2+s)} \cdot ds \end{array} \right.$$

L'hypothèse d'ergodicité du second ordre (H1) n'est généralement passufisante elle seule pour permettre de déterminer les fonctions $\Phi_f(t)$ et $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$ aussi est-on conduit à la compléter par une nouvelle série d'hypothèses (H2) ou (H2') :

Hypothèses (H2)

En deuxième hypothèse, il est classique de supposer que $f(\omega, t)$ est stationnaire du second ordre, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $|\sigma_f|^2$ et Φ_f ainsi qu'une fonction γ de type positif définie sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \Phi_f(t) = \Phi_f \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |\sigma_f|^2 \cdot \gamma(t_1 - t_2) + |\Phi_f|^2 \\ \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \Gamma_{ff}(t, t) = |\sigma_f|^2 + |\Phi_f|^2 \end{array} \right.$$

Compte-tenu de l'ergodicité du second ordre de $f(\omega, t)$, cela implique en particulier que l'on ait :

$$\Phi_f = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(s) ds$$

$$|\sigma_f|^2 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} |F(s)|^2 ds - |\Phi_f|^2$$

Ceci dit, si nous posons . . .

$$\Phi_f^* = \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} F(t_i)$$

$$|\sigma_f^*|^2 = \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} |F(t_i)|^2 - |\Phi_f^*|^2$$

. . . on peut alors utiliser la méthode des filtres autorégressifs en supposant comme dernière hypothèse que l'on a :

$$\forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \Phi_f(t) = \Phi_f^*$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |\sigma_f^*|^2 \cdot \gamma(t_1 - t_2) + |\Phi_f^*|^2$$

Hypothèse (H2')

L'ergodicité du second ordre étant admise, il existe de nombreuses façons de formuler des hypothèses complémentaires, et si les hypothèses (H2) sont les plus fréquemment utilisées par les praticiens de la méthode, il ne faut pas perdre de vue qu'il existe d'autres possibilités. Par exemple, imaginons que l'on connaisse une première approximation F^* de la fonction F , et soit B une boule de volume $|B|$ centrée à l'origine ; si nous posons. . .

$$\forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \Phi_f^*(t) = \frac{1}{|B|} \int_B F^*(t+s) ds$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{|B|} \int_B F^*(t_1+s) \cdot \overline{F^*(t_2+s)} \cdot ds$$

... alors, nous réserve que le rayon de B soit "suffisamment grand"; on peut utiliser la technique des filtres autorégressifs en admettant comme dernière hypothèse que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \Phi_f(t) = \Phi_f^*(t) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \Gamma_{ff}^*(t_1, t_2) \end{array} \right.$$

I.4 – Motivations et principe de l'interpolation en μ -moyenne quadratique

Il faut bien comprendre que le problème posé au départ, à savoir "trouver une valeur numérique $\hat{F}(t_0)$ interpolant F au point t_0 " possède a priori une infinité de solutions puisqu'en l'absence d'information complémentaire, il existe a priori une infinité de fonctions F prenant des valeurs identiques sur l'ensemble T des N points d'échantillonnage. Etant donné qu'il n'existe aucun procédé générateur d'information en dehors des procédés de mesure des valeurs $F(t_i)$ en des points $t_i \in \mathbb{R}^n$, il est absolument nécessaire de formuler "a priori" un certain nombre d'hypothèses si l'on veut pouvoir calculer une solution $\hat{F}(t_0)$ particulière ; l'hypothèse d'ergodicité de $f(\omega, t)$ est une façon de procéder qui, dans les applications pratiques, donne souvent de bons résultats malgré la brutalité du principe qui consiste en fait à supposer que les moyennes statistiques sortant sur la variable ω sont identiques aux moyennes spatiales portant sur la variable t .

En réfléchissant sur les implications de l'ergodicité, on est tout naturellement conduit à se demander s'il n'est pas possible de choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f(\omega, t)$ de telle façon que la variable ω et la variable t aient effectivement un rôle symétrique. La réponse à cette question est positive si F est définie, continue et bornée sur⁽¹⁾ $[(T \cup t_0) + \Omega]$ et si on pose :

$$(f3) : \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \text{partie de } \mathbb{R}^n \text{ contenant l'origine } \theta_{\mathbb{R}^n} \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_{\Omega} = \text{tribu borélienne de } \Omega \\ P \equiv \mu = \text{mesure positive normée sur } (\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t \in (T \cup t_0) \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} : f(\omega, t) = F(t + \omega) \end{array} \right.$$

En effet, comme nous le verrons au paragraphe II, l'application $f(\omega, t)$ ainsi définie est effectivement une fonction aléatoire définie sur $[(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \times (T \cup t_0)]$ et vérifiant la propriété (f1) :

$$\forall t \in (T \cup t_0) \quad : \quad E\{|f(\omega, t)|^2\} < +\infty$$

(1) A et B étant des parties de $\mathbb{R}^n$, nous désignerons par $C = (A + B)$ l'ensemble des points c de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$c \in (A + B) \Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} a \in A \\ b \in B \end{array} \right\} : c = a + b$$

Comme d'autre par en posant $\omega_0 = \theta_{\mathbf{R}^n}$ on a bien...

$$\exists (\omega_0 = \theta_{\mathbf{R}^n}) \in \Omega : \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow f(\omega_0, t) = F(t + \theta_{\mathbf{R}^n}) = F(t)$$

... il s'en suit que $f(\omega, t)$ vérifie également la propriété (f2) et que l'on peut par conséquent appliquer la méthode des filtres autorégressifs pour estimer F au point t_0 . On remarquera alors que pour ce faire, il n'est plus nécessaire de supposer l'ergodicité de $f(\omega, t)$ puisque cette fonction jouit d'une propriété tout à fait analogue :

$$\left[\begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) : \Phi_f(t) = \int_{\Omega} f(\omega, t) \cdot P(d\omega) \\ = \int_{\Omega} F(t + \omega) \cdot \mu(d\omega) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} : \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot \overline{f(\omega, t_2)} \cdot P(d\omega) \\ \phantom{\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} :} = \int_{\Omega} F(t_1 + \omega) \cdot \overline{F(t_2 + \omega)} \cdot \mu(d\omega) \end{array} \right.$$

En fait, on s'aperçoit qu'en choisissant $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f(\omega, t)$ suivant les relations (f3) on remplace par des "μ-moyennes mobiles" toutes les "espérances mathématiques" intervenant dans la théorie des filtres autorégressifs. Pour cette raison, nous proposons d'appeler interpolation en μ-moyenne quadratique", ce particulier d'interpolation au sens des filtres autorégressifs.

