REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE DUMAS

Dénombrement de cheminements

Revue de statistique appliquée, tome 21, nº 3 (1973), p. 99-115
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1973__21_3_99_0>

© Société française de statistique, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉNOMBREMENT DE CHEMINEMENTS (1)

Maurice DUMAS

L'étude d'une épreuve séquentielle par attributs ne peut être complète sans que l'on ait à évaluer le nombre – parfois extrêmement considérable – des cheminements qui, sur le graphique de l'épreuve, joignent l'origine à chacun des points d'acceptation et de rejet de l'épreuve. L'auteur indique comment il est possible, sans avoir recours à aucun ordinateur, d'effectuer pratiquement de tels dénombrements, de façon rigoureuse ou de façon approchée.

Table des Matières

1 – But, terminologie et conventions.

2 – Dénombrements effectués de proche en proche.

3 – Dénombrements effectués à l'aide de blocs rectangulaires.

4 – Région à contour régulier.

5 – Limites supérieures de la note d'un point.

6 – Applications.

1 – BUT TERMINOLOGIE ET CONVENTIONS

a) La question se pose parfois de déterminer le nombre des cheminements qui, dans un quart de plan ox, oy, partent de l'origine O pour aboutir au point de coordonnées entières x, y, étant entendu que le *pas* d'un cheminement est soit d'une unité suivant ox (pas "bon") soit d'une unité suivant oy (pas "défectueux") ; très généralement des contraintes sont imposées aux cheminements, une ligne de contrainte étant une ligne sur laquelle, ou juste au delà de laquelle, tout cheminement prend fin.

Le but de la présente note est d'exposer comment il est possible, sans employer aucun ordinateur, d'effectuer des dénombrements de tels cheminements : dénombrements rigoureux ou dénombrements approchés, constituant des limites supérieures des précédents.

---

(1) Article remis le 15/6/72, révisé le 21/12/72.

b) Des nombres de cheminements sont utiles à connaître notamment en matière de contrôle de fabrication, lorsque, d'après le plan d'une épreuve séquentielle par attributs, on veut déterminer la courbe d'efficacité de l'épreuve (n° 6). C'est par suite une terminologie correspondant directement aux épreuves séquentielles qui est utilisée dans la suite.

On distingue l'épreuve séquentielle exhaustive, de l'épreuve séquentielle non-exhaustive, ou épreuve de Wald.

La première, dont la théorie([1]) tient exactement compte de l'épuisement du lot soumis à l'épreuve du fait du prélèvement de l'échantillon, est valable sans restriction et est aussi économique que possible, tandis que l'épreuve de Wald n'est valable que pour un effectif de lot suffisamment grand, eu égard aux autres données.

Finalement, le cas considéré plus loin est celui de deux lignes de contrainte encadrant l'origine et dites respectivement *ligne d'acceptation* ou ligne A et *ligne de rejet* ou ligne R. Ce sont des lignes brisées, déduites des courbes ou droites dont les équations sont données par la théorie, et ayant pour allures générales celles de la figure 2.1 en cas d'épreuve exhaustive et, en moins régulier, de la figure 4.1 en cas d'épreuve non-exhaustive.

Le tronquage d'une épreuve n'est pas envisagée mais ne soulève pas de difficulté particulière en ce qui concerne les dénombrements.

c) Le nombre des cheminements aboutissant à un point est dit la *note* de ce point et est symbolisé par N° (x , y , E) ; la lettre E rappelle que cette note dépend de l'épreuve E, dont le graphique est constitué par les lignes d'acceptation et de rejet compte tenu desquelles le dénombrement est fait.

---

(1) voir notamment :

– G. PANIZZON. Controlo sequenziale esaustivo per attributi.
Statistica, 1966, Vol. XXVI n° 2.

L'auteur indique comment il est possible, avec l'aide d'une table donnant log x ! et grâce à de nombreuses additions algébriques, d'établir le plan d'une épreuve séquentielle exhaustive ; il donne en outre le programme à introduire dans un ordinateur pour arriver au même résultat.

– M. DUMAS. L'épreuve séquentielle exhaustive.
Revue de Statistique Appliquée 1970 Vol. XVIII n° 2 ;

et principalement :

Tables commentées des épreuves séquentielles exhaustive et non-exhaustive.
Sciences et Techniques de l'Armement, 1er Fasc. 1971, puis Dunod éditeur 1971.

A côté de tous les commentaires théoriques désirables, cet ouvrage contient, dans le cadre de données harmonieusement échelonnées :

– relativement à l'épreuve séquentielle exhaustive, des tables grâce auxquelles un nombre restreint d'additions conduit au plan désiré ;

– relativement à l'épreuve séquentielle non-exhaustive, environ 350 plans entièrement calculés.

Lorsque sur le graphique d'une épreuve on désire écrire à côté de chaque point, la note de ce point, il est commode de disposer l'axe des x le long du bord gauche de la page et l'axe des y sur la première ligne de cette page, car pratiquement x_{max} est très supérieur à y_{max}.

Il suffit au lecteur de tourner la page de 90° pour retrouver les axes dans leur position classique ; il n'en reste pas moins que la disposition qui précède, adoptée dans la présente note, conduit à parler de *lignes* d'abscisses et de *colonnes* d'ordonnées.

d) Pour éviter des redites, il est entendu que tous les points considérés dans la suite comme susceptibles d'être affectés d'une note, sont de coordonnées entières.

2 – DENOMBREMENTS EFFECTUES DE PROCHE EN PROCHE

a) La formule de récurrence suivante, valable quel que soit E :

$$N^\circ(x, y, E) = N^\circ(x-1, y, E) + N^\circ(x, y-1, E) \tag{2.1}$$

traduit le fait que tout cheminement aboutissant au point de coordonnées x et y, provient soit du point $x-1$ et y (cas où le dernier pas est bon), soit du point x et $y-1$ (cas où le dernier pas est défectueux).

Cette formule, complétée quel que soit E, par :

$$N^\circ(0, 0, E) = 1 \tag{2.2}$$

permet la détermination de proche en proche de la note de n'importe quel point de E, à la condition de tenir exactement compte des lignes de contrainte.

b) Sur la figure 1, les lignes de contrainte sont les lignes d'acceptation et de rejet d'une certaine épreuve séquentielle exhaustive. Elles se présentent sous la forme de lignes brisées en escalier, composées de paliers parallèles à Ox, de longueurs variables, se terminant par des décrochements d'une unité, parallèles à Oy.

