REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. SERRE

Un plan d'expérience hiérarchisé à 4 facteurs en contrôle des fabrications

Revue de statistique appliquée, tome 21, nº 3 (1973), p. 65-98
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1973__21_3_65_0>

© Société française de statistique, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN PLAN D'EXPÉRIENCE HIÉRARCHISÉ A 4 FACTEURS EN CONTROLE DES FABRICATIONS

J. SERRE *

Ingénieur civil des Mines

. Dans une usine de fabrication de bandes laminées en grande longueur les variations des caractéristiques des produits finis sont généralement de deux types :

– variations *systématiques* "en travers", c'est-à-dire lorsque le point contrôlé se déplace dans une direction perpendiculaire à l'axe longitudinal de la bande,

– variations *aléatoires* "en long", c'est-à-dire lorsque le point contrôlé se déplace dans une direction parallèle à l'axe longitudinal de la bande. Ces variations aléatoires sont en outre *hiérarchisées* en ce sens qu'il peut exister par exemple des variations des caractéristiques le long d'une même bande (variations *intra* bandes) et aussi des variations d'une bande à l'autre de la valeur moyenne prise par chaque bande (variations *entre* bandes). On verra plus loin que cette hiérarchie est souvent plus complexe puisqu'on peut considérer jusqu'à 3 niveaux de variations sans compter celles dues aux erreurs d'échantillonnage et de mesure.

. Toute action à moyen ou à long terme sur la variabilité des caractéristiques des produits finis, c'est-à-dire en définitive sur la qualité "fabriquée", nécessite au préalable la connaissance de l'importance relative de chacune de ces différentes sortes de variations.

Les domaines d'action sont nombreux et variés. Citons à titre d'exemples :

– La définition des règles d'utilisation des matériels de transformation existants,

– Le choix des circuits de fabrication en fonction des possibilité des machines disponibles,

– L'orientation des choix de matériels futurs,

– L'orientation des études métallurgiques,

– La discussion des cahiers des charges de la clientèle.

---

* Ingénieur principal, Société TREFIMETAUX, Usine de SERIFONTAINE (Oise).
Article remis le 5/12/72, révisé le 26/3/73.

Ces domaines touchent aussi bien aux Méthodes, aux Travaux neufs, à la Métallurgie et au Technico-Commercial qu'à la Fabrication elle-même.

- Un produit tel qu'une bande laminée en grande longueur pose des problèmes difficiles à l'expérimentateur car l'accès en tout point des bandes n'est pas aisé. Lorsqu'il est possible, il est relativement coûteux, ce qui justifie une exploitation aussi complète que possible des possibilités qu'il offre.

Dans le cas de l'Usine Tréfimétaux de Sérifontaine, ce n'est qu'au débit en tôles qu'il est possible de prélever à volonté en tout point des bandes. C'est donc tout naturellement que nous avons décidé il y a 4 ans de mettre en place, au niveau de cette opération de fabrication, un contrôle par sondage des caractéristiques des produits fabriqués.

- Au début il ne s'agissait que de contrôler les garanties données à la commande par le Constructeur d'un outil de fabrication particulièrement important qui venait d'être mis en service.

Le contrôle ainsi mis en place ayant fait la preuve de son efficacité qui nous paraissait largement contrebalancer la charge qu'il représentait, nous avons décidé de le laisser en service et de le développer.

Depuis cette époque il n'a cessé d'évoluer et cela sur bien des points :

– Le plan d'échantillonnage a été modifié de telle manière que l'information apportée par le contrôle soit substantiellement augmentée dans les domaines se révélant être les plus importants et au contraire diminuée dans ceux qui l'étaient moins,

– Le contrôle a été étendu au maximum de produits, de manière à obtenir des informations sur un plus grand nombre d'outils de fabrication,

– Chaque échantillon prélevé fait l'objet de mesures multiples :

- grosseur de grain
- dureté
- épaisseur

de manière à couvrir des domaines variés,

– L'exploitation des résultats de mesure s'est de plus en plus affinée avec l'utilisation de variables auxiliaires et de contrastes en travers et en long, ceci dans le but de tirer parti au maximum d'un programme d'échantillonnage et de mesure relativement coûteux.

- Ce contrôle est ainsi parvenu à maturité et c'est dans cet état que nous allons le présenter, d'abord, dans une première partie, sur le plan théorique, puis, dans une deuxième partie, sur des exemples.

– 1ère PARTIE – ANALYSE THEORIQUE –

- Avant de présenter cette analyse nous donnerons, pour faciliter la compréhension de la suite de l'exposé, quelques indications sur la fabrication des bandes laminées en grande longueur à Sérifontaine ainsi que les définitions des termes techniques qui auront à être utilisés par la suite.

- L'analyse théorique proprement dite sera précédée par l'exposé du plan d'échantillonnage. Cela nous permettra d'introduire le modèle mathématique qui lui est associé, modèle dont la construction est intimement liée aux phénomènes métallurgiques dont la maitrise est l'art du lamineur.

- Nous passerons ensuite à l'estimation des paramètres du modèle à partir des résultats expérimentaux pour terminer par l'analyse de variance.

I-1. FABRICATION A SERIFONTAINE DES BANDES LAMINEES EN GRANDE LONGUEUR

On peut schématiquement décomposer cette fabrication en trois phases :

1ère Phase

- Dégrossissage à chaud puis à froid d'un lingot, d'abord par laminage à plat, puis par laminage en rouleau.

- A l'issue de cette première phase on obtient une ébauche enroulée de 700 mm de large et de 75 m. de long, à 2,7 mm d'épaisseur.

2ème Phase

- Soudage bout à bout de plusieurs ébauches pour constituer des *unités* de transformation.

– Une unité composée de 4 ébauches s'appelle une *quadruple,*

– Chacune des ébauches qui constituent une unité s'appelle une *simple,*

– La *taille* d'une unité est le nombre de simples qui la constituent.

- Transformation de ces unités par un ou plusieurs cycles successifs de laminage et de recuit jusqu'à obtention de l'épaisseur et de l'état (écroui ou recuit) demandés par le client.

- A l'issue de cette 2ème phase on obtient une bande enroulée de 700 mm de large dont la longueur dépend de la taille de l'unité et de son épaisseur finale.

La longueur d'une quadruple laminée à 0,8 mm sera, par exemple, de l'ordre de 1 *km.*

3ème Phase

- Débit de la bande en tôles au format demandé par le client.

Le nombre de tôles obtenues dépend de la taille de l'unité, de l'épaisseur de la bande et de la longueur des tôles.

Pour une quadruple laminée à 0,8 mm et débitée en tôles de 1 340 mm de long, le nombre de tôles sera, par exemple, de l'ordre de 750.

I-2. PLAN D'ECHANTILLONNAGE

- Considérons une *fabrication réputée homogène,* c'est-à-dire un ensemble d'unités de même composition chimique nominale, ayant suivi la même gamme de fabrication en étant laminées sur le même laminoir et recuites sur le même four.

- *n* unités sont prélevées au hasard dans cette fabrication au cours d'une période qui peut être assez longue, un an par exemple.

- Pour chacune de ces n unités on considère 2 simples consécutives repérées 1 et 2 dans l'ordre où elles se présentent.

- Pour chacune de ces n x 2 = 2 n simples on choisit 2 tôles situées au 1er et au 2ème tiers de leur longueur, repérées dans l'ordre où elles se présentent : 1 et 2 pour la 1ère simple et 3 et 4 pour la 2ème.

On découpe ensuite, dans chacune d'entre elles, un *prélèvement* de quelques centimètres de long intéressant toute la largeur.

- Pour chacun des 2 n x 2 = 4 n prélèvements on découpe 4 petits *échantillons* répartis régulièrement sur toute la largeur de la tôle et repérés dans l'ordre 1, 2, 3, 4, les échantillons 1 et 4 étant à environ 20 mm des bords.

- Sur chacun des 4 n x 4 = 16 n échantillons, 1 *mesure* du caractère étudié est effectuée.

Soit x_{ijm} le résultat de cette mesure.

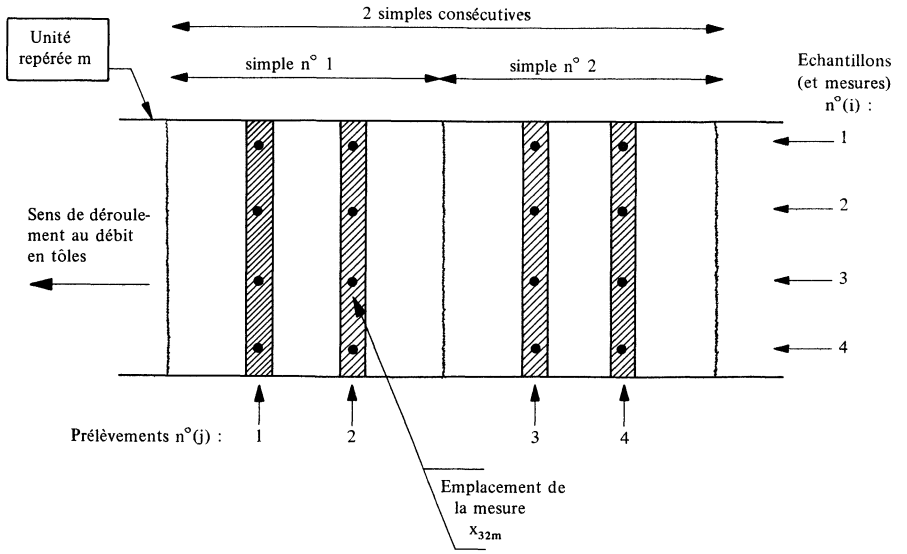
où :

– L'indice *i* repère la position de l'échantillon dans la largeur des tôles : i = 1, 2, 3 et 4.