I.5. — Conclusion

Nous venons de montrer que la méthode d'interpolation en μ-moyenne quadratique possède l'avantage de supprimer l'hypothèse (H1) d'ergodicité du second ordre de $f(\omega, t)$. Cela n'est pas dénué d'intérêt compte tenu de l'impossibilité pratique de contrôler cette hypothèse dans les applications courantes.

Ceci dit, il nous reste maintenant à donner un certain nombre de justifications et de propriétés spécifiques de l'interpolation en μ-moyenne quadratique, ce à quoi nous allons nous attacher dans ce qui suit :

II — JUSTIFICATIONS THEORIQUES DE L'INTERPOLATION EN μ-MOYENNE QUADRATIQUE

II.1. — Introduction

A partir de maintenant, nous supposons que F est effectivement une fonction définie, continue et bornée sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ et nous supposons également que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f(\omega, t)$ ont été choisis suivant les relations (f3) présentées au paragraphe I.4.

1) Nous nous proposons dans ce qui suit, de montrer tout d'abord que :

— L'application $f(\omega, t)$ est effectivement une fonction aléatoire définie sur $[(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \times (T \cup t_0)]$

— La fonction aléatoire $f(\omega, t)$ qui vérifie de façon évidente la propriété (f2) (cf. I.4) vérifie également la propriété (f1) et peut donc être utilisée pour mettre en œuvre la méthode des filtres autorégressifs.

2) Dans un deuxième temps, nous montrerons dans quelle mesure Γ_{ff}^c et Φ_{ff} sont voisines de $\Gamma_{f^*f^*}^c$ et $\Phi_{f^*f^*}$ lorsque les fonctions associées F et F^* sont voisines sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ au sens de la distance de la convergence uniforme. Ce dernier point est particulièrement important dans les applications pratiques puisqu'il justifie la technique consistant à poser par hypothèse que l'on a :

$$\begin{cases} \Gamma_{ff}^c \equiv \Gamma_{f^*f^*}^c \\ \Phi_{ff} \equiv \Phi_{f^*f^*} \end{cases}$$

II.2. — Proposition 1

Enoncé

L'application $f(\omega, t)$ associée à F suivant les relations (f3) est une fonction aléatoire définie sur $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$ et vérifiant les relations (f1) et (f2).

Démonstration : première partie

Soit $\mathcal{B}_c$ la tribu borélienne du corps des complexes $\mathbf{C}$; on démontre en calcul des probabilités qu'une application $f(\omega, t)$ définie sur $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$ est une fonction aléatoire si et seulement si $f(\cdot, t)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{C}, \mathcal{B}_c)$ pour tout t fixé dans $(T \cup t_0)$.

Ceci étant dit, si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $f(\omega, t)$ sont définis suivant les relations (f3), il est évident que quel que soit t fixé dans $(T \cup t_0)$, l'application $f(\cdot, t)$ est continue de Ω dans $\mathbf{C}$ puisque F est continue sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ et que l'on a :

$$\forall \begin{cases} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{cases} : f(\omega, t) = F(t + \omega)$$

Comme d'autre part, d'après les mêmes relations (f3) on a posé $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega$ il s'en suit que pour tout $t \in (T \cup t_0)$, l'application $f(\cdot, t)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{C}, \mathcal{B}_c)$ en tant qu'application continue de Ω dans $\mathbf{C}$.

Compte tenu de tout ce qui vient d'être dit, on est donc assuré que $f(\omega, t)$ est bien une fonction aléatoire définie sur $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$

Démonstration : deuxième partie

D'après les relations (f3), on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} t \in (T \cup t_0) : E |f(\omega, t)|^2 &= \int_{\Omega} |F(t + \omega)|^2 \cdot \mu(d\omega) \\ &\leq \sup_{\omega \in \Omega} |F(t + \omega)|^2 \cdot \mu(\Omega) \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que par hypothèse la fonction F est continue et bornée sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ et que $\mu(\Omega) = 1$, ce qui nous permet de conclure que $f(\omega, t)$ vérifie la relation (f1) :

$$\forall t \in (T \cup t_0) : E\{|f(\omega, t)|^2\} < +\infty$$

Comme on a déjà remarqué au paragraphe (1-4) que $f(\omega, t)$ vérifie également la relation (f2), on est finalement assuré que cette fonction aléatoire vérifie bien les relations (f1) et (f2) comme cela avait été dit dans l'énoncé de la proposition.

