

A. CHAMPEAUX

**Effets de mutations technologiques simultanées  
sur l'estimation des paramètres des modèles à  
coefficients techniques**

*Revue de statistique appliquée*, tome 21, n° 3 (1973), p. 9-21

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1973\\_\\_21\\_3\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1973__21_3_9_0)

© Société française de statistique, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# EFFETS DE MUTATIONS TECHNOLOGIQUES SIMULTANÉES SUR L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES A COEFFICIENTS TECHNIQUES (1)

A. CHAMPEAUX

## INTRODUCTION

M. MONDON a déterminé dans le cadre des modèles utilisés par le C E R E N une formule donnant la consommation unitaire d'énergie ( $\rho_n$ ) lorsqu'il y a deux types différents et un passage d'un type à l'autre défini par une part  $x$  d'un type variant linéairement par rapport au temps, soit  $x = \lambda t + \mu$

Les résultats alors obtenus étaient très intéressants car ils permettaient de séparer la consommation unitaire qui apparaîtrait seule si il n'y avait pas effet de substitution des deux techniques, et un terme complémentaire dû à cette mutation technique. On pouvait alors calculer les  $p$  et  $w$  correspondants.

Dans une première partie, nous allons essayer de construire d'autres types de modèles décrivant ce phénomène. Puis, nous tenterons dans une deuxième partie de construire un modèle dans le cas où nous avons substitution entre  $m$  techniques différentes, enfin dans une troisième partie, nous appliquerons les résultats obtenus au cas de trois techniques.

Cette étude utilise pour une très grande partie les formules et les résultats utilisés par M. MONDON.

## I – CAS DE DEUX TECHNIQUES

M. MONDON a supposé que la substitution s'effectuait suivant le schéma :

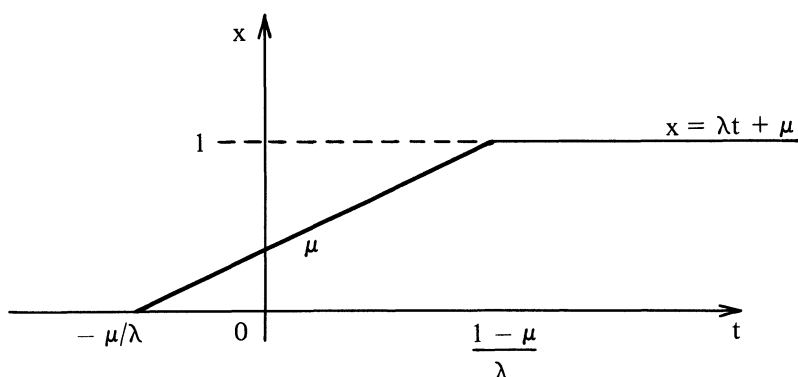


Figure 1 – Evolution de la technique A.

(1) Article remis le 7/7/72, révisé le 30/1/73.

Quelles autres formes de variation pouvons-nous envisager ?

– l'introduction de la technique A se fait lentement au départ. C'est une technique nouvelle qui s'implante difficilement. Puis, au bout de quelques années elle s'impose comme étant la meilleure technique : la substitution s'effectue alors à un rythme de plus en plus accéléré, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus que cette technique.