On remarque ceci :

– les décrochements sont tous situés *entre* deux lignes d'abscisses entières ;

– les paliers de la ligne d'acceptation sont tous situés *entre* deux lignes d'ordonnées entières ;

– les paliers de la ligne de rejet passent par les points de rejet.

c) Du fait de ces dispositions, il y a acceptation lorsque le cheminement *traverse* la ligne d'acceptation, et rejet, lorsqu'il *atteint* la ligne de rejet ; de plus, comme le montrent les notes écrites à côté des points de la figure 1, la formule (1) conduit à ceci :

– au voisinage de l'origine, là où aucune contrainte ne se fait sentir, les notes sont celles données par la figure 2, à savoir :

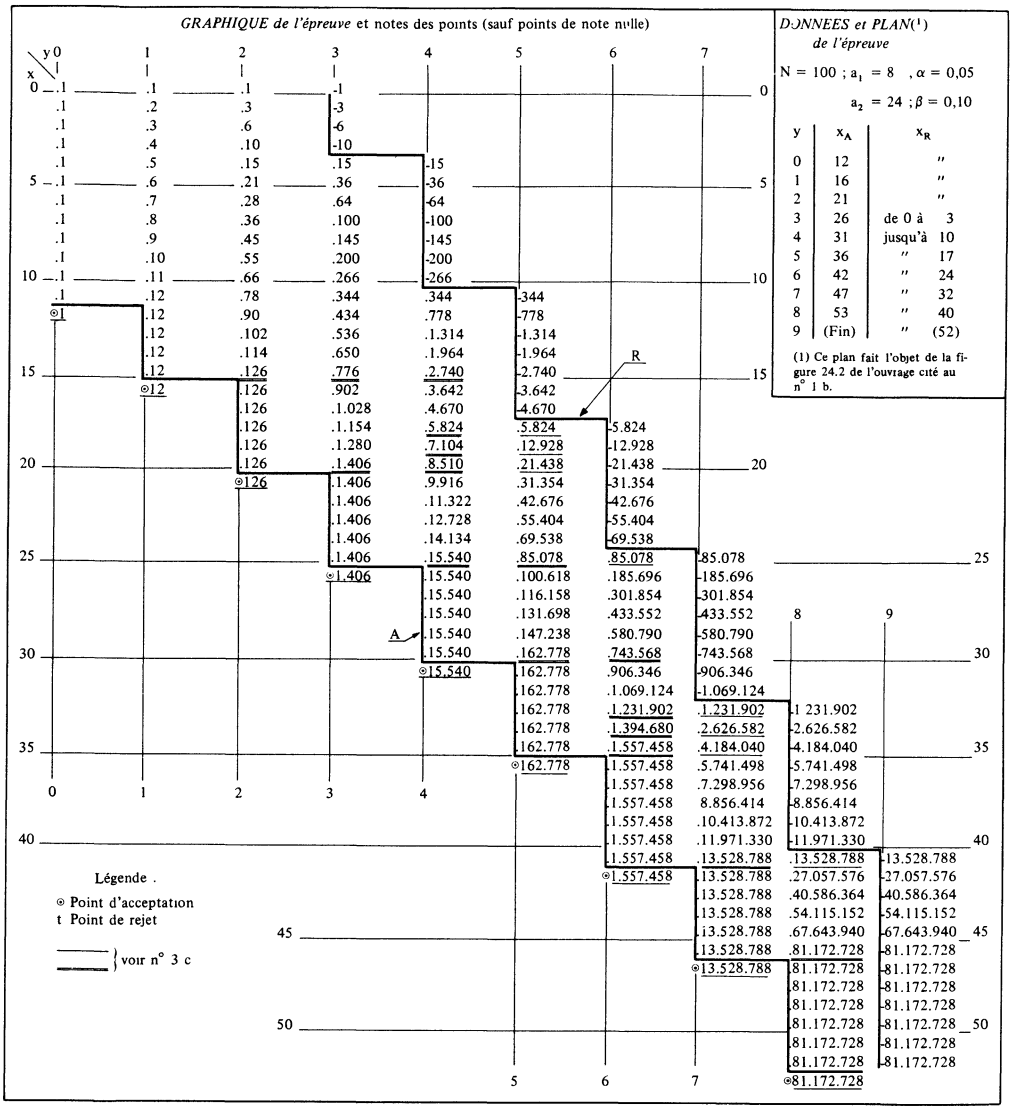


Figure 2.1 – Notes des pages d'une épreuve séquentielle exhaustive

$$N^{\circ}(x\,,y\,,0) = C^{y}_{x+y} = \frac{(x+1)\,(x+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x+y)}{y\,!}\;; \qquad (2.3)$$

– le long d'un palier de la ligne d'acceptation, les points ont la même note ;

– si $x_A^{(y)}$ est l'abscisse du point d'acceptation d'ordonnée y :

$$N^{\circ}(x_A^{(y)}\,,y\,,E) = N^{\circ}(x_A^{(y-1)} - 1\,,y\,,E)\;; \qquad (2.4)$$

– chaque point de la ligne de rejet a pour note celle du point voisin, de même abscisse ;

x \ y	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	4	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210
5	1	6	21	56	126	252	462
6	1	7	28	84	210	462	924
7	1	8	36	120	330	792	1 716
8	1	9	45	165	495	1 287	3 003
9	1	10	55	220	715	2 002	5 005
10	1	11	66	286	1 001	3 003	8 008
11	1	12	78	364	1 365	4 368	12 376
12	1	13	91	455	1 820	6 188	18 564
13	1	14	105	560	2 380	8 568	27 132
14	1	15	120	680	3 060	11 628	38 760
15	1	16	136	816	3 876	15 504	54 264
16	1	17	153	969	4 845	20 349	74 613
17	1	18	171	1 140	5 985	26 334	100 947
18	1	19	190	1 330	7 315	33 649	134 596
19	1	20	210	1 540	8 855	42 504	177 100
20	1	21	231	1 771	10 626	53 130	230 230
21	1	22	253	2 024	12 650	65 780	296 010
22	1	23	276	2 300	14 950	80 730	376 740
23	1	24	300	2 600	17 550	98 280	475 020
24	1	25	325	2 925	20 475	118 755	593 775
25	1	26	351	3 276	23 751	142 506	736 281
26	1	27	378	3 654	27 405	169 911	906 192
27	1	28	406	4 060	31 465	201 376	1 107 568
28	1	29	435	4 495	35 960	237 336	1 344 904
29	1	30	465	4 960	40 920	278 256	1 623 160
30	1	31	496	5 456	46 376	324 632	1 947 792