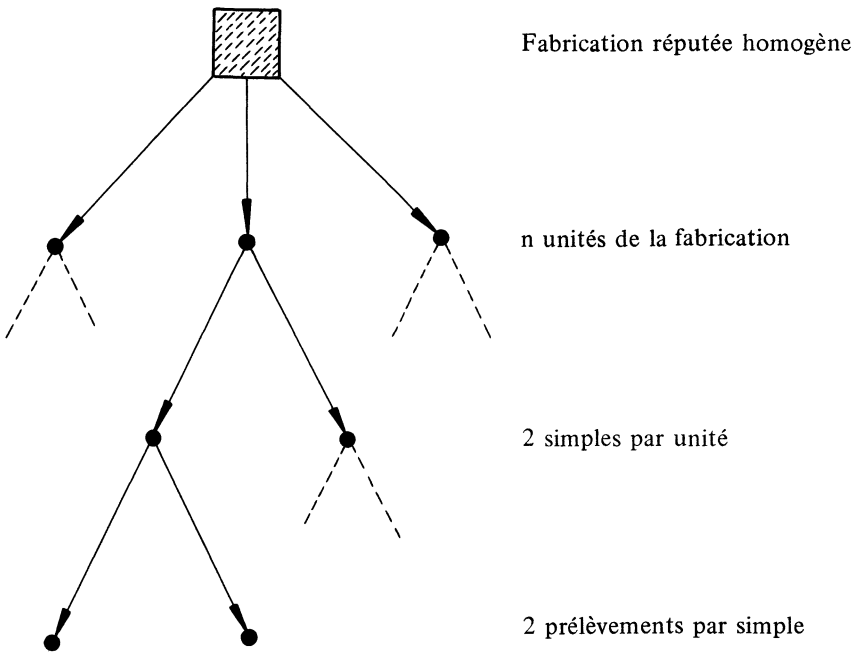
– L'indice *j* repère la position de l'échantillon dans la longueur de la bande : j = 1, 2, 3 et 4.
L'indice j permet en fait de repérer à la fois la position le long de la simple et celle de la simple le long de l'unité.

– L'indice *m* repère l'unité : m = 1, 2, ..., n.

Pour chaque unité on dispose ainsi de 16 résultats qui correspondant aux emplacements figurés ci-dessous sur la bande déroulée et vue en plan.



On peut par ailleurs considérer que les 4 n résultats dont on dispose *pour chaque position en travers* correspondent à un échantillonnage hiérarchisé à 3 niveaux que l'on peut schématiser comme suit :



– Chaque simple est un élément de l'ensemble des simples constituant l'unité dont elle fait partie,

En effet :

– Chaque unité échantillonnée est un élément de l'ensemble des unités constituant la fabrication réputée homogène dont elle fait partie,

– Chaque prélèvement est un élément de l'ensemble des prélèvements constituant la simple dont il fait partie.

I-3. MODELE MATHEMATIQUE

La construction du modèle mathématique va se faire en deux temps :

– En premier lieu nous ne nous intéresserons qu'aux variations en travers, c'est-à-dire aux variations entre les résultats des mesures effectuées sur les 4 échantillons appartenant à un même prélèvement.

Le modèle choisi comportera 4 paramètres, chacun d'entre eux étant susceptible d'une interprétation physique simple.

– En second lieu nous étudierons les variations le long des simples, des unités et de la fabrication de chacun des 4 paramètres du profil en travers.

I-3.1. Modèle mathématique du profil en travers

. Soit x_i (i = 1, 2, 3, 4) les valeurs prises par le caractère étudié pour les 4 échantillons de position i d'un prélèvement, les indices j et m permettant de repérer ce prélèvement étant omis pour alléger l'écriture.

. Dans le plan i, x_i (figure 1) les points représentatifs des 4 échantillons forment un quadrilatère A B C D.

Ce quadrilatère pourrait être à priori de forme tout à fait quelconque mais en pratique on constate qu'il a le plus souvent une forme trapézoïdale,

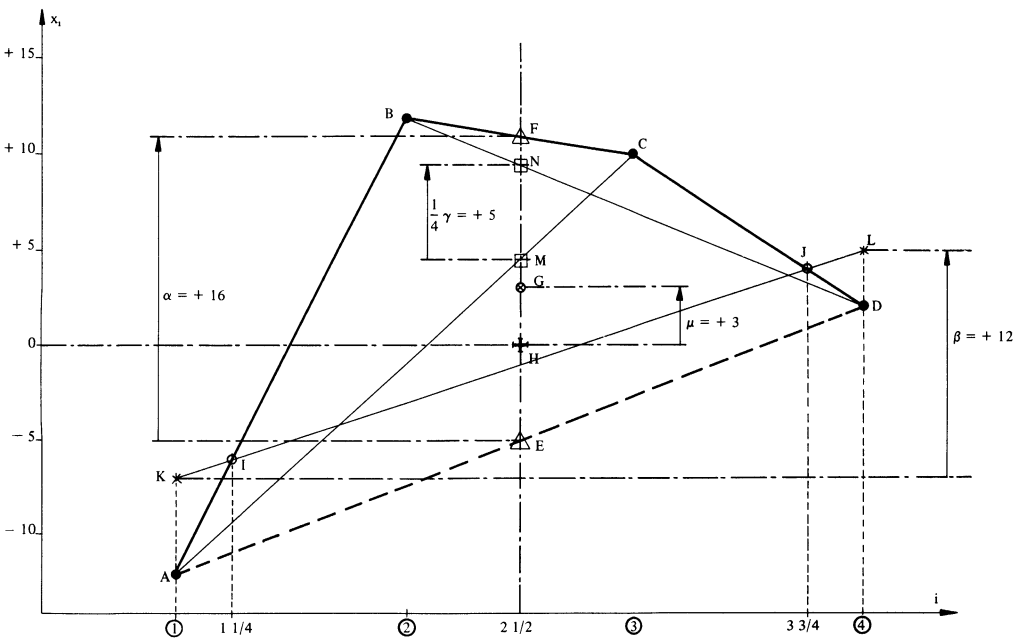


Figure 1

les côtés BC et AD étant sensiblement parallèles. En outre la différence entre l'ordonnée du point F, milieu du segment BC et celle du point E, milieu du segment AD, est toujours de même signe, soit positive, soit négative, suivant le caractère étudié. C'est ainsi par exemple qu'elle est positive (cas de la figure 1) lorsque le caractère étudié est l'épaisseur, et négative lorsque c'est la taille du grain d'une bande recuite en four à passage.

Il est par ailleurs assez rare que les côtés BC et AD soient parallèles à l'axe des abscisses. En général le trapèze est incliné par rapport à cet axe et, pour une fabrication réputée homogène, l'inclinaison sera presque toujours de même signe, soit positive (cas de la figure 1), soit négative, suivant le caractère étudié et la fabrication considérée.

. Ces deux propriétés ne sont pas à priori surprenantes. En effet :

– Une bande est dans le sens de sa largeur limitée par deux bords. Il serait bien étonnant qu'au cours des opérations de fabrication les conditions aux limites soient les mêmes qu'ailleurs. Cela explique l'écart entre les ordonnées des points B et C d'une part et celles des points A et D d'autre part, écart donnant au quadrilatère A B C D la forme d'un trapèze.

– L'existence d'une inclinaison s'explique quant à elle par le fait qu'il est très difficile de régler un laminoir ou un four de recuit à passage de manière à ce qu'il soit parfaitement équilibré dans le sens transversal.

L'art du praticien consiste justement dans ce domaine à essayer de limiter au maximum ces deux effets.

. Nous sommes ainsi amenés à caractériser un quadrilatère quelconque A B C D par les 4 paramètres suivants :

μ : moyenne du profil en travers.
C'est l'ordonnée du barycentre G des quatres points A B C D.
G est le milieu du segment EF.
μ caractérise le niveau moyen du caractère pour le prélèvement considéré.

α : bombé du profil en travers.
C'est la différence entre la moyenne des ordonnées des points B et C (ordonnée de F) et celle des ordonnées des points A et D (ordonnée de E).

β : inclinaison du profil en travers.
C'est la moyenne de la pente du segment BC et de celle du segment AD en prenant pour unité, sur l'axe des abscisses, la distance entre les échantillons repérés 1 et 4.
Elle est égale à le pente de la droite passant par les points I et J situés sur les segments AB et CD au 1/4 de la distance de A à B et de D à C :

$$\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = 3 .$$

γ : défaut de parallélisme du profil en travers. C'est la différence entre la pente de AD et celle de BC.
On peut remarquer que γ est égal à quatre fois la différence entre les ordonnées des points N et M intersections des diagonales BD et AC du quadrilatère avec l'axe de la bande d'abscisse 2 1/2.