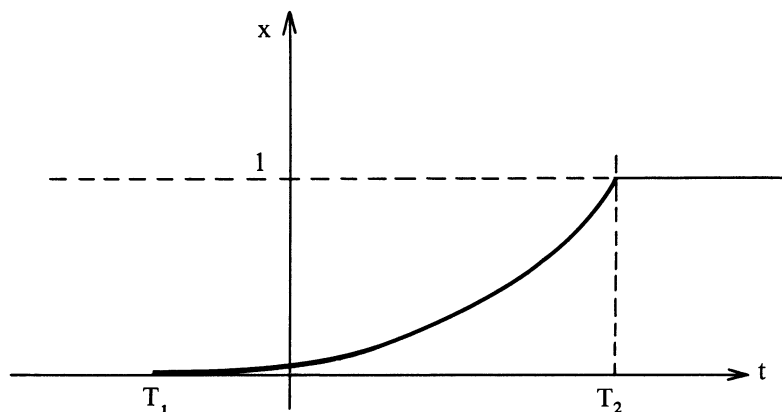


Figure 2

– la technique A est une véritable révolution technologique qui apparaît subitement sur le marché. La substitution est très rapide au départ. Puis, au fur et à mesure qu'un grand nombre d'équipements sont remplacés, le rythme de substitution diminue. Finalement, on peut atteindre la valeur  $x = 1$  ou un pourcentage à fixé du marché.

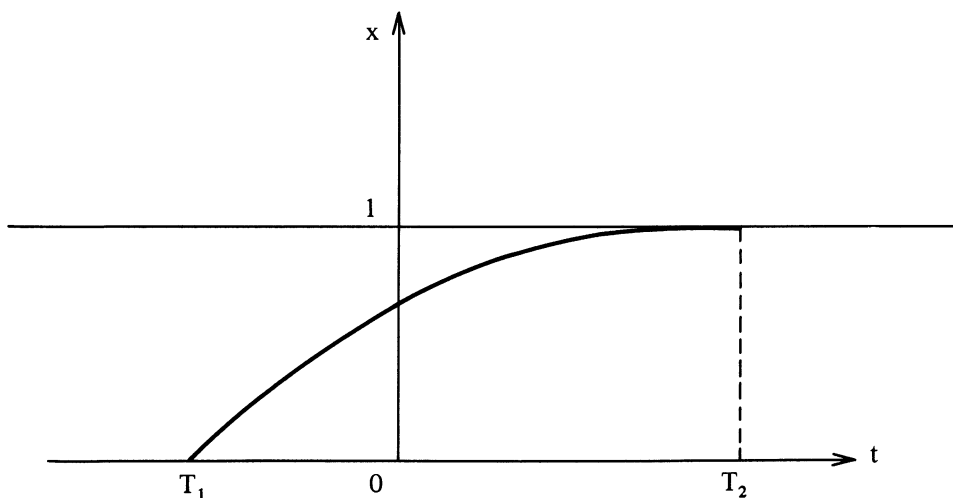


Figure 3

1/ cas de la figure 2

Nous pouvons prendre pour  $x$  une équation de la forme

$$x(t) = \lambda t^2 + \mu t + \nu$$

pendant toute la durée de substitution d'un mode de production à un autre, c'est-à-dire pour  $t_1 < t < t_2$ . Les paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  peuvent s'exprimer en fonction de  $t_1$  et de  $t_2$ .

Nous devons avoir en effet :

$$\begin{cases} 0 = \lambda t_1^2 + \mu t_1 + \nu \\ 0 = 2 \lambda t_1 + \mu \\ 1 = \lambda t_2^2 + \mu t_2 + \nu \end{cases}$$

soit :

$$\lambda = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \quad \mu = \frac{-2 t_1}{(t_2 - t_1)^2} \quad \nu = \frac{t_1^2}{(t_2 - t_1)^2}$$

(ces valeurs ont évidemment un sens puisque la substitution n'est pas immédiate donc  $t_1$  est différent de  $t_2$ ).