Figure 2.2 : Valeurs de C^{y}_{x+y}

– tous les points extérieurs au domaine limité par les lignes A et R sont de note nulle, à la seule exception des points d'acceptation eux-mêmes.

d) Les notes devenant rapidement considérables, il peut être commode de fractionner les calculs, en appliquant cette remarque que les cheminements aboutissant au point de coordonnées x_2 et y_2, passent tous, au niveau de l'abscisse $x_1 < x_2$, par l'un des points intérieurs aux lignes A et R ; plus précisément,

si y_1 et y'_1 sont les ordonnées des points d'abscisse x_1 correspondant respectivement à la ligne A (ordonnée arrondie à l'entier supérieur) et à la ligne R, les cheminements en cause passent, pour $x = x_1$, par l'un des points d'ordonnée y telle qu'à la fois l'on ait :

$$y_1 \leqslant y \leqslant y'_1 - 1 \quad \text{et} \quad y \leqslant y_2 \,. \tag{2.5}$$

On peut donc opérer ainsi :

– déterminer les notes des points d'abscisse x_1 dans E ; soit $N^\circ(x_1, y, E)$ ces notes ;

– amputer le graphique de E de toutes les lignes d'abscisse inférieure à x_1 et considérer que la partie restante définit une "épreuve" E' ;

– déterminer de façon usuelle les notes dans E' du point de coordonnées x_2 et y_2, dans chacun des cas où sur la première ligne de E', celle d'abscisse x_1, les notes successives à partir de $y = y_1$, seraient :

1er cas : 1 0 0 0 . . . . soit : note $N_1^\circ(x_2, y_2, E')$;

2ème cas : 0 1 0 0 . . . . soit : note $N_2^\circ(x_2, y_2, E')$;

3ème cas : 0 0 1 0 . . . . soit : note $N_3^\circ(x_2, y_2, E')$;

et ainsi de suite jusqu'à ce que le 1 se soit trouvé dans toutes les colonnes d'ordonnée y satisfaisant à (5) ;

– finalement :

$$\begin{aligned} N^\circ(x_2, y_2, E) = {} & N^\circ(x_1, y_1, E) \,.\, N_1^\circ(x_2, y_2, E') + \\ & N^\circ(x_1, y_1 + 1, E) \,.\, N_2^\circ(x_2, y_2, E') + \\ & N^\circ(x_1, y_1 + 2, E) \,.\, N_3^\circ(x_2, y_2, E') + \text{etc.}\,.\,. \end{aligned}$$

3 – DENOMBREMENTS EFFECTUES A L'AIDE DE BLOCS RECTANGULAIRES

a) On désigne ici par *bloc rectangulaire* un ensemble de points qui appartiennent au domaine limité par les lignes A et R d'une épreuve E, et qui, dans ce domaine, sont situés d'une part entre deux abscisses et d'autre part entre une portion rectiligne de la ligne A et une ligne parallèle à cette portion, sans point commun avec R – et cela sous réserve que cet ensemble soit précédé d'une ligne ne comprenant aucun point de rejet à la hauteur des colonnes du bloc.

Un bloc rectangulaire se définit par sa *position,* caractérisée par les coordonnées X et Y de son point de départ, et par sa *taille,* caractérisée par les valeurs de p et de q telles que $X + p$ et $Y + q$ soient les coordonnées de son point terminal, point opposé diagonalement au point de départ ; il comprend donc $p + 1$ lignes et $q + 1$ colonnes.

Chacun des points du bloc a une note qui se déduit (cf. ci-dessous) de ses *valeurs directrices* ; celles-ci sont les notes des points précédant immédiatement la première ligne du bloc, c'est-à-dire les points d'abscisse $X - 1$ dans chacune des colonnes du bloc.

b) La note de tout point d'un bloc rectangulaire peut être obtenue en procédant de proche en proche (n° 2) à partir des valeurs directrices du bloc ; mais elle peut l'être aussi en appliquant la formule suivante :

$$N^\circ(X+i\,,Y+j) = N^\circ(X-1\,,Y+j)\,.\,C_i^0 + N^\circ(X-1\,,Y+j-1)\,C_{i+1}^1 + \ldots + N^\circ(X-1\,,Y)\,C_{i+j}^j \quad (3.1)$$

dans laquelle :

X, Y, p et q : voir ci-dessus ;

i et j, avec $0 \leqslant i \leqslant p$ et $0 \leqslant j \leqslant q$, sont les coordonnées du point dans le bloc ;

de C_i^0 à C_{i+j}^j : à lire sur la figure 2.2, après changement des notations.

La formule (1) se vérifie immédiatement ; en particulier, pour $i = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on détermine la première ligne du bloc, on a $C_{i+j}^j = 1$ quel que soit j, et (1) indique que la note d'un point de cette ligne est égale à la somme des valeurs directrices jusqu'à l'ordonnée de ce point.

Exemple. – Soit, dans le cas de la figure 2.1, à appliquer la formule (1) pour déterminer la note du point de coordonnées $x = 15$ et $y = 3$ – note que l'on sait déjà être égale à 776.

En rattachant ce point au bloc défini par :

$$X = 12\ ; \quad Y = 1\ ; \quad p = 3 \quad \text{et} \quad q = 2\ ,$$

on doit prendre $i = 3$ et $j = 2$ puis, comme valeurs directrices sur $x = 11$: 12, 78 et 344. Sur la figure 2.2, on lit les coefficients 1, 4 et 10. Finalement :

$$N^\circ(X+3\,,Y+2) = 344 \times 1 + 78 \times 4 + 12 \times 10 = 776.$$

c) La note de tout point d'une épreuve E peut être calculée uniquement à l'aide de blocs rectangulaires, car il est toujours possible de diviser la totalité du domaine de E en une succession de blocs rectangulaires, la dernière ligne d'un bloc contenant les valeurs directrices du bloc suivant. Il convient pour effectuer cette division de se laisser guider en premier lieu par les décrochements de la ligne d'acceptation – puisque tout bloc doit s'appuyer sur une ligne d'acceptation – puis par ceux de la ligne de rejet, des précautions étant seulement à prendre pour qu'en dépit des décrochements de celle-ci, une valeur directrice figure même dans la dernière colonne de chaque bloc.