II.3. — Proposition 2

Enoncé

Soient F et F^* deux fonctions continues et bornées sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ et soient $f(\omega, t)$ et $f^*(\omega, t)$ les deux fonctions aléatoires associées définies de la façon suivante où S désigne l'ensemble $(T \cup t_0)$:

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} f(\omega, t) = F(t + \omega) \\ f^*(\omega, t) = F^*(t + \omega) \end{array} \right.$$

Si nous posons . . .

$$\epsilon = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)|$$

. . . alors quels que soient t, t_1 et t_2 appartenant à S , on a :

$$\left[\begin{array}{l} 1) |\Phi_{f^*}(t) - \Phi_f(t)| \leq \epsilon \\ 2) |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\} \\ 3) |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\} \end{array} \right.$$

Démonstration

Compte tenu des définitions posées dans l'énoncé de la proposition, on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} \forall t \in S : |\Phi_{f^*}(t) - \Phi_f(t)| &= \left| \int_{\Omega} \{F^*(t + \omega) - F(t + \omega)\} \cdot \mu(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)| \cdot \mu(d\omega) \\ &\leq \sup_{\omega \in \Omega} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)| \cdot \mu(\Omega) \end{aligned}$$

En définitive, puisque $\mu(\Omega) = 1$, on a donc :

$$\forall t \in S : |\Phi_{f^*}(t) - \Phi_f(t)| \leq \epsilon \quad (1)$$

Ceci étant dit, afin d'alléger les notations, nous poserons dans tout ce qui suit :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} G(\omega, t) = F(t + \omega) - \Phi_f(t) \\ G^*(\omega, t) = F^*(t + \omega) - \Phi_{f^*}(t) \\ \Delta(\omega, t) = G^*(\omega, t) - G(\omega, t) \end{array} \right.$$

Compte tenu de la relation (1) et de la définition de ϵ , on peut donc écrire les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, t) &= \{F^*(t + \omega) - F(t + \omega)\} - \{\Phi_{f^*}(t) - \Phi_f(t)\} \\ \Rightarrow \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |\Delta(\omega, t)| &\leq \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)| \\ &\quad + \sup_{t \in S} |\Phi_{f^*}(t) - \Phi_f(t)| \\ \Rightarrow \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |\Delta(\omega, t)| &\leq 2\epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

D'autre part, les égalités ci-dessous sont toujours vérifiées :

$$\begin{aligned} \{G^*(\omega, t_1) \cdot \overline{G^*(\omega, t_2)} - G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)}\} &= \\ = \{G(\omega, t_1) + \Delta(\omega, t_1)\} \cdot \overline{\{G(\omega, t_2) + \Delta(\omega, t_2)\}} &= \\ - \{G(\omega, t_1) + \overline{G(\omega, t_2)}\} &= \\ = G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} + G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} &= \\ + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} &= \\ - G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} &= \\ \Rightarrow \{G^*(\omega, t_1) \cdot \overline{G^*(\omega, t_2)} - G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)}\} &= G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \\ &\quad + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} \\ &\quad + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \end{aligned}$$

Comme il est évident que l'on a . . .

$$\begin{aligned} \Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) &= \int_{\Omega} [\{G^*(\omega, t_1) \cdot \overline{G^*(\omega, t_2)}\} \\ &\quad - \{G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)}\}] \cdot \mu(d\omega) \end{aligned}$$

. . . il s'en suit que l'on peut écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| &\leq \left| \int_{\Omega} G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right| \\
 &+ \left| \int_{\Omega} \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right| \\
 &+ \left| \int_{\Omega} \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) &| \\
 &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |G(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \\
 &+ \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |G(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \\
 &+ \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)}
 \end{aligned}$$

Comme d'autre part $\mu(\Omega) = 1$, on peut donc écrire d'après la relation (2) et d'après la définition de $G(\omega, t)$ et $\Gamma_{ff}^c(t, t)$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\Delta(\omega, t)|^2 \cdot \mu(d\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\Delta(\omega, t)|^2 \cdot \mu(\Omega) \leq \{2\epsilon\}^2 \\ \int_{\Omega} |G(\omega, t)|^2 \cdot \mu(d\omega) = \Gamma_{ff}^c(t, t) \end{cases}$$

On en conclut que pour tout $t_1 \in S$ et tout $t_2 \in S$, on a :

$$|\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\}$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on peut montrer que l'on a :

$$|\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\}$$

III. - MISE EN OEUVRE DE L'INTERPOLATION EN μ -MOYENNE QUADRATIQUE

III.1. - Technique d'interpolation

Définition

Soit d'une part T un ensemble de N points $t_i \in \mathbb{R}^n$, et soit $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive normée et Ω une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine $\theta_{\mathbb{R}^n}$; dans ces conditions, une fonction F continue et bornée sur $[(T \cup t_0) + \Omega]$ sera dite T -interpolable en μ -moyenne quadratique au point $t_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

- 1) La fonction F est connue numériquement sur T
- 2) On connaît sur $(T \cup t_0)$ et $(T \cup t_0) \times (T \cup t_0)$ respectivement la fonction moyenne Φ_f et la fonction de covariance Γ_{ff} telles que :

$$\forall t \in (T \cup t_0) : \Phi_f(t) = \int_{\Omega} F(t + \omega) \cdot \mu(d\omega)$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} : \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} F(t_1 + \omega) \cdot \overline{F(t_2 + \omega)} \cdot \mu(d\omega)$$

- 3) La matrice $[\Gamma^c]$ définie ci-dessous est inversible :

$$[\Gamma^c] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix}$$

avec : $\forall \left\{ \begin{array}{l} t_i \\ t_j \end{array} \right\} \in T : \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}(t_i, t_j)$

Mise en oeuvre de la technique

Imaginons que l'on désire interpoler en un point $t_0 \in \mathbb{R}^n$ une fonction F continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ et supposée connue sur un ensemble T de N points. Si t_0 n'appartient pas à T , il existe évidemment une infinité de solutions à ce problème et l'on doit impérativement formuler des hypothèses pour extraire de cette infinité une solution satisfaisante.

Supposons d'une part que F soit T -interpolable en μ -moyenne quadratique au point t_0 et supposons d'autre part que l'on connaisse une fonction F^* elle-même T -interpolable en μ -moyenne quadratique au point t_0 . Dans ces conditions

si l'on admet que F^* est une première approximation de F , alors compte tenu de la proposition II-3, il n'est pas déraisonnable de supposer "a priori" que l'on a . . .

$$\begin{cases} \Gamma_{ff}^c \equiv \Gamma_{f^*f^*}^c \\ \Phi_f \equiv \Phi_{f^*} \end{cases}$$

. . . où Φ_f et Φ_{f^*} sont respectivement les fonctions moyennes relatives aux fonctions F et F^* tandis que Γ_{ff}^c et $\Gamma_{f^*f^*}^c$ sont respectivement les fonctions de covariances centrées relatives à F et F^* .