Si nous reprenons la formulation de M. MONDON, en appelant  $Z_T^A(t)$  la consommation unitaire en année  $t$  d'un équipement A mis en service en année  $T$ , nous avons :

$$Z_T^A(t) = Z_0^A(1 + p^A T + w^A(t - T))$$

$$Z_T^B(t) = Z_0^B(1 + p^B T + w^B(t - T))$$

et pour l'ensemble des équipements pendant la période  $(t_1, t_2)$

$$Z_T(t) = x(T) Z_T^A(t) + [1 - x(T)] Z_T^B(t)$$

nous remarquons que nous avons :

$$Z_0 - \nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} Z_T(t) &= (\lambda T^2 + \mu T + \nu) Z_0^A(1 + p^A T + w^A(t - T)) \\ &+ (1 - \lambda T^2 - \mu T - \nu) Z_0^B(1 + p^B T + w^B(t - T)) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} Z_T(t) &= \nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B + (\nu Z_0^A p^A + (1 - \nu) Z_0^B p^B) T \\ &+ (\nu Z_0^A w^A + (1 - \nu) Z_0^B w^B)(t - T) + T^3 (\lambda Z_0^A p^A - \lambda Z_0^B p^B) \\ &+ T(\mu Z_0^A - \mu Z_0^B) + T^2 (\mu Z_0^A p^A - \mu Z_0^B p^B + \lambda Z_0^A - \lambda Z_0^B) \\ &+ T(t - T) (\mu Z_0^A w^A - \mu Z_0^B w^B) + T^2 (t - T) (\lambda Z_0^A w^A - \lambda Z_0^B w^B) \end{aligned}$$

Si nous posons :

$$\pi_1 = \frac{\nu Z_0^A p^A + (1 - \nu) Z_0^B p^B}{Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B}$$

$$w_1 = \frac{\nu Z_0^A w^A + (1 - \nu) Z_0^B w^B}{\nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B}$$

$$\pi_2 = \frac{Z_0^A - Z_0^B}{\nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B} \quad w_2 = \frac{Z_0^A w^A - Z_0^B w^B}{\nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B}$$

$$\gamma = \frac{Z_0^A p^A - Z_0^B p^B}{\nu Z_0^A + (1 - \nu) Z_0^B}$$

nous obtenons :

$$Z_T(t) = Z_0(1 + \pi_1 T + w_1(t - T)) + Z_0(\pi_2 \mu T + T^2(\mu \gamma + \lambda \pi_2) + \mu w_2 T(t - T) + T^3 \lambda \gamma + T^2(t - T) \lambda w_2)$$

Nous voyons que comme dans le cas linéaire, nous retrouvons le premier terme qui apparaîtrait seul s'il n'y avait pas effet de substitution de la technique A à la technique B. Le deuxième terme qui rend compte de ce phénomène est ici plus compliqué. Nous voyons cependant qu'il va nous permettre de connaître les valeurs de  $p$  et de  $w$  à utiliser dans les modèles C ou E<sup>(1)</sup>.

Nous devons en effet avoir :

$$p = \pi_1 + \mu \pi_2 + (\mu \gamma + \lambda \pi_2) T \text{ moyen} + \lambda \gamma T^2 \text{ moyen}$$

$$w = w_1 + \mu w_2 T \text{ moyen} + \lambda w_2 T^2 \text{ moyen}$$

*Remarque*

Nous avons supposé dans les formules données pour le calcul de  $\lambda, \mu, \nu$  en fonction de  $t_1$  et de  $t_2$  que la technique A se substituait entièrement à l'ancienne (B) c'est-à-dire que nous avons fait  $x = 1$  pour  $t = t_2$ . Nous pouvons en fait très bien supposer que  $x$  se stabilise à une certaine valeur a donnée. Ceci nous donnera les nouvelles valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$  à utiliser, mais ne change rien au déroulement du reste des calculs.

## 2/ Cas de la figure 3

Comme dans le cas précédent, nous pouvons reprendre exactement le même calcul en prenant pour  $x$  une équation de la forme :

$$x(t) = \lambda t^2 + \mu t + \nu$$

(1) Voir R.S.A. 1963 vol. XI - 1 - article de M. Dourille.