Naturellement, à l'occasion d'un dénombrement on peut combiner à volonté les processus "de proche en proche" et "par blocs rectangulaires". Il suffit de parvenir à déterminer les valeurs directrices du bloc rectangulaire auquel appartient le point dont la note est recherchée.

Dans le cas de l'épreuve de la figure 2.1, l'effectif N du lot n'est pas assez grand pour que l'application de ce qui précède soit particulièrement avantageux ; néanmoins, si l'on avait voulu déterminer les notes des points d'acceptation de cette épreuve, on aurait, en combinant "de proche en proche" et "blocs rectangulaires", évité l'écriture de 83 notes sur les 115 au delà de $x = 11$, notes des points de rejet non comprises.

Sont soulignées 2 fois les 16 notes qu'il y aurait eu à calculer par la formule (1).

Sont soulignées 1 fois 12 notes recopiées et 4 notes résultant de l'addition de 2 autres.

4 – REGION A CONTOUR REGULIER

a) Il arrive dans le cas de certaines épreuves séquentielles non-exhaustives que, dans une région, la ligne A et la ligne R aient l'une et l'autre l'allure d'un escalier dont les marches seraient toutes de même longueur. Si de plus (voir figure 1) les décrochements de la ligne A suivent d'une unité ceux de la ligne R, on dit que l'on a affaire à un *contour régulier* dans la région considérée.

En cas de contour régulier, l'épreuve se divise (n° 3 c) en une succession de blocs rectangulaires tous de même taille (même nombre $p + 1$ de lignes, même nombre $q + 1$ de colonnes).

La note d'un point quelconque $Z(x, y)$ se déduit des valeurs directrices du bloc auquel Z appartient, par le moyen du processus du n° 3 ; il est par suite commode d'adopter pour les valeurs directrices des blocs successifs des symboles relativement simples ; ainsi les notes des points, au nombre de $q + 2$, situés au niveau de la ligne terminale du bloc de rang m, sont dans la suite désignées par :

$$u_m^{(0)} \quad u_m^{(1)} \quad u_m^{(2)} \quad \ldots\ldots \quad u_m^{(q)} \quad u_m^{(q+1)} .$$

Toutes ces notes, sauf la première, sont les valeurs directrices du bloc de rang $m + 1$; de plus, $u_m^{(q+1)}$ qui est écrite en dehors du bloc de rang m, est connue, car :

$$u_m^{(q+1)} = u_m^{(q)} .$$

Exemple. – Dans le cas de la figure 1, les blocs successifs ont leur taille commune définie par $p = 3$ et $q = 3$; les points de départ de ces blocs ont respectivement pour coordonnées 5 et 0, 9 et 1, 13 et 2, etc... Les valeurs directrices du premier bloc sont :

$$u_0^{(1)} = 1 \ ; \ u_0^{(2)} = 5 \ ; \ u_0^{(3)} = 15 \text{ puis } u_0^{(4)} = u_0^{(3)} = 15 .$$

Etant donné le processus de dénombrement par blocs rectangulaires du n° 3, et les valeurs $p = 3$ et $q = 3$ – auxquelles correspondent, d'après la figure

a) *PLAN* (1) *de l'épreuve*

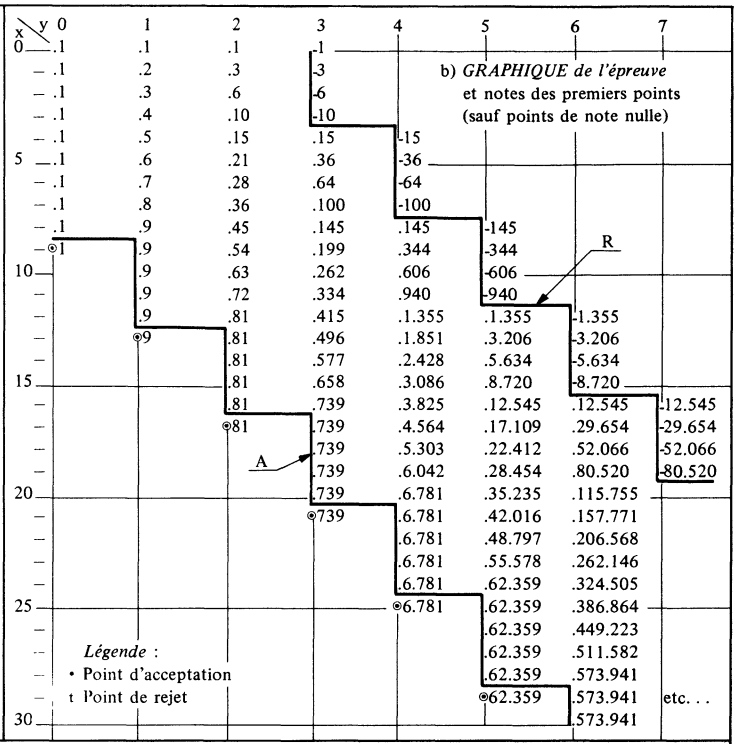
y	x_A	x_R
0	9	"
1	13	"
2	17	"
3	21	de 0 à 3
4	25	jusqu'à 7
5	29	" 11
6	33	" 15
7	37	" 19
8	41	" 23

etc. . .