Le *modèle mathématique du profil en travers d'un prélèvement* peut alors s'écrire :

$$\left\| \begin{array}{l} x_1 = \mu - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{20} \\ x_2 = \mu + \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{6} + \dfrac{3\gamma}{20} \\ x_3 = \mu + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{6} - \dfrac{3\gamma}{20} \\ x_4 = \mu - \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{20} \end{array} \right. \qquad (1)$$

La figure 2 montre les différents quadrilatères A B C D que l'on peut obtenir suivant que les 3 paramètres de forme α, β et γ sont tous nuls ou que l'un d'entre eux ou deux ou les trois sont différents de zéro.

En pratique, d'après ce qui a déjà été indiqué, on peut s'attendre à avoir affaire à un quadrilatère du type de celui qui est ombré sur la figure 2 et qui correspond au cas où :

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

I-3.2. Modèle mathématique du profil en long

On vient de voir que le modèle mathématique du profil en travers fait appel à 4 paramètres :

$$\mu_{jm}\ ,\ \alpha_{jm}\ ,\ \beta_{jm} \text{ et } \gamma_{jm}$$

pour décrire les quatre résultats x_{ijm} (i = 1, 2, 3, 4) correspondant au prélèvement repéré jm (j^{ème} prélèvement de la m^{ème} unité de la fabrication étudiée).

Nous allons maintenant étudier les variations de ces quatre paramètres lorsque j et m varient. Le cas de μ_{jm} sera traité à titre d'exemple, les trois autres se traitant de la même manière.

La figure 3 résume la décomposition de μ_{jm} telle qu'elle va être décrite ci-dessous.

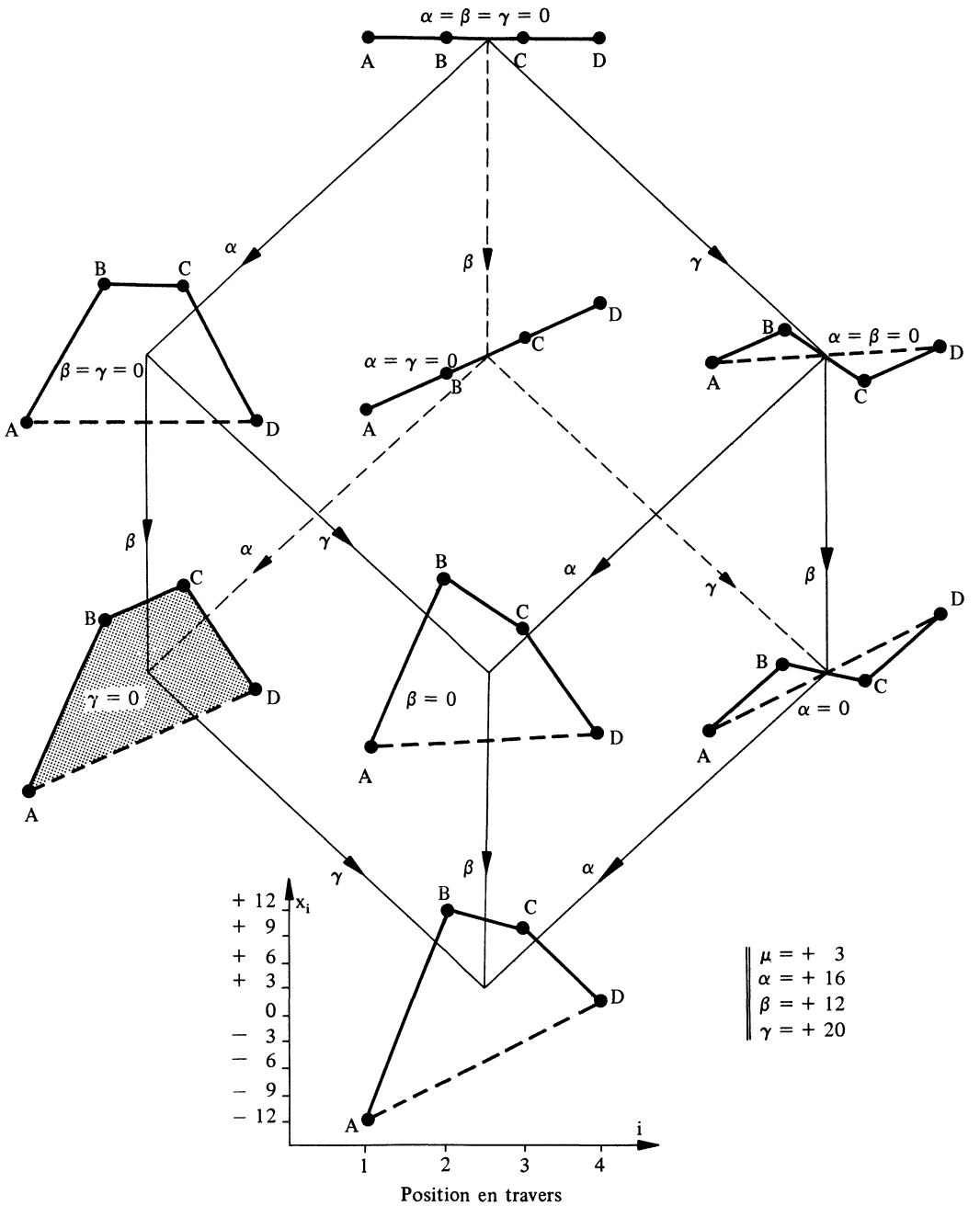

α = β = γ = 0
A B C D
α
β
γ
β = γ = 0
α = γ = 0
α = β = 0
γ = 0
β = 0
α = 0
+ 12
+ 9
+ 6
+ 3
0
− 3
− 6
− 9
− 12
x_i
i
1 2 3 4
Position en travers
μ = + 3
α = + 16
β = + 12
γ = + 20

Figure 2

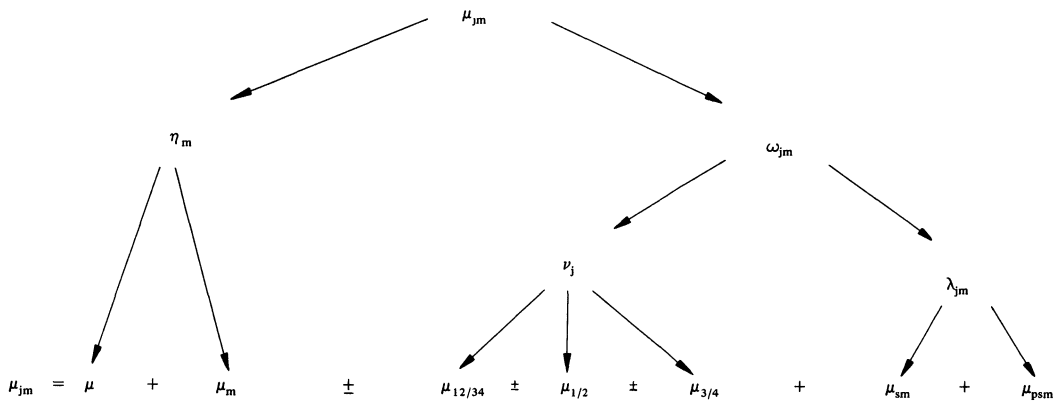


Figure 3

- Le prélèvement considéré *appartient* à l'unité m ce qui conduit à décomposer μ_{jm} en deux termes, l'un, η_m, caractérisant la m^{ème} unité et l'autre ω_{jm} caractérisant le j^{ème} prélèvement au sein de cette unité. On a :

$$\mu_{jm} = \eta_m + \omega_{jm} \tag{2}$$

- Considérons le 1er terme η_m. L'unité considérée appartient à la fabrication réputée homogène que l'on a échantillonnée, ce qui conduit à décomposer η_m en deux termes, l'un, μ, caractérisant la fabrication et l'autre μ_m caractérisant le comportement *particulier* de la m^{ème} unité au sein de cette fabrication. On a :

$$\eta_m = \mu + \mu_m \tag{3}$$

- Considérons le 2ème terme ω_{jm}. Les quatre positions de prélèvement le long des unités, positions repérées par l'indice j, sont *les mêmes pour toutes les unités.* Il peut par conséquent exister, pour l'ensemble de la fabrication, une influence systématique de la position, ce qui conduit à décomposer ω_{jm} en deux termes, l'un, ν_j, correspondant à cette influence systématique qui ne dépend que de j et l'autre, λ_{jm} caractérisant le comportement *particulier* (après avoir tenu compte de l'effet systématique ν_j) du j^{ème} prélèvement de la m^{ème} unité. On a :

$$\omega_{jm} = \nu_j + \lambda_{jm} \tag{4}$$

- Il sera commode pour l'analyse de distinguer dans ν_j :

– Ce qui provient de l'écart systématique entre la 1ère et la 2ème simple de chaque unité, soit $\mu_{12/34}$,