Cependant, les formules donnant les différentes valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$  ne seront pas les mêmes. En effet, si nous supposons qu'au temps  $t_2$  la substitution se stabilise à une valeur  $a$ , nous devons avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda t_1^2 + \mu t_1 + \nu \\ a = \lambda t_2^2 + \mu t_2 + \nu \\ 0 = 2 \lambda t_2 + \mu \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{-a}{(t_1 - t_2)^2} \\ \mu = \frac{2 t_2 a}{(t_2 - t_1)^2} \\ \nu = a \left( 1 - \frac{t_1^2}{(t_2 - t_1)^2} \right) \end{array} \right.$$

Les formules donnant les valeurs de  $p$  et de  $w$  à utiliser dans ce cas restent les mêmes que dans le cas précédent (avec les nouvelles valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$  trouvées).

## II – CAS DE $m$ TECHNIQUES

Nous allons maintenant étudier la substitution simultanée de  $m$  techniques. Nous supposons que les parts  $x_i$  de ces  $m$  techniques suivent toutes une loi linéaire en fonction du temps.

Nous avons donc, quel que soit  $i \leq m$

$$x_i = \lambda_i t + \mu_i$$

Remarquons tout de suite que les  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  ne sont pas quelconques. Nous devons en effet avoir, quel que soit  $t$  :

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

ceci entraîne

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$$

soit  $Z_t^i(t)$  la consommation unitaire en année  $t$ , d'un équipement  $i$  mis en service en année  $T$ . Par définition dans le cas des modèles C ou E nous avons, quel que soit  $i$  :

$$Z_t^i(t) = Z_0^i (1 + p^i T + w^i(t - T))$$

(les  $i$  sont des indices et non des puissances).

Pour l'ensemble des équipements nous pouvons donc écrire :

$$Z_T(t) = \sum_{i=1}^m x_i Z_0^i (1 + p^i T + w^i(t - T))$$

soit en remplaçant les  $x_i$  par leurs valeurs

$$Z_T(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i (1 + p^i T + w^i(t - T)) T + \sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i (1 + p^i T + w^i(t - T))$$

Ce que nous pouvons écrire sous la forme suivante :

$$Z_T(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i + \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i T + \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i p^i T^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i w^i Z_0^i (t - T) T + \sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i p^i T + \sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i w^i (t - T)$$

Or,

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i$$

et si nous posons

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i p^i}{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i} & w_1 &= \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i w^i Z_0^i}{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i} \\ \pi_2 &= \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i}{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i} & w_2 &= \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i w^i}{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i} \\ \gamma &= \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i Z_0^i p^i}{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_0^i} \end{aligned}$$

La formule donnant  $Z_T(t)$  dans la période de substitution de ces  $m$  techniques devient alors :

$$Z_T(t) = Z_0(1 + \pi_1 T + w_1(t - T)) + Z_0(\pi_2 T + \gamma T^2 + w_2 T(t - T))$$

Nous retrouvons une formule identique à celle obtenue par M. MONDON dans le cas de deux techniques :  $\pi_1$  et  $w_1$  sont les moyennes pondérées au temps zéro, respectivement des  $p$  et des  $w$ . Le premier terme est celui qui apparaît seul s'il n'y avait pas substitution des  $m$  techniques. Le deuxième terme rend compte de ce phénomène.

Il nous faut voir maintenant dans quelles limites les formules précédentes restent valables. Il faut pour cela qu'il y ait effectivement  $m$  techniques pendant toute la période considérée. Nous devons donc avoir quel que soit  $i$  :

$$0 \leq x_i \leq 1$$

si l'un des  $x_i$  vaut 1, alors tous les autres sont nuls (d'après les relations posées au début).