(1) Ce plan est approximativement celui de l'épreuve séquentielle non-exhaustive, de données :

$p_1 = 0{,}12$; $\alpha = 0{,}05$

$p_2 = 0{,}30$; $\beta = 0{,}10$



c) *VALEURS DIRECTRICES* des blocs successifs, et rapports leur correspondant.

m	$u_m^{(1)}$	$u_m^{(2)}$	$u_m^{(3)} = u_m^{(4)}$	$u_m^{(2)}/u_m^{(1)}$	$u_m^{(3)}/u_m^{(1)}$	$u_{m+1}^{(1)}/u_m^{(1)}$	$u_{m+1}^{(2)}/u_m^{(2)}$	$u_{m+1}^{(3)}/u_m^{(3)}$
1	1	5	15	5,0000	15,000			
2	9	45	145	5,0000	16,112	9,0000	9,0000	9,6667
3	81	415	1.355	5,1236	16,690	9,0000	9,2223	9,3448
4	739	3.825	12.545	5,1760	16,976	9,1236	9,2168	9,2583
5	6.781	35.235	115.755	5,1962	17,071	9,1760	9,2118	9,2272
6	62.359	324.505	1.066.745	5,2038	17,106	9,1962	9,2098	9,2156
7	573.941	2.988.355	9.825.955	5,2067	17,120	9,2038	9,2090	9,2113

Tendances calculées : $s_2 = 5{,}2084$ $s_3 = 17{,}127$ $k = 9{,}2084$

Figure 4.1 – Epreuve à contour régulier au-delà de x = 4

2.2, les coefficients 1, 4, 10 et 20 – les valeurs directrices d'un bloc peuvent être déduites de celles du bloc précédent par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{m+1}^{(1)} = u_m^{(2)} + 4\, u_m^{(1)} \; ; \\ u_{m+1}^{(2)} = u_m^{(3)} + 4\, u_m^{(2)} + 10\, u_m^{(1)} \; ; \\ u_{m+1}^{(3)} = u_m^{(4)} + 4\, u_m^{(3)} + 10\, u_m^{(2)} + 20\, u_m^{(1)} \text{ , avec } u_m^{(4)} = u_m^{(3)} \; ; \\ u_{m+1}^{(4)} = u_{m+1}^{(3)} \; . \end{cases} \tag{4.1}$$

A remarquer que la note $u_{m+1}^{(0)}$ n'a pas à figurer dans ces relations puisqu'elle n'est pas valeur directrice du bloc de rang $m+2$.

b) Les relations (1), valables pour $p = 3$ et $q = 3$, indiquent que la forme générale de telles relations est :

$$
\begin{aligned}
&u_{m+1}^{(1)} = c_1\, u_m^{(1)} + u_m^{(2)} \;; \\
&u_{m+1}^{(2)} = c_2\, u_m^{(1)} + c_1\, u_m^{(2)} + u_m^{(3)} \;; \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&u_{m+1}^{(q-1)} = c_{q-1} u_m^{(1)} + c_{q-2}\, u_m^{(2)} + \dots + c_1\, u_m^{(q-1)} + u_m^{(q)} \;; \\
&u_{m+1}^{(q)} = c_q\, u_m^{(1)} + c_{q-1} u_m^{(2)} + \dots + c_2\, u_m^{(q-1)} + (c_1 + 1)\, u_m^{(q)} \;; \\
&u_{m+1}^{(q+1)} = u_{m+1}^{(q)}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

avec $c_j = C_{p+j}^{j}$ (voir la figure 2.2) et :

$$1 \leqslant p \;;\; 1 \leqslant j \leqslant q\,.$$

Des considérations, non développées ici, conduisent aux propositions suivantes :

1/ il existe un nombre k_q, indépendant de j et des valeurs initiales $u_0^{(j)}$, mais dépendant de p, tel que :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{u_{m+1}^{(j)}}{u_m^{(j)}} = k_q \qquad 1 \leqslant j \leqslant q+1 \;;$$

2/ il existe q nombres $s_j^{(q)}$, $2 \leqslant j \leqslant q+1$, indépendants des valeurs initiales $u_0^{(j)}$, tels que :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{u_m^{(j)}}{u_m^{(1)}} = s_j^{(q)}\,,$$

la dernière relation (2) entraînant d'ailleurs $s_{q+1}^{(q)} = s_q^{(q)}$;

3/ la valeur $s_2^{(q)}$ est celle de la plus grande, en module, des racines de l'équation:

$$
\begin{vmatrix}
-t & 1 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \\
c_2 & -t & 1 \dots\dots\dots 0 & 0 \\
\dots\dots\dots\dots & & & \\
c_{q-1} & c_{q-2} & c_{q-3} \dots\dots -t & 1 \\
c_q & c_{q-1} & c_{q-2} \dots\dots c_2 & 1-t
\end{vmatrix} = 0
$$

4/ les valeurs de k_q et des $s_j^{(q)}$ se déduisent de $s_2^{(q)}$ par l'intermédiaire des relations (2) ; ainsi :

$$k_q = c_1 + s_2^{(q)} ;$$

$$k_q\, s_2^{(q)} = c_2 + c_1\, s_2^{(q)} + s_3^{(q)} , \quad \text{ou} \quad s_3^{(q)} = [s_2^{(q)}]^2 - c_2$$

$$s_4^{(q)} = [s_2^{(q)}]^3 - 2c_2\, s_2^{(q)} - c_3$$

N.B. 1. – Les propositions ci-dessus sont encore vérifiées pour des valeurs de c_j nettement différentes de celles dites plus haut et seules considérées dans la suite.