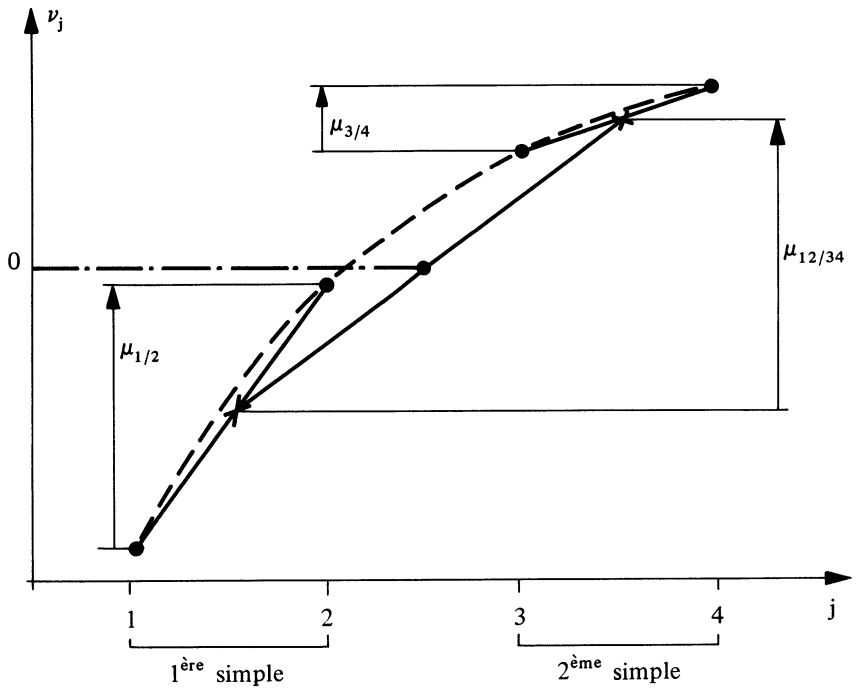
– Ce qui provient de l'écart systématique entre le 1er et le 2ème prélèvement de la première simple, soit $\mu_{1/2}$,

– Ce qui provient de l'écart systématique entre le 1er et le 2ème prélèvement de la 2ème simple, soit $\mu_{3/4}$,

et d'écrire :

$$\left|\begin{array}{lll} \nu_1 = -\frac{1}{2}\mu_{12/34} & -\frac{1}{2}\mu_{1/2} & \\ \nu_2 = -\frac{1}{2}\mu_{12/34} & +\frac{1}{2}\mu_{1/2} & \\ \nu_3 = +\frac{1}{2}\mu_{12/34} & & -\frac{1}{2}\mu_{3/4} \\ \nu_4 = +\frac{1}{2}\mu_{12/34} & & +\frac{1}{2}\mu_{3/4} \end{array}\right. \tag{5}$$

la signification géométrique de $\mu_{12/34}$, $\mu_{1/2}$ et $\mu_{3/4}$ étant donnée par le schéma ci-dessous :



Le prélèvement considéré *appartient* enfin à la s^{ème} simple (s = 1 ou 2) de la m^{ème} unité, ce qui conduit à décomposer λ_{jm} en deux termes, l'un, μ_{sm}, caractérisant le comportement *particulier* de la s^{ème} simple au *sein* de la m^{ème} unité (après avoir tenu compte de l'effet systématique $\mu_{12/34}$) et l'autre, μ_{psm}, caractérisant le comportement *particulier* du p^{ème} prélèvement au *sein* de la s^{ème} simple de la m^{ème} unité (après avoir tenu compte des effets systématiques $\mu_{1/2}$ ou $\mu_{3/4}$). On a :

$$\lambda_{jm} = \mu_{sm} + \mu_{psm} \tag{6}$$

En tenant compte des égalités (2) à (6) on peut écrire le modèle mathématique du profil en long pour μ_{jm} :

$$\left\| \mu_{jm} = \mu + \mu_m + \left(\pm \frac{1}{2}\mu_{12/34} + \mu_{sm}\right) + \left(\pm \frac{1}{2}\mu_{1/2} \pm \frac{1}{2}\mu_{3/4} \pm \mu_{psm}\right) \right. \quad (7)$$

$$= F + U + S + P$$

F représentant la part due à la fabrication
U " " " à l'unité
S " " " à la simple
P " " " au prélèvement.

On aurait pour α_{jm}, β_{jm} et γ_{jm} des expressions analogues à (7).

I-3.3. Modèle mathématique de l'ensemble des résultats x_{ijm}

Le modèle mathématique de l'ensemble des résultats s'obtient en remplaçant dans les expressions (1) du modèle mathématique du profil en travers chacun des paramètres μ, α, β et γ par son expression donnée par l'équation (7) pour μ et par des équations analogues pour les 3 autres. Il convient, pour que ce modèle soit complet, de rajouter un terme ϵ_{ijm} représentant les erreurs d'échantillonnage et de mesure.

A titre d'exemple nous donnons ci-dessous le modèle pour la mesure faite en position en travers i = 2 du 1er prélèvement de la 2ème simple (j = 3) de la m^ème^ unité :

$$\begin{aligned} x_{23m} = & \left[\mu + \mu_m + \left(\frac{1}{2}\mu_{12/34} + \mu_{2m}\right) + \left(-\frac{1}{2}\mu_{3/4} + \mu_{32m}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[\alpha + \alpha_m + \left(\frac{1}{2}\alpha_{12/34} + \alpha_{2m}\right) + \left(-\frac{1}{2}\alpha_{3/4} + \alpha_{32m}\right)\right] \\ & - \frac{1}{6}\left[\beta + \beta_m + \left(\frac{1}{2}\beta_{12/34} + \beta_{2m}\right) + \left(-\frac{1}{2}\beta_{3/4} + \beta_{32m}\right)\right] \\ & + \frac{3}{20}\left[\gamma + \gamma_m + \left(\frac{1}{2}\gamma_{12/34} + \gamma_{2m}\right) + \left(-\frac{1}{2}\gamma_{3/4} + \gamma_{32m}\right)\right] \\ & + \epsilon_{23m} \end{aligned}$$

Dans ce modèle :

– Les termes non indicés par i, j, p, s, ou m sont des paramètres fixes non aléatoires. Ils sont au nombre de 16 :

$$\left| \begin{array}{l} \mu\,,\ \mu_{12/34}\,,\ \mu_{1/2} \text{ et } \mu_{3/4}\,, \\ \alpha\,,\ \alpha_{12/34}\,,\ \alpha_{1/2} \text{ et } \alpha_{3/4}\,, \\ \beta\,,\ \beta_{12/34}\,,\ \beta_{1/2} \text{ et } \beta_{3/4}\,, \\ \gamma\,,\ \gamma_{12/34}\,,\ \gamma_{1/2} \text{ et } \gamma_{3/4}\,, \end{array} \right.$$

– Les termes indicés par i, j, p, s ou m sont des variables aléatoires. Ils sont au nombre de 13 :

$$\left|\begin{array}{l} \mu_m \text{ , } \mu_{sm} \text{ et } \mu_{psm} \text{ ,} \\ \alpha_m \text{ , } \alpha_{sm} \text{ et } \alpha_{psm} \text{ ,} \\ \beta_m \text{ , } \beta_{sm} \text{ et } \beta_{psm} \text{ ,} \\ \gamma_m \text{ , } \gamma_{sm} \text{ et } \gamma_{psm} \text{ ,} \\ \text{et } \epsilon_{ijm} \text{ .} \end{array}\right.$$

Comme il y a n termes du type μ_m, 2 n du type μ_{sm}, 4 n du type μ_{psm} et 16 n du type ϵ_{ijm} ce sont en tout 44 n termes aléatoires qui figurent dans le modèle.

Nous ferons les *hypothèses* suivantes :

. Ces 44 n variables aléatoires sont 2 à 2 indépendantes entre elles en probabilité,

. Chacune d'entre elles est distribuée suivant une loi de Laplace-Gauss de moyenne 0 et de variance :

$$\left|\begin{array}{l} {}_\mu\sigma_u^2 \text{ pour } \mu_m \text{ , } {}_\mu\sigma_s^2 \text{ pour } \mu_{sm} \text{ et } {}_\mu\sigma_p^2 \text{ pour } \mu_{psm} \text{ ,} \\ {}_\alpha\sigma_u^2 \text{ pour } \alpha_m \text{ , } {}_\alpha\sigma_s^2 \text{ pour } \alpha_{sm} \text{ et } {}_\alpha\sigma_p^2 \text{ pour } \alpha_{psm} \text{ ,} \\ {}_\beta\sigma_u^2 \text{ pour } \beta_m \text{ , } {}_\beta\sigma_s^2 \text{ pour } \beta_{sm} \text{ et } {}_\beta\sigma_p^2 \text{ pour } \beta_{psm} \text{ ,} \\ {}_\gamma\sigma_u^2 \text{ pour } \gamma_m \text{ , } {}_\gamma\sigma_s^2 \text{ pour } \gamma_{sm} \text{ et } {}_\gamma\sigma_p^2 \text{ pour } \gamma_{psm} \text{ ,} \\ \text{et } \sigma_r^2 \text{ pour } \epsilon_{ijm} \end{array}\right.$$

l'indice antérieur rappelant, pour les 12 premières variances, le paramètre du profil en travers qui est concerné et l'indice postérieur le niveau hiérarchique des variations considérées :

u : dispersion entre unités, intra fabrication,
s : " " simples, intra unités,
p : " " prélèvements, intra simples,
r : " résiduelle (d'échantillonnage et de mesure).