Nous en déduisons donc que les formules précédentes sont valables pour des équipements installés aux dates  $T$  telles que nous ayons :

$$\lambda_i T + \mu_i > 0$$

ceci quel que soit  $i$  ; deux cas sont alors possibles :

1/ pour tous les  $i$  tels que  $\lambda_i > 0$  nous devons avoir  $T \geq -\frac{\mu_i}{\lambda_i}$  nous voyons que la limite inférieure pour  $T$  va être :

$$T_1 = \sup_i \left( -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \right) \text{ avec } \lambda_i > 0$$

2/ pour tous les  $i$  tels que  $\lambda_i < 0$  nous devons avoir  $T \leq -\frac{\mu_i}{\lambda_i}$  la limite supérieure pour  $T$  sera donc :

$$T_2 = \inf_i \left( -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \right) \text{ pour les } \lambda_i < 0$$

Le cas  $\lambda_i = 0$  n'est pas à étudier car alors la technique  $i$  ne participe pas à la substitution.

Nous voyons donc que la formule donnant  $Z_T(t)$  nous permet de calculer les valeurs de  $p$  et  $w$  pour l'ensemble des techniques dont les équipements ont été installés entre  $T_1$  et  $T_2$ .

$$\forall \lambda_i > 0 \sup_i \left( -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \right) \leq T \leq \inf_i \left( -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \right) \forall \lambda_i < 0$$

Que se passe-t-il si  $T$  devient égal à  $T_1$  ou  $T_2$  ?

Si  $T = T_1$  nous sommes à un instant où apparaît une technique nouvelle. Nous passons donc d'une substitution à  $m - 1$  techniques à une substitution à  $m$  techniques.

Si  $T = T_2$  nous avons alors disparition d'une technique de production et s'il n'y a pas simultanément apparition d'une nouvelle technique le problème se ramène, pour la période suivante, à la substitution de  $m - 2$  techniques.

### Remarque

Si nous donnons à un instant  $T_1$   $m$  techniques de production avec leurs parts respectives du marché et à un instant  $T_2$  les nouvelles parts pour ces  $m$  techniques, nous déterminons très facilement les paramètres  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  d'où les valeurs à donner à  $p$  et  $w$ .

### Utilisation des formules dans le cas général

Plaçons-nous dans le cas général où apparaissent et disparaissent successivement un certain nombre de techniques. Nous découpons la période à étudier en un certain nombre d'intervalles  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , à chaque fois qu'apparaît ou disparaît une nouvelle technique. Pour chaque intervalle ainsi défini, nous avons



substitutions de  $m_j$  techniques ( $j$  indice de l'intervalle). Le calcul précédent nous donne alors les  $p_j$  et  $w_j$  à utiliser pour les équipements installés pendant cet intervalle. Il ne reste plus qu'à reporter ces valeurs dans les formules donnant  $\rho_n, \rho'_n, \rho''_n$  pour les modèles C, D ou E<sup>(1)</sup> en sommant sur les différents intervalles. (En fait il s'agit plus ici du modèle E<sup>(1)</sup> et même d'un modèle encore plus compliqué car il y aura autant de  $(p, w)$  que d'intervalles  $j$ ).

Nous allons maintenant essayer d'appliquer ces résultats dans le cas de trois techniques.

### III – ENSEMBLE D'EQUIPEMENTS ENERGETIQUES REpondant A TROIS MODELES TYPES DE CONSOMMATION D'ENERGIE.

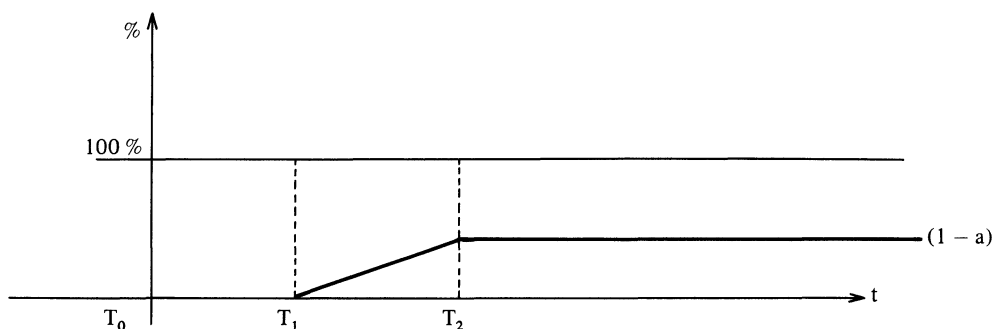
#### Hypothèses

Nous supposons l'apparition successive de deux techniques A et B qui se substituent à une troisième technique C. Cette substitution s'effectue de façon linéaire.