	q = 2		q = 3			q = 4				
p	$k_2^{(p)}$	$s_2^{(2)} = s_3^{(2)}$	$k_3^{(p)}$	$s_2^{(3)}$	$s_3^{(3)} = s_4^{(3)}$	$k_4^{(p)}$	$s_2^{(4)}$	$s_3^{(4)}$	$s_4^{(4)} = s_5^{(4)}$	p
1	4,303	2,303	5,064	3,064	6,40	5,535	3,535	9,50	18,9	1
2	6,000	3,000	7,135	4,135	11,10	7,809	4,809	17,13	43,5	2
3	7,702	3,702	9,208	5,208	17,13	10,090	6,090	27,09	84,1	3
4	9,405	4,405	11,282	6,282	24,47	12,369	7,369	39,30	144,0	4
5	11,110	5,110	13,356	7,356	33,12	14,647	8,647	53,77	227,4	5
6	12,815	5,815	15,430	8,430	43,08	16,926	9,926	70,52	338,1	6
7	14,521	6,521	17,504	9,504	54,33	19,204	11,204	89,53	479,7	7
8	16,227	7,227	19,578	10,578	66,90	21,483	12,483	110,81	656,7	8
9	17,933	7,933	21,653	11,653	80,79	23,761	13,761	134,36	872,1	9
10	19,639	8,639	23,728	12,728	95,99	26,039	15,039	160,17	1 130,2	10
11	21,346	9,346	25,802	13,802	112,50	28,317	16,317	188,24	1 434,9	11
12	23,052	10,052	27,877	14,877	130,32	30,595	17,595	218,58	1 790,0	12
13	24,759	10,759	29,952	15,952	149,45	32,873	18,873	251,19	2 199,1	13
14	26,466	11,466	32,026	17,026	169,89	35,151	20,151	286,07	2 666,5	14
15	28,173	12,173	34,101	18,101	191,64	37,429	21,429	323,22	3 196,1	15
16	29,879	12,879	36,176	19,176	214,70	39,708	22,708	362,66	3 792,1	16
17	31,586	13,586	38,250	20,250	239,07	41,986	23,986	404,35	4 457,6	17
18	33,293	14,293	40,325	21,325	264,76	44,265	25,265	448,31	5 196,6	18
19	35,000	15,000	42,400	22,400	291,76	46,543	26,543	494,55	6 012,8	19
20	36,707	15,707	44,475	23,475	320,09	48,822	27,822	543,07	6 911,0	20
25	45,242	19,242	54,848	28,848	481,21	60,213	34,213	819,5	12 753.	25
32	57,191	24,191	69,371	36,371	761,8	76,158	43,158	1 301,6	25 418.	32
100	173,272	72,272	210,455	109,455	6 829,4	231,062	130,062	11 765.	683 389.	100

Légende

p et q : valeurs de définition de la taille d'un bloc de p + 1 lignes et q + 1 colonnes.
m : rang du bloc considéré.
$u_m^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant q + 1$: valeurs directrices du bloc de rang m + 1, avec $u_m^{(q+1)} = u_m^{(q)}$
$s_j^{(9)}$, fonction de p : $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{u_m^{(j)}}{u_m^{(1)}}$ avec $s_{q+1}^{(q)} = s_q^{(q)}$.
$k_q^{(p)}$, indépendant de j : $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{u_{m+1}^{(j)}}{u_m^{(j)}}$.

N.B. – Pour q = 1, $k_1^{(p)} = p + 2$; pour compléter le tableau, voir le n° 4 b.

Figure 4.2 – Rapports existant à la limite entre les valeurs directrices des blocs rectangulaires d'un contour régulier

N.B. 2. – Pour de faibles valeurs de p et de q, les valeurs limites annoncées sont données par la figure 2 ; sur celle-ci, les valeurs de k_q et de $s_2^{(q)}$ apparaissent comme étant des fonctions quasi-linéaires de p.

N.B. 3. – La partie c de la figure 1 montre comment les rapports des valeurs directrices des blocs de l'épreuve considérée tendent vers leurs limites, lues sur la figure 2.

c) Les valeurs limites k_q et $s_j^{(q)}$ sont utilisées au n° suivant, compte tenu de la remarque que voici :

S'il se trouvait que les valeurs directrices d'un bloc fussent précisément entre elles comme $s_2^{(q)}, s_3^{(q)}, \ldots$, c'est-à-dire si relativement au bloc de rang $m+1$ l'on avait :

$$u_m^{(2)} = s_2^{(q)} u_m^{(1)} \; ; \; u_m^{(3)} = s_3^{(q)} u_m^{(1)} \; ; \ldots \; ; \; u_m^{(q)} = s_q^{(q)} u_m^{(1)} \, ,$$

alors on aurait exactement :

$$\frac{u_{m+1}^{(1)}}{u_m^{(1)}} = \frac{u_{m+1}^{(2)}}{u_m^{(2)}} = \ldots\ldots = \frac{u_{m+1}^{(q)}}{u_m^{(q)}} = k_q \, .$$

En conséquence, dans les conditions susdites :

– d'une part, les valeurs directrices du bloc de rang $m+2$ seraient, elles aussi, entre elles comme $s_2^{(q)}, s_3^{(q)}, \ldots$; et ainsi de suite, si bien que les valeurs directrices du bloc de rang $m+r+1$ seraient liées directement à celles du bloc de rang $m+1$, par :

$$\frac{u_{m+r}^{(1)}}{u_m^{(1)}} = \frac{u_{m+r}^{(2)}}{u_m^{(2)}} = \ldots\ldots = \frac{u_{m+r}^{(q)}}{u_m^{(q)}} = [k_q]^r \; ;$$

– d'autre part, pour p et q donnés, la connaissance de la seule valeur $u_m^{(1)}$ suffirait pour entraîner celle de la note d'un point quelconque de la région à contour régulier considérée.

5 – LIMITES SUPERIEURES DE LA NOTE D'UN POINT

a) La note d'un point dans une épreuve E est au plus égale à la note du même point en l'absence de toute contrainte (symbole 0) ; d'où d'après (2.3) :

$$N^\circ(x, y, E) \leqslant N^\circ(x, y, 0) = C_{x+y}^y = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+y)}{y\,!} \, . \qquad (5.1)$$

Approximativement (cf. formule (62.5) de l'ouvrage cité au n° 1 b) :

$$N^\circ(x, y, 0) \approx \frac{1}{y\,!}\left[x + \frac{y+1}{2}\right]^y \left[1 - \frac{y(y^2-1)}{24[x+0{,}5(y+1)]^2}\right] . \qquad (5.2)$$

b) Dans le cas particulier de la note du point d'acceptation de coordonnées $x_A^{(y)}$ et y, le rapprochement de (2.3) et de (2.4) conduit à écrire :

$$N^\circ[x_A^{(y)}, y, E] = N^\circ[x_A^{(y-1)} - 1, y, E] \leqslant C^y_{x_A(y-1)+y-1}$$

c) Très généralement l'on a :

$$N^\circ(x, y, E') \geqslant N^\circ(x, y, E)$$

lorsque l'épreuve E' diffère de l'épreuve E :

– soit en ce que les contraintes de E' sont moins strictes que celles de E – comme c'était le cas en a et b ci-dessus ;

– soit en ce qu'à contraintes égales, sur une ligne d'abscisse x_0, quelques notes de E' sont supérieures à celles de E aux mêmes points, les autres étant égales deux à deux ;

– soit a fortiori par une combinaison de ces deux conditions (d ci-dessous).

d) La combinaison suivante permet d'obtenir une limite supérieure de $N^\circ(x, y, E)$, une fois connues les notes $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots\ldots$, des points de E d'abscisse $x_0 < x$, x_0 devant, sauf exception, être choisi tel que $x_0 + 1$ soit l'abscisse d'un point d'acceptation de E.