. C'est donc en tout 29 paramètres qu'il y a lieu d'estimer pour décrire la fabrication étudiée :

– les 16 paramètres fixes : μ , $\mu_{12/34}$, ... , $\gamma_{3/4}$,

– les 13 variances : ${}_\mu\sigma_u^2$, ${}_\mu\sigma_s^2$, ... , ${}_\gamma\sigma_p^2$, σ_r^2 .

I-4. ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

L'estimation des paramètres du modèle va se faire en deux temps :

– En premier lieu définition de 16 contrastes z_{klm} ($k = 1$ à 4, $l = 1$ à 4) à partir des 16 résultats de mesure x_{ijm} ($i = 1$ à 4, $j = 1$ à 4) correspondant à la $m^{ème}$ unité, et cela en deux étapes :

- D'abord définition de 4 contrastes en travers y_{kjm} ($k = 1$ à 4) à partir des 4 résultats de mesure x_{ijm} ($i = 1$ à 4) correspondant au $j^{ème}$ prélèvement de la $m^{ème}$ unité,
- Ensuite définition, pour chaque contraste en travers, de 4 contrastes en long z_{klm} ($l = 1$ à 4) à partir des 4 valeurs y_{kjm} ($j = 1$ à 4) de ce contraste en travers pour la $m^{ème}$ unité,

– En second lieu estimation de la moyenne et de la variance de chacun des 16 contrastes z_{klm} pour l'ensemble des unités échantillonnées.

I-4.1. Définition des contrastes

A – *Contrastes en travers*

Compte-tenu du modèle mathématique du profil en travers d'un prélèvement (équation (1)), nous prendrons comme contrastes en travers y_{kjm} :

$$\left\| \begin{array}{l} y_{1jm} = \frac{1}{4}(+\ x_{1jm} + x_{2jm} + x_{3jm} + x_{4jm}) \\ y_{2jm} = \frac{1}{2}(-\ x_{1jm} + x_{2jm} + x_{3jm} - x_{4jm}) \\ y_{3jm} = \frac{3}{10}(-3x_{1jm} - x_{2jm} + x_{3jm} + 3x_{4jm}) \\ y_{4jm} = \quad (-\ x_{1jm} + 3x_{2jm} - 3x_{3jm} + x_{4jm}) \end{array} \right. \tag{8}$$

Ces 4 variables aléatoires sont deux à deux indépendantes entre elles en probabilité et elles sont distribuées suivant des lois de Laplace-Gauss de moyennes et de variances :

pour y_{1jm} ($k = 1$) : moyenne μ_{jm} et variance $\frac{1}{4}\sigma_r^2$

" y_{2jm} ($k = 2$) : " α_{jm} " σ_r^2

" y_{3jm} ($k = 3$) : " β_{jm} " $\frac{9}{5}\sigma_r^2$

" y_{4jm} ($k = 4$) : " γ_{jm} " $20\ \sigma_r^2$

Les 4 contrastes y_{kjm} ($k = 1$ à 4) permettent donc d'estimer les paramètres μ_{jm}, α_{jm}, β_{jm} et γ_{jm} du profil en travers du $j^{ème}$ prélèvement de la $m^{ème}$ unité.

B – *Contrastes en long des contrastes en travers*

Le modèle mathématique du profil en long (équation (7) pour μ_{jm} et équations analogues pour α_{jm}, β_{jm} et γ_{jm}) nous conduit à prendre comme contrastes en long z_{klm} :

$$\left\| \begin{array}{l} z_{k1m} = \frac{1}{4}(+\, y_{k1m} + y_{k2m} + y_{k3m} + y_{k4m}) \\ z_{k2m} = \frac{1}{2}(-\, y_{k1m} - y_{k2m} + y_{k3m} + y_{k4m}) \\ z_{k3m} = \quad (-\, y_{k1m} + y_{k2m} \qquad\qquad\qquad) \\ z_{k4m} = \quad (\qquad\qquad\qquad - y_{k3m} + y_{k4m}) \end{array} \right. \tag{9}$$

A raison de 4 contrastes en long pour chacun des 4 contrastes en travers, il y a 16 contrastes z_{klm}.

Ces 16 contrastes sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes entre elles en probabilité et distribuées suivant des lois de Laplace-Gauss dont les moyennes et les variances sont explicitées ci-dessous dans le cas où k = 1 (on aurait des expressions analogues pour k = 2,3 ou 4) :

pour $z_{11m}(l = 1)$: moyenne η_m et variance $\frac{1}{2}\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + \frac{1}{4}\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{16}\,\sigma_r^2$

" $z_{12m}(l = 2)$: " $\mu_{12/34}$ " $2\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + {}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{4}\,\sigma_r^2$

" $z_{13m}(l = 3)$: " $\mu_{1/2}$ " $2\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\,\sigma_r^2$

" $z_{14m}(l = 4)$: " $\mu_{3/4}$ " $2\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\,\sigma_r^2$

Ces contrastes permettent donc d'estimer les paramètres η_m, $\mu_{12/34}$, $\mu_{1/2}$ et $\mu_{3/4}$ du profil en long du paramètre μ_{jm} du profil en travers de la m^{ème} unité.

I-4.2. Etude des 16 contrastes z_{klm} pour l'ensemble des n unités

Les moyennes et variances des distributions des 16 contrastes z_{klm} pour l'ensemble des unités sont données par les deux tableaux ci-dessous :

Moyennes des z_{klm}

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
l =	1	μ	α	β	γ
	2	$\mu_{12/34}$	$\alpha_{12/34}$	$\beta_{12/34}$	$\gamma_{12/34}$
	3	$\mu_{1/2}$	$\alpha_{1/2}$	$\beta_{1/2}$	$\gamma_{1/2}$
	4	$\mu_{3/4}$	$\alpha_{3/4}$	$\beta_{3/4}$	$\gamma_{3/4}$

Variances des z_{klm}

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
l =	1	${}_{\mu}\sigma_u^2 + \frac{1}{2}\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + \frac{1}{4}\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{16}\sigma_r^2$	${}_{\alpha}\sigma_u^2 + \frac{1}{2}{}_{\alpha}\sigma_s^2 + \frac{1}{4}\,{}_{\alpha}\sigma_p^2 + \frac{1}{4}\sigma_r^2$	${}_{\beta}\sigma_u^2 + \frac{1}{2}\,{}_{\beta}\sigma_s^2 + \frac{1}{4}\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \frac{9}{20}\sigma_r^2$	${}_{\gamma}\sigma_u^2 + \frac{1}{2}{}_{\gamma}\sigma_s^2 + \frac{1}{4}{}_{\gamma}\sigma_p^2 + 5\sigma_r^2$
	2	$2\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + {}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{4}\sigma_r^2$	$2\,{}_{\alpha}\sigma_s^2 + {}_{\alpha}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$2\,{}_{\beta}\sigma_s^2 + {}_{\beta}\sigma_p^2 + \frac{9}{5}\sigma_r^2$	$2\,{}_{\gamma}\sigma_s^2 + {}_{\gamma}\sigma_p^2 + 20\sigma_r^2$
	3	$2\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_r^2$	$2\,{}_{\alpha}\sigma_p^2 + 2\sigma_r^2$	$2\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \frac{18}{5}\sigma_r^2$	$2\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + 40\sigma_r^2$
	4	$2\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_r^1$	$2\,{}_{\alpha}\sigma_p^2 + 2\sigma_r^2$	$2\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \frac{18}{5}\sigma_r^2$	$2\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + 40\sigma_r^2$

Les moyennes et variances des valeurs *observées* des contrastes z_{klm} permettent donc d'estimer :

– Les 16 paramètres fixes du modèle : μ , $\mu_{12/34}$, ... , $\gamma_{3/4}$,

– Des combinaisons linéaires des 13 variances du modèle : ${}_{\mu}\sigma_u^2$, ${}_{\mu}\sigma_s^2$, . . . , ${}_{\gamma}\sigma_p^2$, σ_r^2.