Jusqu'à la date  $T_0$  nous n'avons que la technique C. En  $T_0$  apparaît la technique B qui se substitue linéairement à C jusqu'en  $T_1$ . En  $T_1$  apparaît la technique A et il va y avoir dès lors remplacement de la technique C par les techniques A et B. En  $T_2$  la technique C aura complètement disparu, et les techniques A et B se stabilisent alors aux valeurs atteintes en  $T_2$ . La prévision est supposée faite à  $n > T_2$ .  $T_0$  est supposé pouvoir être pris comme instant 0.

#### Schémas d'évolution des techniques (en % du marché)

##### Technique A



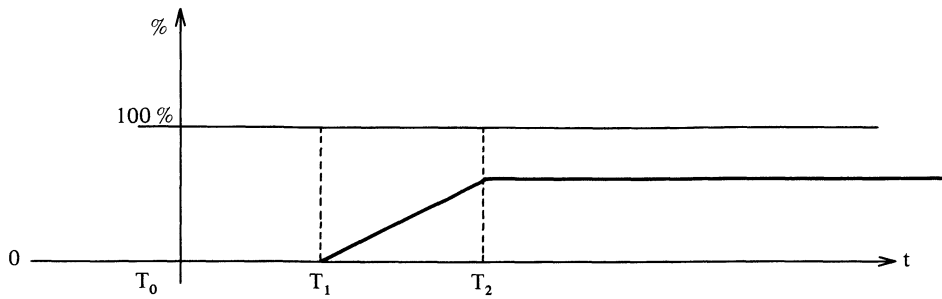
$$x^A(t) = 0 \quad \text{pour } t < T_1$$

$$x^A(t) = (t - T_1) \frac{1 - a}{T_2 - T_1} \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

$$x^A(t) = 1 - a \quad \text{pour } t > T_2$$

(1) Voir R.S.A. 1963 – XI – 1 – Article de M. Dourille.

Technique B



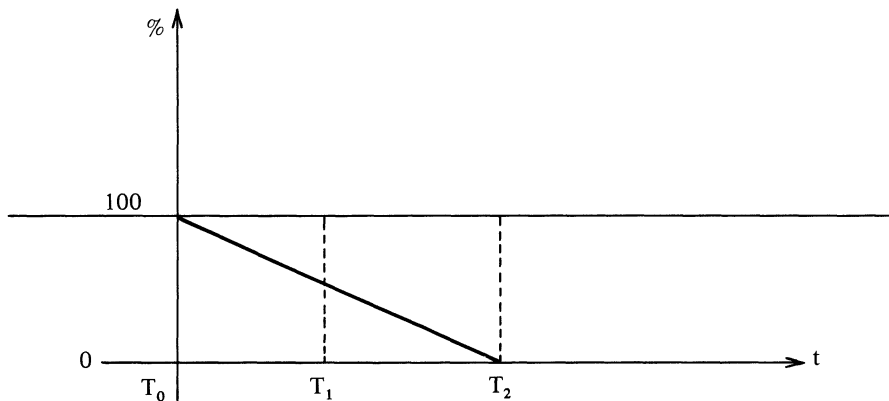
$$x^B(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < T_0$$

$$x^B(t) = \frac{t}{T_2} \quad \text{pour} \quad T_0 \leq t \leq T_1$$

$$x_B(t) = \left( a - \frac{T_1}{T_2} \right) \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{pour} \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

$$x^B(t) = a \quad \text{pour} \quad t > T_2$$

Technique C



$$x^C(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t < T_0$$

$$x^C(t) = 1 - \frac{t}{T_2} \quad \text{pour} \quad T_0 \leq t \leq T_2$$

$$x^C(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > T_2$$

Nous supposons de plus que la durée de vie des appareils ( $D$ ) est telle que  $D > n > T_2$