Ceci dit, puisque par hypothèse F et F^* sont T -interpolables en μ -moyenne quadratique au point t_0 , on est assuré que la matrice $[\Gamma^c]$ est inversible ; on en déduit que les équations (A4) possèdent une solution unique $[\hat{\Lambda}(t_0)]$ dont les $\{\hat{\lambda}^i(t_0)\}_{i=1}^{i=N}$ sont, d'après les relations (F1) et (F2) telles que :

$$\begin{cases} \hat{F}(t_0) = \Phi_f(t_0) + \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot \{F(t_i) - \Phi_f(t_i)\} \\ t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}(t_0) = F(t_0) \end{cases}$$

Intérêt de cette technique

L'intérêt de cette technique est triple :

- 1) Elle permet d'obtenir une interpolation $\hat{F}(t_0)$ à partir d'une première approximation F^* même si cette dernière n'est pas identique à F sur T .
- 2) La seule hypothèse faite pour sélectionner une solution particulière $\hat{F}(t_0)$ est très "concrète" et consiste en fait à se donner, par le biais de F^* , "l'allure générale" de la fonction F .
- 3) Enfin, on peut faire intervenir toutes les informations non numériques concernant F en choisissant F^* en fonction de ces informations.

Erreur quadratique moyenne d'interpolation

Le point t_0 étant fixé dans $\mathbf{R}^n$, soit $\hat{F}(t_0, \omega)$ la fonction définie sur Ω par la relation suivante :

$$(F1') : \hat{F}(t_0, \omega) = \Phi_f(t_0) + \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot \{F(t_i + \omega) - \Phi_f(t_i)\}$$

Par définition, nous appellerons erreur quadratique moyenne d'interpolation en μ -moyenne quadratique au point t_0 la valeur $\hat{e}(t_0)$ telle que

$$\begin{aligned} \{\hat{e}(t_0)\}^2 &= E |U_0^c(\omega) - \hat{U}_0^c(\omega)|^2 \\ &= \int_{\Omega} |F(t_0 + \omega) - \hat{F}(t_0, \omega)|^2 \cdot \mu(d\omega) \end{aligned}$$

D'après les relations (A5) et (A6), on a donc :

$$t_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \{\hat{\epsilon}(t_0)\}^2 = \Gamma_{00}^c - [\hat{\Lambda}(t_0)]^t \cdot [\Gamma^c] \cdot [\hat{\Lambda}(t_0)] \geq 0$$

$$t_0 \in T \Rightarrow \{\hat{\epsilon}(t_0)\}^2 = 0$$

L'expérience montre que $\hat{\epsilon}(t_0)$ qui a les propriétés d'un écart type peut être utilisé avec profit pour se faire une idée de la précision avec laquelle $\hat{F}(t_0)$ a été calculé compte tenu de T et des hypothèses concernant F.

Remarque

Pour bien marquer le fait que $\hat{F}(t_0)$ et $\hat{\epsilon}(t_0)$ dépendent directement de la solution initiale F^* , nous suggérons de désigner dorénavant ces quantités par les notations $\hat{F}^*(t_0)$ et $\hat{\epsilon}^*(t_0)$ chaque fois que nous voudrions rappeler leur dépendance vis-à-vis de F^* .

II.2. – Continuité de $\hat{F}$

Enoncé

Si F est T-interpolable en μ -moyenne quadratique en tout point t_0 d'un compact $D \subset \mathbb{R}^n$, alors $\hat{F}(t_0)$ est une fonction continue de t_0 sur D.

Démonstration

F étant supposée T-interpolable en μ -moyenne quadratique, cela suppose en particulier que cette fonction est continue sur $[(T \cup D) + \Omega]$; on peut démontrer que ceci implique la continuité de $\Phi_f(\cdot)$ et de $\Gamma_{ff}(\cdot, t_i)$ sur $(T \cup D)$ quel que soit t_i fixé dans T. Il s'en suit, compte tenu de la linéarité des équations

(A4) et du fait que $[\Gamma^c]$ est inversible, que les fonctions $\{\hat{\lambda}^i(t_0)\}_{i=1}^{i=N}$ et $\Phi(t_0)$

sont continues sur D ; ceci nous permet de conclure d'après la relation (F1) que $\hat{F}(t_0)$ est elle-même continue sur D en tant que combinaison linéaire finie de fonctions continues sur D.

III.3. – Proposition

Enoncé

Soit d'une part $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace défini de la façon suivante. . .

$$(T1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \end{array} \right.$$

Soit d'autre part K un entier positif fini et F un polygone trigonométrique, réel tel que :

$$(T2) \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbf{R} : F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K \{a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)\} \\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} |a_k| < +\infty \text{ quel que soit } k = (0, 1, \dots, K) \\ |b_k| < +\infty \text{ quel que soit } k = (1, \dots, K) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si T est un ensemble de N points $\{t_i\}_{i=1}^N$ appartenant à $\mathbf{R}$ et si D est une partie quelconque de $\mathbf{R}$, alors F est continue et bornée sur $[(T \cup D) + \Omega]$ et les fonctions Φ_f et Γ_{ff}^c associées à F sont telles que :

$$(T3) \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup D) : \Phi_f(t) = a_0 \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup D) \\ t_2 \in (T \cup D) \end{array} \right\} : \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] \end{array} \right.$$

De plus, si les coefficients a_0 et $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{K=K}$ sont connus et si l'on a ...

$$(T4) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad K \geq N \\ 2^\circ) \quad T \subset]0, 2\pi[\\ 3^\circ) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow t_p \neq t_q \text{ si } p \neq q \\ 4^\circ) \quad \forall k = (1, \dots, N) : (|a_k|^2 + |b_k|^2) > 0 \end{array} \right.$$

... alors la fonction F est T -interpolable en μ -moyenne quadratique en tout point $t_0 \in D$.