I-5. ANALYSE DE LA VARIANCE

Considérons les variables :

$$u_{klm} = z_{klm} \cdot \sqrt{\frac{r_{kl}}{s_{kl}}}$$

avec les coefficients r_{kl}/s_{kl} donnés par le tableau ci-dessous :

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
l =	1	$\frac{16}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{1}{5}$
	2	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{20}$
	3	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{40}$
	4	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{40}$

– Les variables u_{klm} ont les mêmes propriétés d'indépendance deux à deux entre elles en probabilité et de normalité que les contrastes z_{klm}. Elles présentent l'avantage que leurs variances sont directement comparables entre elles, comme le montre le tableau page suivante :

Variances des u_{klm}

		k = 1	2	3	4
l =	1	$16\,{}_{\mu}\sigma_u^2 + 8\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + 4\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$4\,{}_{\alpha}\sigma_u^2 + 2\,{}_{\alpha}\sigma_s^2 + {}_{\alpha}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{20}{9}\,{}_{\beta}\sigma_u^2 + \frac{10}{9}\,{}_{\beta}\sigma_s^2 + \frac{5}{9}\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{1}{5}\,{}_{\gamma}\sigma_u^2 + \frac{1}{10}\,{}_{\gamma}\sigma_s^2 + \frac{1}{20}\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$
	2	$8\,{}_{\mu}\sigma_s^2 + 4\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$2\,{}_{\alpha}\sigma_s^2 + {}_{\alpha}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{10}{9}\,{}_{\beta}\sigma_s^2 + \frac{5}{9}\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{1}{10}\,{}_{\gamma}\sigma_s^2 + \frac{1}{20}\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$
	3	$4\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	${}_{\alpha}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{5}{9}\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{1}{20}\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$
	4	$4\,{}_{\mu}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	${}_{\alpha}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{5}{9}\,{}_{\beta}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$	$\frac{1}{20}\,{}_{\gamma}\sigma_p^2 + \sigma_r^2$

– On a :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_{ijm}^2 = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} u_{klm}^2 \text{ q.q.s.m} \tag{10}$$

Cette équation est une équation de décomposition d'une somme de carrés au niveau de chaque unité.

Par sommation des deux membres par rapport à m on obtient l'équation de décomposition de la somme des carrés des résultats expérimentaux pour l'ensemble des unités :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{n} x_{ijm}^2 = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{n} u_{klm}^2 = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\left(\sum_{m=1}^{n} u_{klm}^2\right) \tag{11}$$

Chacune des 16 sommes $\sum_{m=1}^{n} u_{klm}^2$ peut être décomposée en deux parties :

$$\sum_{m=1}^{n} u_{klm}^2 = D_{kl} + Q_{kl} \tag{12}$$

où :

$$D_{kl} = n\,u_{kl.}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n} u_{klm}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{r_{kl}}{s_{kl}}\left(\sum_{m=1}^{n} z_{klm}\right)^2$$

représente le carré "*moyenne pour toutes les unités*". et où :

$$Q_{kl} = \sum_{m=1}^{n}(u_{klm} - u_{kl.})^2 = \frac{r_{kl}}{s_{kl}}\sum_{m=1}^{n} z_{klm}^2 - D_{kl}$$

représente la somme de carrés "*variations entre unités*".
L'équation (11) s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{n} x_{ijm}^2 = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}(D_{kl} + Q_{kl}) \tag{13}$$

C'est l'équation d'analyse de variance de l'ensemble des résultats. Le 1er membre comporte 16 n termes et a 16 n degrés de liberté. Le 2ème membre

comporte 32 termes dont 16 (les D_{kl}) ont chacun un degré de liberté et les 16 autres (les Q_{kl}) chacun (n – 1). L'équation des degrés de liberté associée à l'équation (13) s'écrit :

$$16\,n = \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} [1 + (n - 1)] \qquad (14)$$

Le tableau ci-après donne les espérances mathématiques de chacun des 32 carrés moyens de l'analyse de variance basée sur les équations (13) et (14).

L'examen de ce tableau montre que l'on pourra sans difficulté tester les hypothèses de nullité des 16 paramètres fixes non aléatoires du modèle mathématique.

On pourra également tester les hypothèses de nullité de 8 des 13 variances des paramètres aléatoires du modèle, à savoir :

– Les 4 variances "entre unités, intra fabrication",

– et les 4 variances "entre simples, intra unités".

Par contre on ne pourra pas tester les hypothèses de nullité des 5 autres variances :

– Les 4 variances "entre prélèvements, intra simples",

– la variance "résiduelle" (d'échantillonnage et de mesure).

Il aurait fallu, pour pouvoir le faire, disposer d'une répétition au moins au niveau des échantillons, par exemple 2 mesures ce qui aurait doublé le nombre total des mesures.

En fait, dans chaque cas particulier, l'examen de l'ordre de grandeur des différents carrés moyens prenant en compte ces 5 variances conduira à faire des hypothèses simplificatrices sur le modèle ce qui permettra de résoudre complètement le problème.

– 2ème PARTIE – EXEMPLES D'APPLICATION

Deux exemples vont être présentés :

– Celui du contrôle de la *grosseur de grain*(1) (ou "moyen cristal") de 19 bandes recuites sur le même four à passage,

– Et celui du contrôle de l'*épaisseur* de 46 bandes laminées sur le même laminoir.

---

(1) Un métal recuit est un agrégat de petits cristaux juxtaposés de tailles variées. La grosseur de grain est définie par convention comme étant le diamètre moyen des sections planes de ces cristaux par le plan d'examen. Elle est mesurée par comparaison de la micrographie effectuée sur l'échantillon étudié avec un jeu de micrographies types dont les grosseurs de grain sont en progression sensiblement géométrique.

Espérances mathématiques des carrés moyens

Nature du contraste en long	Sommes de carrés	Degrés de liberté	Nature du carré moyen	k = 1 Moyenne du profil en travers	k = 2 Bombé du profil en travers	k = 3 Inclinaison du profil en travers	k = 4 Défaut de parallélisme du profil en travers
Moyenne du profil en long de chaque unité	D_{k1}	1	Moyenne pour toutes les unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 8_\mu\sigma_s^2 + 16_\mu\sigma_u^2 + 16\,n\mu^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + 2_\alpha\sigma_s^2 + 4_\alpha\sigma_u^2 + 4\,n\alpha^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{10}{9}{}_\beta\sigma_s^2 + \frac{20}{9}{}_\beta\sigma_u^2 + \frac{20\,n}{9}\beta^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{1}{10}{}_\gamma\sigma_s^2 + \frac{1}{5}{}_\gamma\sigma_u^2 + \frac{n}{5}\gamma^2$
	Q_{k1}	n − 1	Variations entre unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 8_\mu\sigma_s^2 + 16_\mu\sigma_u^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + 2_\alpha\sigma_s^2 + 4_\alpha\sigma_u^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{10}{9}{}_\beta\sigma_s^2 + \frac{20}{9}{}_\beta\sigma_u^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{1}{10}{}_\gamma\sigma_s^2 + \frac{1}{5}{}_\gamma\sigma_u^2$
Ecart entre 1ère et 2e simple de chaque unité	D_{k2}	1	Moyenne pour toutes les unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 8_\mu\sigma_s^2 + 4\,n\mu_{12/34}^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + 2_\alpha\sigma_s^2 + n\alpha_{12/34}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{10}{9}{}_\beta\sigma_s^2 + \frac{5\,n}{9}\beta_{12/34}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{1}{10}{}_\gamma\sigma_s^2 + \frac{n}{20}\gamma_{12/34}^2$
	Q_{k2}	n − 1	Variations entre unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 8_\mu\sigma_s^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + 2_\alpha\sigma_s^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{10}{9}{}_\beta\sigma_s^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{1}{10}{}_\gamma\sigma_s^2$
Ecart entre 1er et 2e prélèvement de la 1ère simple de chaque unité	D_{k3}	1	Moyenne pour toutes les unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 2\,n\mu_{1/2}^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + \frac{n}{2}\alpha_{1/2}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{5\,n}{18}\beta_{1/2}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{n}{40}\gamma_{1/2}^2$
	Q_{k3}	n − 1	Variations entre unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2$
Ecart entre 1er et 2e prélèvement de la 2e simple de chaque unité	D_{k4}	1	Moyenne pour toutes les unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 2\,n\mu_{3/4}^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2 + \frac{n}{2}\alpha_{3/4}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2 + \frac{5\,n}{18}\beta_{3/4}^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2 + \frac{n}{40}\gamma_{3/4}^2$
	Q_{k4}	n − 1	Variations entre unités	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + {}_\alpha\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + \frac{5}{9}{}_\beta\sigma_p^2$	$\sigma_r^2 + \frac{1}{20}{}_\gamma\sigma_p^2$

Ils ont été choisis car ils concernent l'étude :

– De deux des caractéristiques les plus importantes des bandes, l'une métallurgique, la grosseur de grain, et l'autre dimensionnelle, l'épaisseur,

– Et de deux des principales catégories d'outils de production, les fours de recuit à passage et les laminoirs.

Les fabrications échantillonnées ne sont pas homogènes vis-à-vis des caractères mesurés. En effet :

– Le moyen cristal nominal des 19 bandes recuites varie d'une bande à l'autre entre 25 et 70 microns,

– L'épaisseur nominale des 46 bandes laminées varie d'une bande à l'autre entre 0,4 et 1,6 mm.

Aussi est-il nécessaire d'utiliser des variables auxiliaires choisies de telle sorte que vis-à-vis d'elles les fabrications échantillonnées puissent être raisonnablement considérées comme homogènes et qu'en outre les deux conditions suivantes soient remplies :

– Distributions *gaussiennes* des variables aléatoires du modèle mathématique,

– *Invariance* des variances de ces variables aléatoires, en fonction en particulier du niveau nominal de la caractéristique étudiée.