1/ Pour obtenir dans la région des abscisses de x_0 à x, des contraintes moins strictes que celles des lignes A et R de E, déterminer l'épreuve E' déduite de E par le remplacement des lignes A et R dans la région considérée – et éventuellement un peu au-delà de la limite x de cette région – par les lignes A' et R' du contour régulier (n° 4 ci-dessus) les englobant, au plus juste, entièrement ; cette opération peut être conduite graphiquement ou à l'aide de simples considérations numériques.

Soit p et q les valeurs caractéristiques de la taille des blocs du contour régulier, et m le rang du bloc contenant Z(x , y) par rapport au bloc commençant à l'abscisse $x_0 + 1$.

Exemple. – La figure 1 représente dans sa partie a un extrait du graphique de l'épreuve faisant l'objet de la figure 2.1.

Soit, à partir de $x_0 = 30$, à chercher une limite supérieure de la note du point Z(45 , 8). L'étude graphique conduit à l'épreuve E' (partie b de la figure), de laquelle on retient :

$$p = 5 \; ; \quad q = 2 \quad \text{et} \quad m = 3 \, ,$$

et, comme coordonnées de Z dans le bloc de rang 3 :

$$i = 2 \quad \text{et} \quad j = 1 \, .$$

2/ Pour majorer, dans leur ensemble, les notes des points d'abscisse x_0 qui serviront de valeurs directrices au bloc de rang 1, il suffit (n° 4 c) de choisir comme première de ces notes $v_0^{(1)}$ telle que :

$$u_0^{(1)} \leqslant v_0^{(1)} \; ; \; u_0^{(2)} \leqslant v_0^{(1)} s_2^{(q)} \; ; \; u_0^{(3)} \leqslant v_0^{(1)} s_3^{(q)} \; ; \ldots\ldots\ldots$$

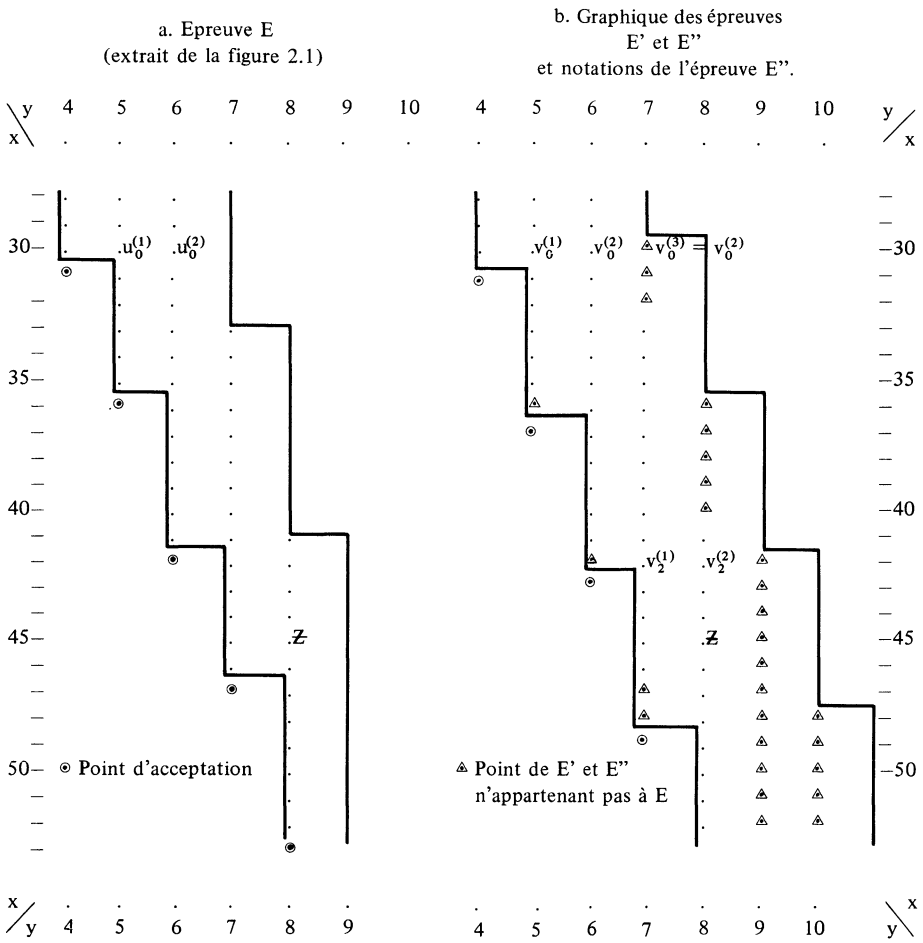


Figure 5.1 – Recherche d'une limite supérieure de la note du point Z (x , y)

Il y a manifestement intérêt à prendre $v_0^{(1)}$ aussi petit que possible ; généralement, on sera amené à prendre :

$$v_0^{(1)} = u_0^{(1)} .$$

De toute façon, cela détermine une "épreuve" E", qui a même graphique que E', mais dont tous les points à partir de $x = x_0$ ont leurs notes déterminées (n° 4 c) par la seule valeur $v_0^{(1)}$.