Démonstration : première partie

Compte tenu que K et les coefficients $\{a_k, b_k\}$ sont finis, il est évident que F est continue sur $\mathbf{R}$; d'autre part, on est assuré que F est bornée sur $\mathbf{R}$ puisque l'on a :

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |F(t)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^K \{|a_k| + |b_k|\} < +\infty$$

Il s'en suit alors que F est continue et bornée sur $[(T \cup D) + \Omega]$ et que par conséquent les intégrales $\Phi_f(t)$ et $\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)$ ont un sens quels que soient t, t_1 et t_2 appartenant à $(T \cup D)$; ceci dit, on peut montrer par des calculs élémentaires que les fonctions Φ_f et Γ_{ff}^c vérifient les relations (T3).

Démonstration : deuxième partie

Pour démontrer que, sous les conditions (T1) et (T4) la fonction F est T-interpolable, nous aurons besoin de quelques résultats techniques que nous nous proposons d'exposer à part dans cette deuxième partie de la démonstration :

Soit $[E(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N)]$ la matrice carrée définie de la façon suivante :

$$[E(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N)] = \begin{bmatrix} e^{i\Theta_1} & e^{i\Theta_2} & \dots & e^{i\Theta_N} \\ e^{2i\Theta_1} & e^{2i\Theta_2} & \dots & e^{2i\Theta_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{Ni\Theta_1} & e^{Ni\Theta_2} & \dots & e^{Ni\Theta_N} \end{bmatrix}$$

En désignant par $\det [M]$ le déterminant d'une matrice carrée quelconque $[M]$, on peut alors écrire :

$$\det [E(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N)] = (e^{i\Theta_1} \cdot e^{i\Theta_2} \dots e^{i\Theta_N}) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\Theta_1} & e^{i\Theta_2} & \dots & e^{i\Theta_N} \\ (e^{i\Theta_1})^2 & (e^{i\Theta_2})^2 & \dots & (e^{i\Theta_N})^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e^{i\Theta_1})^{N-1} & (e^{i\Theta_2})^{N-1} & \dots & (e^{i\Theta_N})^{N-1} \end{bmatrix}$$

En remarquant que le déterminant figurant au membre de droite de l'égalité ci-dessus est un déterminant de Van der Monde, on peut écrire :

$$\det [E(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N)] = e^{i \sum_p \Theta_p} \cdot \prod_{p < q} (e^{i\Theta_p} - e^{i\Theta_q})$$

Compte tenu que $e^{i \sum_p \Theta_p}$ n'est jamais nul, on a donc en définitive :

$$\det [E(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N)] = \Leftrightarrow \exists \begin{Bmatrix} \Theta_p \\ \Theta_q \end{Bmatrix} \in (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N) : \\ \Theta_p = \Theta_q \text{ modulo } 2\pi$$

Ce résultat étant acquis, on peut alors écrire les équivalences suivantes où $(t_1, t_2, \dots, t_N)$ désignent les points de l'ensemble T et $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N)$ un ensemble de N nombres complexes non tous nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \cos(k t_p) = 0 \\ \text{et } \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \sin(k t_p) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quel que soit } k = (1, \dots, N)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot e^{i k t_p} = 0 \\ \text{et } \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot e^{-i k t_p} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quel que soit } k = (1, \dots, N)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det [E(t_1, \dots, t_N)] = 0 \\ \text{et } \det [E(-t_1, \dots, -t_N)] = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \begin{Bmatrix} t_p \\ t_q \end{Bmatrix} \in T : t_p = t_q \text{ modulo } 2\pi$$

Si les conditions (T4) sont satisfaites, alors compte tenu que l'on a ...

$$\left\{ \begin{array}{l} T \subset] 0, 2\pi[\\ \forall \begin{Bmatrix} t_p \\ t_q \end{Bmatrix} \in T \Rightarrow t_p \neq t_q \text{ si } p \neq q \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \begin{Bmatrix} t_p \\ t_q \end{Bmatrix} \in T : t_p = t_q \text{ modulo } 2\pi$$

... on peut affirmer que l'implication suivante est vraie si et seulement si les coefficients $(\lambda^1, \dots, \lambda^N)$ sont tous nuls :

$$(1) \quad \forall k = (1, \dots, N) : \begin{cases} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \cos(k t_p) = 0 \\ \text{et } \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \sin(k t_p) = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, ceci implique que la matrice $[\theta]$ définie ci-dessous est de rang N si les conditions (T4) sont satisfaites :

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \cos 1t_1 & \cos 1t_2 & \dots & \cos 1t_N \\ \sin 1t_1 & \sin 1t_2 & \dots & \sin 1t_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos kt_1 & \cos kt_2 & \dots & \cos kt_N \\ \sin kt_1 & \sin kt_2 & \dots & \sin kt_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos Nt_1 & \cos Nt_2 & \dots & \cos Nt_N \\ \sin Nt_1 & \sin Nt_2 & \dots & \sin Nt_N \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 2N \\ \downarrow \end{matrix}$$

Démonstration : troisième partie

Supposons que les conditions (T4) soient satisfaites et soient $[\Theta]$ et $[\Sigma^2]$ les matrices définies ci-dessous où l'on a posé $|\sigma_k|^2 = (|a_k|^2 + |b_k|^2)/2$:

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \cos 1t_1 & \cos 1t_2 & \dots & \cos 1t_N \\ \sin 1t_1 & \sin 1t_2 & \dots & \sin 1t_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos kt_1 & \cos kt_2 & \dots & \cos kt_N \\ \sin kt_1 & \sin kt_2 & \dots & \sin kt_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos Kt_1 & \cos Kt_2 & \dots & \cos Kt_N \\ \sin Kt_1 & \sin Kt_2 & \dots & \sin Kt_N \end{bmatrix} \quad ; \quad [\Sigma^2] = \begin{bmatrix} |\sigma_1|^2 & & & \\ & |\sigma_1|^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & |\sigma_k|^2 \\ & & & & & |\sigma_k|^2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & |\sigma_K|^2 \\ & & & & & & & & & & |\sigma_K|^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 2K \\ \downarrow \end{matrix}$$

$\longleftrightarrow N \quad \longleftrightarrow 2K$

Compte tenu que sous les hypothèses (T4) les coefficients $|\sigma_k|^2$ $\sum_{k=1}^{k=N}$ sont tous différents de zéro, on est assuré que la matrice $[\Sigma^2]$ est de rang $2K$; d'autre part, puisque sous les hypothèses (T4) on a également $K \geq N$ il s'en suit que $[\theta]$ est une sous-matrice de $[\Theta]$ ce qui nous permet d'affirmer que $[\Theta]$ est de rang N puisque nous savons que $[\theta]$ est elle-même de rang N .

Ceci dit, pour démontrer que sous les conditions (T4) la fonction F est T -interpolable, il nous suffit de montrer que la matrice $[\Gamma^c]$ définie ci-dessous est de rang N :

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. [\Gamma^c] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} t_i \in T \\ t_j \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \sum_{k=1}^N |\sigma_k|^2 \cdot \cos [k(t_i - t_j)]$$

Par des calculs élémentaires, on vérifie facilement que l'on a . . .

$$[\Gamma^c] = [\Theta]^t \cdot [\Sigma^2] \cdot [\Theta]$$

. . . d'où l'on déduit que $[\Gamma^c]$ est effectivement de rang N sous les hypothèses, (T4)

Conséquence pratique

Lorsque T est un ensemble discret de N points appartenant à $\mathbf{R}^1$, alors compte tenu de la proposition précédente, il est très facile de construire des exemples de fonction T -interpolable en μ -moyenne quadratique.

Dans la pratique, cette remarque prend toute son importance si pour mettre en œuvre la technique d'interpolation présentée au paragraphe III-1 on décide de choisir une solution initiale F^* du type suivant :

$$F^*(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^K \{a_k^* \cdot \cos(kt) + b_k^* \cdot \sin(kt)\}$$

Cas des polynômes trigonométriques définis sur $\mathbf{R}^n$

Par souci de simplicité dans les démonstrations, nous nous sommes limités au cas très particulier des polynômes trigonométriques réels définis sur $\mathbf{R}^1$, mais nous tenons à signaler que tout ce qui vient d'être dit dans ce paragraphe s'étend sans difficulté au cas des polynômes trigonométriques réels ou complexes F définis sur $\mathbf{R}^n$.

III.4 Exemple d'application

Présentation

Cet exemple destiné à tester notre méthode d'interpolation en μ -moyenne quadratique est extrait d'une application pratique que nous avons été amené à traiter. Il s'agit d'estimer sur un segment $D = [0, 2\pi]$ donné dans $\mathbf{R}$, les variations d'une fonction réelle F dont on ne connaît à priori que les valeurs numériques $F(t_i)$ aux points d'un ensemble $S \equiv \{t_p\}_{p=1}^M$ de $M = 20$ points d'échantillonnage distincts répartis sur D comme l'indique la figure 1-B.

Mise en oeuvre

1) Dans un premier temps, nous avons construit le polynôme trigonométrique . . .

$$F^*(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^{K=8} \{a_k^* \cdot \cos(kt) + b_k^* \cdot \sin(kt)\}$$

. . . approchant F au sens des moindres carrés sur D et dont on trouvera le graphe représenté en pointillés sur la figure 1-B. On constate expérimentalement que les $K = 8$ coefficients ($|a_k^*|^2 + |b_k^*|^2$) sont tous significativement différents de zéro.

2) Dans un deuxième temps, nous nous sommes donnés 100 points $t_0(q)$ répartis sur D et tels que :

$$\forall q = (0, \dots, 99) : t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$$

Ensuite, pour chacun de ces points, nous avons calculé l'interpolation en μ -moyenne quadratique $\hat{F}_N^*(t_0(q))$ et l'erreur quadratique moyenne associée $\hat{e}_N^*(t_0(q))$ en prenant chaque fois pour T , l'ensemble $T_N(q)$ des $N = 6$ points plus proches voisins de $t_0(q)$ choisis dans l'ensemble S et en posant :

$$\left[\begin{array}{l} \Omega \equiv [-\pi + \pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_{\Omega} \\ \mu(d\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \\ F^* = \text{solution initiale} \end{array} \right.$$

Ce faisant, nous avons obtenu deux suites de nombres . . .

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \hat{F}_N^* (t_0(q)) \right\} \quad \begin{array}{l} q = 99 \\ q = 0 \end{array} \\ \left\{ \hat{e}_N^* (t_0(q)) \right\} \quad \begin{array}{l} q = 99 \\ q = 0 \end{array} \end{array} \right.$$

... représentant respectivement les ordonnées de 100 points situés sur le graphe des fonctions $\hat{F}_N^*$ et $\hat{e}_N^*$ au droit des 100 points d'abscisse $t_0(q) = q$.

$$\frac{2\pi}{99}$$

3) Dans un dernier temps, et afin de visualiser $\hat{F}_N^*$ et $\hat{e}_N^*$, nous avons relié par des arcs de cubique (suivant la technique des fonctions splines) chacune des deux suites de 100 points définissant respectivement le graphe de $\hat{F}_N^*$ et $\hat{e}_N^*$. On trouvera le résultat final sur la figure 1-B où le graphe de $\hat{F}_N^*$ est représenté en trait fort, et sur la figure 1-A où l'on a représenté le graphe de $\hat{e}_N^*$ avec une échelle des ordonnées beaucoup plus grande de façon à mieux mettre en évidence les variations de cette dernière fonction.