L'expérience nous a conduit à choisir comme variables auxiliaires :

– Pour le moyen cristal :

$$\frac{1}{\log_{10}\sqrt{2}}\log_{10}\frac{MC}{MC_n}$$

où MC est le moyen cristal de l'échantillon,
MC_n est le moyen cristal nominal de la bande échantillonnée,

– et pour l'épaisseur :

$$100\,\frac{e - e_n}{e_n}$$

où e est l'épaisseur de l'échantillon,
e_n est l'épaisseur nominale de la bande échantillonnée.

II-1. ETUDE DES VARIATIONS DU MOYEN CRISTAL DE 19 BANDES RECUITES SUR LE MEME FOUR A PASSAGE

II-1.1. Analyse de la variance

Les tableaux ci-joints donnent l'analyse de variance avant et après regroupement.

Avant regroupement :

C'est l'analyse telle qu'elle a été présentée au paragraphe I.5.

– Deux des 16 contrastes seulement ont une moyenne pour toutes les unités nettement significativement différente de zéro. Ce sont :

- Pour k = 2 et l = 1 : le *bombé moyen en long* qui vaut – 0,31. La zone centrale des bandes (positions de mesure i = 2 et 3) a tendance à être moins recuite que les zones proches des bords (positions de mesure i = 1 et 4).
- pour k = 3 et l = 1 : *l'inclinaison moyenne* en long qui vaut – 0,12. Une moitié des bandes (positions de mesure i = 3 et 4) a tendance à être moins recuite que l'autre moitié (positions de mesure i = 1 et 2).

On notera l'absence :

– De défaut de parallélisme : on a bien affaire ici à un profil en travers *trapézoïdal,*

– De variations *systématiques* du profil en travers le long des unités.

– Deux des 16 contrastes seulement ont des variations entre unités nettement significativement différentes de celles des autres. Ce sont :

- pour k = 1 et l = 1 : variations entre unités de la moyenne en long de la moyenne du profil en travers.
  Le décentrage des unités (par rapport au niveau nominal visé MC_n) varie d'une unité à l'autre,
- pour k = 2 et l = 1 : variations entre unités du bombé moyen en long.

On notera l'absence de variations *aléatoires* du profil en travers le long des unités.

. *Après regroupement*

Tous les carrés moyens correspondant à l = 2, 3 et 4 (quel que soit k), à k = 4 (quel que soit l) et à l = 1, k = 3 (pour Q_{kl} seulement) étant du même ordre de grandeur, on les a regroupés pour former une résiduelle sous la rubrique "variations d'échantillonnage et de mesure" dont le carré moyen a pour espérance mathématique σ_r^2. On a donc admis que toutes les variances entre prélèvements intra simples étaient nulles.

L'estimation $\sigma_r^{*2} = 0{,}0459$ de σ_r^2 correspond à une incertitude à 95 % de la mesure du moyen cristal de ± 15 % environ. Pour un MC réel de 35μ les estimations par comparaison avec des images-types pourront ainsi varier entre 30 et 40μ. Or c'est justement là l'imprécision courante de ce type de mesure. On peut donc dire que :

[Le modèle mathématique choisi s'ajuste aux données expérimentales aux erreurs de mesure près.]

Exemple 1 – Moyen cristal de 19 bandes recuites

Analyses de variance avant et après regroupement

Avant regroupement		k = 1			k = 2			k = 3			k = 4		
		Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens
$l = 1$	moyenne	4,2253	1	4,2253	7,4281	1	7,4281	0,6133	1	0,6133	0,0294	1	0,0294
	entre unités	26,7603	18	1,4867	3,2527	18	0,1807	0,9802	18	0,0545	0,6162	18	0,0342
$l = 3$	moyenne	0,0389	1	0,0389	0,0021	1	0,0021	0,0028	1	0,0028	0,1441	1	0,1441
	entre unités	0,5503	18	0,0306	0,5243	18	0,0291	0,8605	18	0,0478	1,0153	18	0,0564
$l = 3$	moyenne	0,0007	1	0,0007	0,0160	1	0,0160	0,0111	1	0,0111	0,1810	1	0,1810
	entre unités	0,8513	18	0,0473	0,9943	18	0,0552	0,8358	18	0,0464	0,4891	18	0,0272
$l = 4$	moyenne	0,0592	1	0,0592	0,0576	1	0,0576	0,0089	1	0,0089	0,0182	1	0,0182
	entre unités	0,9166	18	0,0509	0,5625	18	0,0312	1,7378	18	0,0965	0,6620	18	0,0368

Après regroupement		Sommes de carrés	d.d.*l.*	Carrés moyens	Espérances mathématiques des carrés moyens
Moyenne du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	4,2253	1	4,2253	$\sigma_r^2 + 16_\mu\sigma_u^2 + 304\mu^2$
	Variations entre unités	26,7603	18	1,4867	$\sigma_r^2 + 16_\mu\sigma_u^2$
Bombé du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	7,4281	1	7,4281	$\sigma_r^2 + 4_\alpha\sigma_u^2 + 76\alpha^2$
	variations entre unités	3,2527	18	0,1807	$\sigma_r^2 + 4_\alpha\sigma_u^2$
Inclinaison du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	0,6133	1	0,6133	$\sigma_r^2 + 42{,}2\beta^2$
Variations d'échantillonnage et de mesure		12,1662	265	0,0459	σ_r^2
		54,4459	304		

II-1.2. Estimations et intervalles de confiance des paramètres du modèle

Paramètres fixes

– Ils sont ici au nombre de 2 : α et β.

– Leurs estimations α^* et β^* sont égales aux moyennes pour toutes les unités des contrastes correspondants :

$$\begin{cases} \alpha^* = z_{21.} = -0{,}31 \\ \beta^* = z_{31.} = -0{,}12 \end{cases}$$

– Pour déterminer des intervalles de confiance de α et β il est commode d'utiliser la méthode suivante. Prenons par exemple α ; le test de l'hypothèse nulle $\alpha = 0$ se fait dans l'analyse de variance à l'aide du rapport F de Snedecor :

$$F = \frac{D_{21}/1}{Q_{21}/18} = \frac{7{,}4281}{0{,}1807} = 41{,}1$$

avec 1 et 18 degrés de liberté. Dans le cas particulier où le degré de liberté du numérateur de F est égal à 1, F est équivalent au carré du t de Student-Fisher que l'on formerait en faisant le rapport de l'estimation de α à l'estimation de l'écart-type de sa distribution :

$$t = \frac{\alpha^*}{\sigma^*_\alpha}$$

d'où : comme $F = t^2$:

$$\sigma^*_\alpha = \frac{\alpha^*}{t} = \frac{|\alpha^*|}{\sqrt{F}} = \frac{0{,}31}{\sqrt{41{,}1}} = 0{,}049 \text{ avec 18 d.d.}l.$$

La connaissance de α^* et de F permet ainsi d'obtenir directement σ^*_α.

L'intervalle de confiance de α est alors, au risque 5 % :

$$\alpha^* \pm t_{5\%,18}\sigma^*_\alpha = -0{,}31 \pm (2{,}1 \times 0{,}049)$$
$$= -0{,}31 \pm 0{,}10 \text{ soit } -0{,}41 \; ; -0{,}21$$

et on peut écrire :

[[Probabilité $[-0{,}41 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}21] = 0{,}95$

Pour β on trouverait : $\sigma^*_\beta = 0{,}033$ avec 265 ddl et

[[Probabilité $[-0{,}19 \leqslant \beta \leqslant -0{,}05] = 0{,}95$

- *Variances des variables aléatoires*

– Elles sont ici au nombre de 3 : ${}_\mu\sigma^2_u$, ${}_\alpha\sigma^2_u$ et σ^2_r

– σ^2_r est estimé par le carré moyen des variations dites d'échantillonnage et de mesure :

$$[[\sigma^{*2}_r = 0{,}0459 \,. \quad \text{avec 265 ddl } (\sigma^*_r = 0{,}214)$$

L'intervalle de confiance de σ_r^2 s'obtient par les formules classiques faisant intervenir les limites fiducielles du χ^2 à 265 degrés de liberté, soit pour un risque de 5 % : 221 et 311.

Les limites de l'intervalle de confiance sont alors égales à :

$$\frac{\sigma_r^{*2}}{\chi^2/265} \text{ soit } \frac{0{,}0459}{311/265} = \frac{0{,}0459}{1{,}175} = 0{,}0391$$

$$\text{et } \frac{0{,}0459}{221/265} = \frac{0{,}0459}{0{,}835} = 0{,}0550$$

et on peut écrire :

Probabilité $[0{,}039 \leqslant \sigma_r^2 \leqslant 0{,}055] = 0{,}95$

et aussi :

Probabilité $[0{,}198 \leqslant \sigma_r \leqslant 0{,}234] = 0{,}95$

— ${}_\mu\sigma_u^2$ et ${}_\alpha\sigma_u^2$ sont estimés par différences des carrés moyens des variations entre unités de μ et de α et du carré moyen des variations d'échantillonnage et de mesure.