1/ Pour la période  $(0, T_1)$  nous n'assistons qu'à une simple substitution entre deux techniques. Nous pouvons donc appliquer directement les résultats de M. MONDON, soit :

$$\begin{cases} Z_T^B(t) = Z_0^B(1 + p^B T + w^B(t - T)) \\ Z_T^C(t) = Z_0^C(1 + p^C T + w^C(t - T)) \end{cases}$$

$$x^B = \frac{t}{T_2} \qquad x^C = 1 - \frac{t}{T_2}$$

d'où

$$\pi_1 = \frac{Z_0^C p^C}{Z_0^C} = \rho^C \qquad \gamma = \frac{1}{T_2} \frac{Z_0^B p^B - Z_0^C p^C}{Z_0^C}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{T_2} \left( \frac{Z_0^B - Z_0^C}{Z_0^C} \right)$$

$$w_1 = w^C \qquad w_2 = \frac{1}{T_2} \left( \frac{w^B Z_0^B - w^C Z_0^C}{Z_0^C} \right)$$

Les valeurs de  $p_1$  et  $w_1$  pour les équipements installés pendant cette période seront donc :

$$\begin{cases} p_1 = p^C + \frac{1}{T_2} \left( \frac{Z_0^B - Z_0^C}{Z_0^C} \right) + \frac{1}{T_2} \left( \frac{Z_0^B p^B - Z_0^C p^C}{Z_0^C} \right) T \text{ moyen} \\ w_1 = w^C + \frac{1}{T_2} \left( \frac{w^B Z_0^B - w^C Z_0^C}{Z_0^C} \right) T \text{ moyen} \end{cases}$$

2/ Pour la période  $(T_1, T_2)$  nous pouvons écrire avec des notations identiques aux précédentes :

$$\begin{aligned} Z_T^A(t) &= Z_{T_1}^A(1 + p^A(T - T_1) + w^A(t - T)) \\ Z_T^B(t) &= Z_{T_1}^B(1 + p^B(T - T_1) + w^B(t - T)) \\ Z_T^C(t) &= Z_{T_1}^C(1 + p^C(T - T_1) + w^B(t - T)) \end{aligned}$$

avec

$$x^A = \frac{1-a}{T_2 - T_1} t - \frac{1-a}{T_2 - T_1} T_1 = \frac{1-a}{T_2 - T_1} (t - T_1)$$

$$x^B = \left( a - \frac{T_1}{T_2} \right) \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} + \frac{T_1}{T_2}$$

$$x^C = \frac{t - T_1}{T_2} + 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Nous pouvons appliquer les formules générales de la partie II à la période  $(T_1, T_2)$  en prenant comme variable non pas  $t$  mais  $t - T_1$  (changement d'origine).

Nous avons dans ce cas :

$$\pi'_1 = \frac{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B p^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C p^C}{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C}$$

$$\pi'_2 = \frac{\frac{1-a}{T_2 - T_1} Z_{T_1}^A + \frac{T_2 a - T_1}{T_2(T_2 - T_1)} Z_{T_1}^B - \frac{1}{T_2} Z_{T_1}^C}{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C}$$

$$\gamma' = \frac{\frac{1-a}{T_2 - T_1} Z_{T_1}^A p^A + \frac{T_2 a - T_1}{T_2(T_2 - T_1)} Z_{T_1}^B p^B - \frac{1}{T_2} Z_{T_1}^C p^C}{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C}$$

$$w'_1 = \frac{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B w^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C w^C}{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C}$$

$$w'_2 = \frac{\frac{1-a}{T_2 - T_1} Z_{T_1}^A w^A + \frac{T_2 a - T_1}{T_2(T_2 - T_1)} Z_{T_1}^B w^B - \frac{1}{T_2} Z_{T_1}^C w^C}{\frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Z_{T_1}^C}$$

Nous remarquons que  $Z_{T_1}^A$  est une donnée puisque il s'agit de la consommation unitaire du nouvel équipement qui entre en service en  $T_1$ .