Remarque

Afin de se faire une idée de l'influence des paramètres K et N sur les courbes $\hat{F}^*$ et $\hat{e}^*$, nous présentons sur les figures 2-A et 2-B des résultats analogues à ceux des figures 1-A et 1-B, mais obtenus cette fois avec K = 6 et N = 4.

IV – CONCLUSIONS

IV-1 – Interpretation des hypothèses (H1) et (H2) employées pour les filtres autorégressifs

Lorsque F est un polynôme trigonométrique (réel) défini sur $\mathbf{R}$ par la relation (T2) et (Ω, α, μ) un espace mesuré défini par la relation (T1) nous savons d'après la proposition III-3 que l'on a :

$$\forall t \in (T \cup t_0) : \Phi_f(t) = a_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall t_1 \in (T \cup t_0) \\ \forall t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} : \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos [k(t_1 - t_2)]$$

Ceci dit, si nous posons. . .

$$\Phi_f = a_0$$

$$|\sigma|^2 = \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}$$

$$\gamma(t_1 - t_2) = \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2 \cdot |\sigma|^2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)]$$

... alors, si les N points $\{t_i\} \in T$ sont uniformément répartis sur un intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ et si N est suffisamment grand, nous savons d'après les propriétés des coefficients d'une série de Fourier que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(t) \cdot dt \\ \simeq \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} F(t_i) = \Phi_f^* \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |F(t)|^2 \cdot dt - |\Phi_f|^2 \\ \simeq \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} |F(t_i)|^2 - |\Phi_f^*|^2 = |\sigma^*|^2 \end{array} \right.$$

En comparant ces relations avec celles présentées au paragraphe I-3 nous voyons que les hypothèses (H1) et (H2) classiquement utilisées dans la technique des filtres autorégressifs reviennent en fait à utiliser un cas particulier d'interpolation en μ -moyenne quadratique.

IV-2. — Extensions possibles de l'interpolation en μ -moyenne quadratique

Pour conclure, signalons que l'on peut étendre la méthode présentée dans plusieurs directions :

1) En compliquant un tout petit peu les notations, la méthode présentée s'étend sans difficulté au cas où F est une fonction vectorielle à valeurs dans C^m ou R^m .

2) Enfin l'interpolation en μ -moyenne quadratique peut être généralisée au cas où T n'est plus un ensemble de points fini dénombrable, mais un compact de R^n . Cette dernière généralisation n'est possible qu'au prix de développements théoriques beaucoup plus importants que ceux qui ont été faits dans le présent exposé ; à ce sujet, on pourra consulter : Mallet — mémoire de thèse (1).

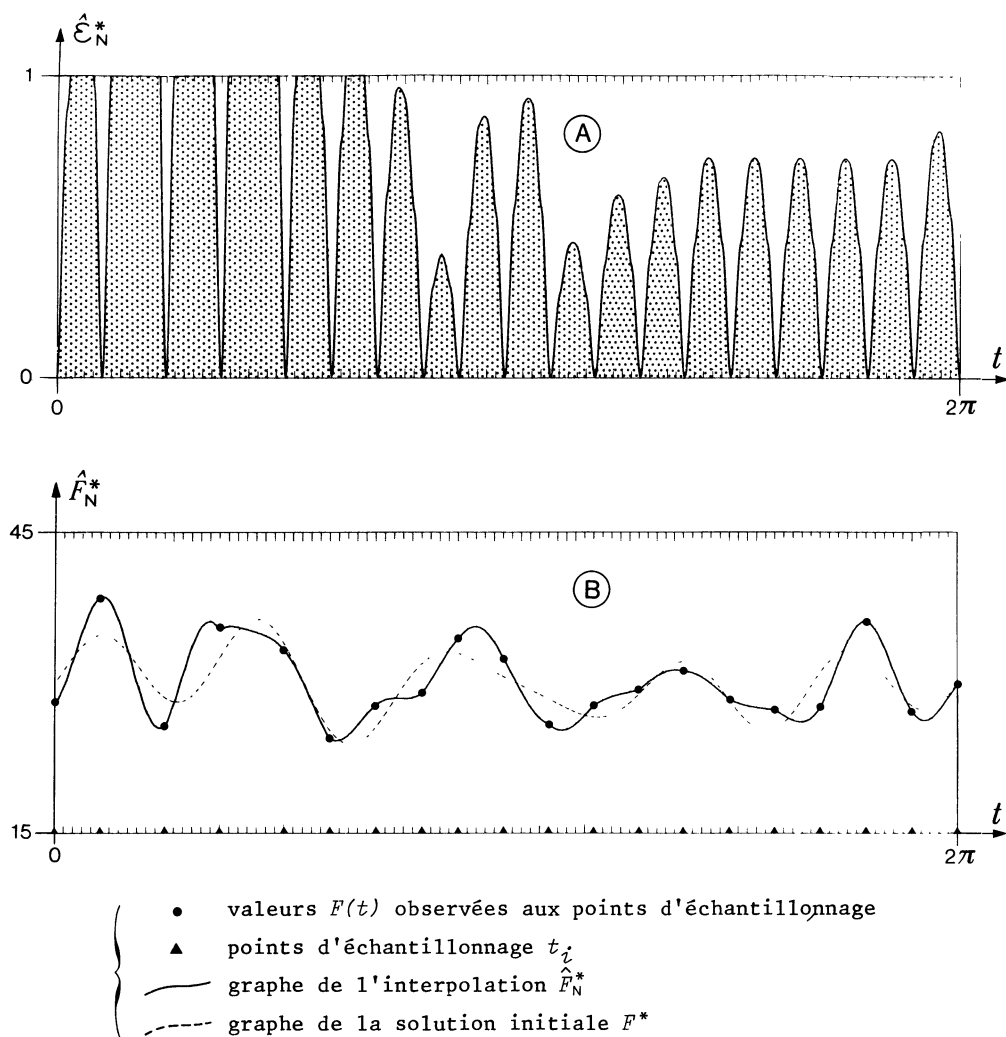


Figure 1 — Exemple d'interpolation en μ -moyenne quadratique d'une fonction F connue par ses valeurs numériques $F(t)$ observées en $M = 20$ points d'échantillonnage (t_i) répartis sur le segment $[0, 2\pi]$

Les valeurs $\hat{F}_N^*[t_0(q)]$ et $\hat{\epsilon}_N^*[t_0(q)]$ en tout point $t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$ ont été calculées à partir des $N = 6$ plus proches voisins choisis dans (t_i) et en prenant pour solution initiale F^* un polynôme trigonométrique tel que $K = 8$.