Dans E", les valeurs directrices du bloc, de rang m, contenant Z(x , y) sont données par :

$$v_{m-1}^{(1)} = [k_q]^{m-1} v_0^{(1)} \; ; \; v_{m-1}^{(2)} = s_2^{(q)} v_{m-1}^{(1)} \; ; \; v_{m-1}^{(3)} = s_3^{(q)} v_{m-1}^{(1)} \; \ldots\ldots$$

De ces valeurs, on déduit N°(x , y , E") par le processus du n° 3, et l'on a :

$$N^\circ(x , y , E) \leqslant N^\circ(x , y , E'') .$$

Exemple (suite). – Sur la ligne d'abscisse x_0, on a (figure 2.1)

$$u_0^{(1)} = 162\,778 \; ; \qquad u_0^{(2)} = 743\,568 \, .$$

A p = 5 et q = 2, correspondent (figure 4.2) :

$$k_2 = 11{,}100 \; ; \qquad s_2^{(2)} = 5{,}110 \, .$$

On vérifie que l'on a bien :

$$u_0^{(2)} < 5{,}110 \; u_0^{(1)} \, ,$$

ce qui autorise à retenir $v_0^{(1)} = u_0^{(1)} = 162\,778$. Donc pour m = 3

$$v_{m-1}^{(1)} = v_2^{(1)} = [11{,}110]^2 \, v_0^{(1)} \, ; v_2^{(2)} = [11{,}110]^2 \times 5{,}110 \, v_0^{(1)} \, .$$

Finalement comme à i = 2 et j = 1 correspond (figure 2.2) $c_1 = 3$, le processus de n° 3 conduit à :

$$N^\circ(Z \, , E'') = [11{,}110]^2 \times 5{,}110 \, v_0^{(1)} + [11{,}110]^2 \times 3 v_0^{(1)} \approx 163\,000\,000 \, .$$

Cette valeur est à comparer (figure 2.1) à $N^\circ(Z \, , E) = 67\,643\,940$.

6 – APPLICATIONS

a) On a notamment besoin de connaître la note d'un point, chaque fois qu'intervient, comme dans les cas des b à d ci-dessous, la probabilité que, dans le cadre d'un plan d'épreuve E, un cheminement a d'atteindre ce point.

L'expression de cette probabilité est en effet :

$$P(x \, , y \, , E \, , a) = N^\circ(x \, , y \, , E) \, . \, C_{N-x-y}^{a-y} / C_N^a \, , \tag{6.2}$$

expression dans laquelle *a* est le nombre de défectueux contenu dans le lot d'effectif N, soumis à l'épreuve E.

b) La *courbe d'efficacité* de l'épreuve séquentielle E est une courbe tracée de manière à passer par chacun des points ayant pour abscisse le nombre *a* de défectueux susceptibles d'être contenus dans le lot, $0 \leqslant a \leqslant N$, et pour ordonnée la probabilité que le lot contenant *a* défectueux a de satisfaire à l'épreuve E, c'est-à-dire la probabilité – soit : z(a , E) – pour que, dans le cas d'un tel lot, le cheminement se termine en un quelconque des points d'acceptation de E.

Soit $x_A^{(y)}$ l'abscisse du point d'acceptation d'ordonnée y, et y_m l'ordonnée du dernier de ces points d'acceptation :

$$z(a \, , E) = \sum_{y=0}^{y_m} P(x_A^{(y)} \, , y \, , E \, , a) \, . \tag{6.2}$$

c) L'effectif moyen $\bar{n}$ de l'échantillon nécessaire, dans le cas de l'épreuve séquentielle E, pour aboutir à une décision d'acceptation ou de rejet, a pour expression :

$$\bar{n} = \Sigma\,(x_s + y_s)\,P(x_s\,,\,y_s\,,\,E\,,\,a)\,, \tag{6.3}$$

expression dans laquelle :

– la somme est étendue à tous les points de sortie (points d'acceptation et points de rejet) de l'épreuve E ;

– x_s et y_s étant les coordonnées d'un point de sortie, la somme $x_s + y_s$ représente le nombre des essais nécessaires pour atteindre ce point, quel que soit le cheminement suivi.

Le produit sous le signe Σ est l'espérance mathématique de l'effectif d'échantillon correspondant au point de sortie considéré.

d) *Epreuve ajustée* : Tout plan d'une épreuve séquentielle E est établi de façon classique à partir des données suivantes :

– p_1 : proportion de défectueux que le fournisseur espère ne pas dépasser et à laquelle il accepte de faire correspondre un *risque* égal à la probabilité qu'un lot caractérisé par p_1 soit rejeté, à condition que ce risque soit au plus égal à α, petit.

– p_2 : proportion de défectueux ($p_2 > p_1$) que le client est prêt à tolérer, à condition qu'à cette proportion corresponde un risque au plus égal à β, petit, que le lot soit accepté ;

– N : effectif du lot, d'où $a_1 = Np_1$ et $a_2 = Np_2$;

– n_T : effectif de tronquage, ou y_m : nombre maximal de défectueux tolérés dans l'épreuve.

A ces données, la théorie fait correspondre des droites (épreuve séquentielle non-exhaustive) ou des courbes (épreuve séquentielle exhaustive), et le plan de l'épreuve correspondante E est défini par des points d'acceptation et de rejet *systématiquement extérieurs* au domaine limité par les droites ou courbes de la théorie ; une conséquence en est que les risques réels α' et β' sont souvent inférieurs respectivement aux valeurs α et β figurant aux données. Or on a :

$$\alpha' = 1 - z(a_1\,,E) \quad ; \quad \beta' = z(a_2\,,E)\,.$$

On peut donc avoir l'idée de rechercher un plan *ajusté* E_A, dont les risques réels respecteraient les données α et β, mais seraient plus près de ces valeurs que le sont α' et β'. Une telle recherche est d'autant plus naturelle qu'on peut espérer en atteindre le but par une sorte de tronquage qui entraînerait comme avantages :

– une simplification du plan par la réduction du nombre des points d'acceptation ;

– une réduction des effectifs d'échantillon (effectif moyen et effectif maximal), d'où une économie encore plus grande que celle correspondant à E.

Ainsi, soit E l'épreuve de la figure 2.1 et E_A, l'épreuve ajustée à laquelle une étude a conduit. On a :

Risques figurant aux données : $\alpha = 0{,}0500$; $\beta = 0{,}1000$

Risques réels : $\alpha' = 0{,}0282$ pour E ; $\alpha'_A = 0{,}0484$ pour E_A

$\beta' = 0{,}0922$ " " ; $\beta'_A = 0{,}0965$ " "

Nombre de points d'acceptation : 9 " " ; 6 " "

Echantillon :

– Effectif moyen pour a = 16 : 24,28 " " ; 21,48 " "

– Effectif maximal : 53 " " ; 37 " "