Nous avons d'autre part :

$$Z_{T_1}^B = Z_0^B (1 + p^B T_1)$$

$$Z_{T_1}^C = Z_0^C (1 + p^C T_1)$$

Il en résulte qu'il est parfaitement possible de calculer les  $\pi'_2$ ,  $\pi'_1$ ,  $w'_1$ ,  $w'_2$  et  $\gamma'$  donc les valeurs  $p_2$  et  $w_2$  à utiliser pour les équipements installés entre  $T_1$  et  $T_2$ .

$$\begin{cases} p_2 = \pi'_1 + \pi'_2 + \gamma' T \text{ moyen} \\ w_2 = w'_1 + w'_2 T \text{ moyen} \end{cases}$$

3/ Pour les équipements installés après  $T_2$  il n'y a plus substitution. Nous donc :

$$p_3 = (1 - a) p^A + a p^B$$

$$w_3 = (1 - a) w^A + a w^B$$

4/ Application du modèle E

$$\rho_0 = Z_0^C \left( 1 + \frac{D+1}{2} (w^C - p^C) \right)$$

$$\rho'_n = Z_0^C \left( 1 + \frac{D-n+1}{2} (w^C - p^C) \right) + n w^C Z_0^C$$

d'où 
$$\rho'_n = Z_0^C \left( 1 + \frac{D+n+1}{2} w^C - \frac{D-n+1}{2} p^C \right)$$

Le calcul de  $\rho''_n$  et de  $\rho'''_n$  va être plus difficile car il faut tenir compte des différentes périodes, soit :

$$\rho''_n = \frac{1}{(n+1)} \sum_0^{T_1} Z_0^C (1 + p_1 i + w_1 (n-i))$$

$$+ \frac{1}{(n+1)} \sum_{T_1}^{T_2} Z_{T_1} (1 + p_2 (i - T_1) + w_2 (n-i))$$

$$+ \frac{1}{(n+1)} \sum_{T_2}^n Z_{T_2} (1 + p_3 (i - T_2) + w_3 (n-i))$$

En effet, de 0 à n il y a n + 1 années, avec :

$$Z_{T_1} = \frac{T_1}{T_2} Z_{T_1}^B + \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) Z_{T_1}^C$$

$$Z_{T_2} = (1 - a) Z_{T_2}^A + a Z_{T_2}^B$$

$Z_{T_1}^B$ ,  $Z_{T_1}^C$ ,  $Z_{T_2}^A$ ,  $Z_{T_2}^B$  étant calculés comme il a été indiqué ci-dessus.

Soit :

$$\rho''_n = \frac{Z_0^C}{n+1} \left( T_1 + 1 + \frac{T_1(T_1+1)}{2} (w_1 + p_1) + T_1 (n - T_1) w_1 \right)$$

$$+ \frac{Z_{T_1}}{n+1} \left( T_2 - T_1 + \frac{(T_2 - T_1)(T_2 - T_1 + 1)}{2} (w_2 + p_2) \right)$$

$$+ (T_2 - T_1) w_2 (n - T_0)$$

$$+ \frac{Z_{T_2}}{n+1} \left( n - T_1 + \frac{(n - T_2)(n - T_2 + 1)}{2} (w_3 + p_3) \right)$$

et

$$\rho'''_n = \rho''_n$$

Nous pouvons alors appliquer les modèles à coefficients techniques utilisés par le C E R E N.

Nous voyons donc en conclusion, que dans le cas de trois techniques, il est possible d'utiliser ce modèle de prévision.