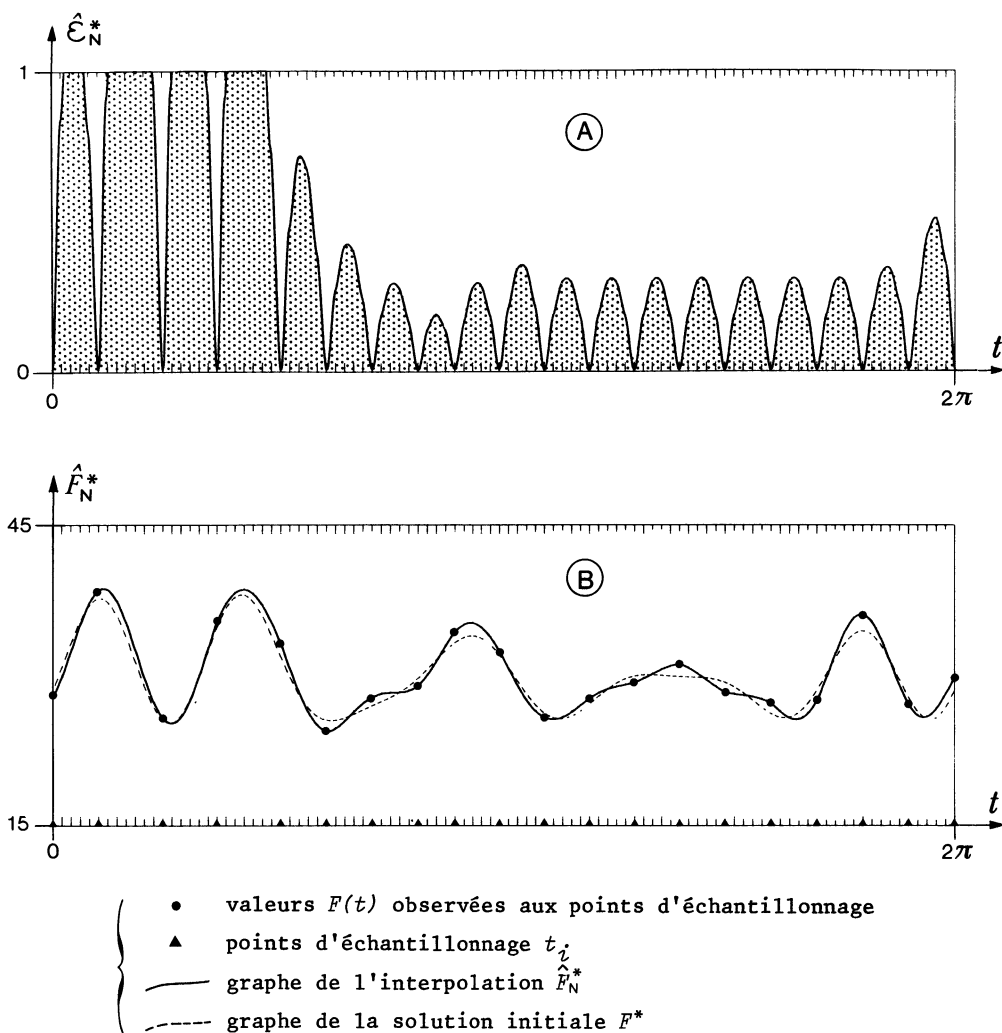


Figure 2 — Exemple d'interpolation en μ -moyenne quadratique d'une fonction F connue par ses valeurs numériques $F(t)$ observées en $M = 20$ points d'échantillonnage (t_i) répartis sur le $[0, 2\pi]$.

Les valeurs $\hat{F}_N^*[t_0(q)]$ et $\hat{E}_N^*[t_0(q)]$ en tout point $t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$ ont été calculées à partir des $N = 4$ plus proches voisins choisis dans (t_i) et en prenant pour solution initiale F^* un polynôme trigonométrique tel que $K = 6$.

BIBLIOGRAPHIE

- ANDERSON T.W. — The statistical analysis of time series. *Wiley*, 1971.
- DOOB J.L. — Stochastic processes. *Wiley, Septième édition*, 1967.
- FORTET R. et BLANC-LAPIERRE A. — Theorie des fonctions aléatoires. *Masson*, 1953.
- MALLET J.L. — (1) Etude d'une méthode d'estimation et d'une méthode de filtrage ; application à la cartographie automatique. *Thèse, faculté des sciences Nancy*, 1974.
- (2) Présentation d'un ensemble de méthodes et de techniques de la cartographie automatique numérique. *Sciences de la terre, série Mémoire*, 1974.
- MATHERON G. — (1) Les variables régionalisées et leur estimation. *Paris, Masson 1966*. (2) le Krigeage universel. *Ec. Nat. Sup. Mines, Paris, 1969*.
- STERN J. — De BARBEYRAC J. et POGGI R. — Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires. *Paris, Dunod, 1967*.
- WIENER N. — Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationnary time series. *Wiley, 1949*.
- RIES V. — Une application de l'équation de Wiener-Hopf à un problème de prédiction. *Thèse, Nancy, 1970*.