On a en effet :

$$\begin{cases} \sigma_r^{*2} + 16\,{}_\mu\sigma_u^{*2} = 1{,}4867 \\ \sigma_r^{*2} + 4\,{}_\alpha\sigma_u^{*2} = 0{,}1807 \\ \sigma_r^{*2} = 0{,}0459 \end{cases}$$

d'où :

$${}_\mu\sigma_u^{*2} = 0{,}0900 \; ({}_\mu\sigma_u^* = 0{,}300)$$
$${}_\alpha\sigma_u^{*2} = 0{,}0337 \; ({}_\alpha\sigma_u^* = 0{,}184)$$

Pour déterminer des intervalles de confiance de ${}_\mu\sigma_u^2$ et ${}_\alpha\sigma_u^2$ nous avons utilisé les *formules de BROSS*(1) qui sont rappelées ci-dessous :

· Soit s_1^2 une estimation avec n_1 degrés de liberté de σ_1^2

s_2^2 une estimation avec n_2 degrés de liberté de σ_2^2

ces deux estimations étant indépendantes en probabilité.

On recherche des limites de confiance de l'estimation non biaisée :

$$s^2 = \frac{s_1^2 - s_2^2}{r} \text{ de } \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{r}$$

---

(1) BROSS : "Fiducial intervals for variance components" Biometrics, 6, 1950, 136.

Les limites fiducielles de BROSS sont égales à :

Limite supérieure :

$$\overline{L}_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{F - F_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{F F'_{(1-\frac{\alpha}{2})} - F_{(1-\frac{\alpha}{2})}} s^2$$

Limite inférieure :

$$\underline{L}_{(\frac{\alpha}{2})} = \frac{F - F_{(\frac{\alpha}{2})}}{F F'_{(\frac{\alpha}{2})} - F_{(\frac{\alpha}{2})}} s^2$$

où $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ et où :

$$F_{(\frac{\alpha}{2})} = F_{n_2}^{n_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad F'_{(\frac{\alpha}{2})} = F_{\infty}^{n_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{F_{n_1}^{n_2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{et} \quad F'_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{F_{n_1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

sont les limites fiducielles du F de Snedecor avec les degrés de liberté et les risques indiqués.

BROSS a montré que ces limites approchées étaient correctes dans 3 cas limites :

$$\begin{cases} \text{si } n_2 \rightarrow \infty \\ \text{si } F \rightarrow \infty \\ \text{si } F = F_\alpha \end{cases}$$

et que l'approximation était bonne pour $n_1 = 1$, 3 ou 5, $F/F_\alpha = 1{,}5$ à 5,0, $n_2 = 12$ et $\alpha = 0{,}05$, la probabilité que σ^2 soit en dehors de l'intervalle des limites de confiance ainsi calculées étant comprise, pour les cas étudiés, entre 5,02 et 5,31 %.

- Prenons par exemple le cas de l'intervalle de confiance de ${}_{\mu}\sigma_u^2$:

On a :

$$\begin{cases} s_1^2 = 1{,}4867 \\ s_2^2 = 0{,}0459 \quad \text{d'où : } s^2 = 0{,}0900 \\ r = 16 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = 265 \end{cases}$$

d'où au risque $\alpha = 5$ % :

$$F_{(\frac{\alpha}{2})} = 1{,}66 \; ; \; F'_{(\frac{\alpha}{2})} = 1{,}62 \; ; \; F_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{1{,}95} \text{ et } F'_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{1{,}92},$$

d'où les limites de confiance de ${}_{\mu}\sigma_u^2$:
0,0545 et 0,1755 ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \text{Probabilité } [0{,}0545 \leqslant {}_{\mu}\sigma_u^2 \leqslant 0{,}1755] = 0{,}95 \\ \text{et aussi :} \\ \text{Probabilité } [0{,}23 \leqslant {}_{\mu}\sigma_u \leqslant 0{,}42] \quad = 0{,}95 \end{cases}$$

On trouverait de même pour ${}_{\alpha}\sigma_u^2$:

$$\begin{cases} \text{Probabilité } [0{,}0163 \leqslant {}_{\alpha}\sigma_u^2 \leqslant 0{,}0750] = 0{,}95 \\ \text{et} \\ \text{Probabilité } [0{,}13 \leqslant {}_{\alpha}\sigma_u \leqslant 0{,}27] \quad = 0{,}95 \end{cases}$$

- *En résumé*

Les estimations et intervalles de confiance à 95 % des paramètres du modèle sont les suivants :

Paramètres du modèle	Significations des paramètres	Estimations	Intervalles de confiance à 95 %
${}_{\mu}\sigma_u$	Dispersion du décentrage des unités	0,30	0,23 à 0,42
α	Bombé moyen de la fabrication	– 0,31	– 0,41 à – 0,21
${}_{\alpha}\sigma_u$	Dispersion du bombé des unités	0,18	0,13 à 0,27
β	Inclinaison moyenne de la fabrication	– 0,12	– 0,19 à – 0,05
σ_r	Dispersion d'échantillonnage et de mesure	0,21	0,20 à 0,23

II-1.3. Décentrage moyen et dispersion pour chacune des 4 positions en travers

Les estimations du décentrage moyen pour chaque position en travers se déduisent de celles de α et de β :

$$\begin{cases} \text{en position } i = 1 : -\dfrac{\alpha^*}{2} - \dfrac{\beta^*}{2} = +\,0{,}21 \\ \quad '' \quad i = 2 : +\dfrac{\alpha^*}{2} - \dfrac{\beta^*}{6} = -\,0{,}14 \\ \quad '' \quad i = 3 : +\dfrac{\alpha^*}{2} + \dfrac{\beta^*}{6} = -\,0{,}18 \\ \quad '' \quad i = 4 : -\dfrac{\alpha^*}{2} + \dfrac{\beta^*}{2} = +\,0{,}09 \end{cases}$$

- La dispersion des valeurs individuelles "*vraies*" (sans tenir compte de la variabilité due à l'échantillonnage et aux mesures) autour de ces décentrages se déduit des estimations de ${}_{\mu}\sigma_u^2$ et de ${}_{\alpha}\sigma_u^2$:

$$ {}_{\mu}\sigma_u^{*2} + \frac{{}_{\alpha}\sigma_u^{*2}}{4} = 0{,}0984\ (0{,}0900 + 0{,}0084) $$

soit un écart-type de 0,314 et des variations à 95 % de ± 0,63 (quelle que soit la position en travers).

Les intervalles de variation à 95 % des valeurs individuelles vraies sont alors les suivantes :

en position i = 1 : − 0,42 à + 0,84
" i = 2 : − 0,77 à + 0,49
" i = 3 : − 0,81 à + 0,45
" i = 4 : − 0,54 à + 0,72

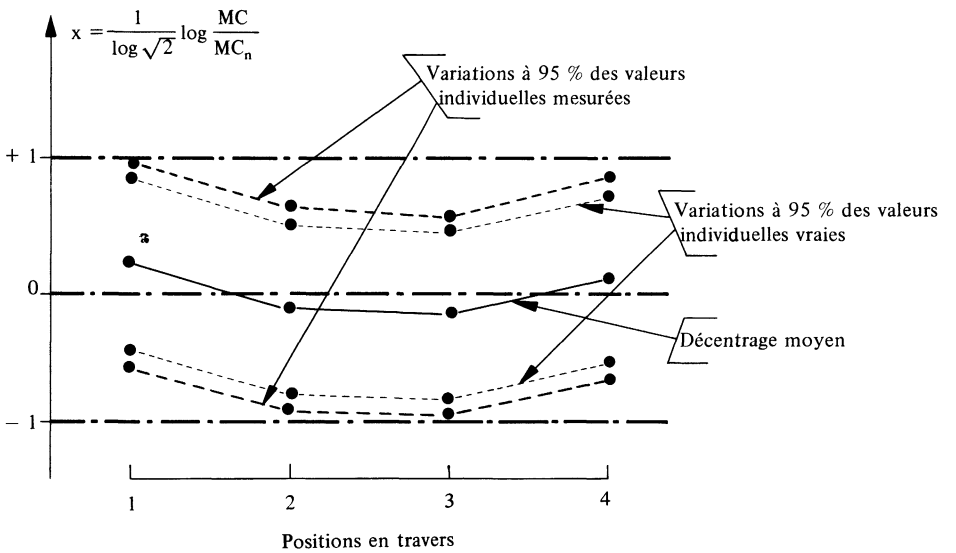
- La dispersion des valeurs individuelles *mesurées* (en tenant compte de la variabilité due à l'échantillonnage et aux mesures) est :

$$ \left({}_{\mu}\sigma_u^{*2} + \frac{{}_{\alpha}\sigma_u^{*2}}{4}\right) + \sigma_r^{*2} = 0{,}1443\ (0{,}0984 + 0{,}0459) $$

soit un écart-type de 0,380 et des variations à 95 % de ± 0,76. Les intervalles de variations à 95 % des valeurs individuelles mesurées sont alors les suivantes :

en position i = 1 : − 0,55 à + 0,97
" i = 2 : − 0,90 à + 0,62
" i = 3 : − 0,94 à + 0,58
" i = 4 : − 0,67 à + 0,85

Ces différents résultats sont résumés par le graphique ci-dessous sur le-



quel on a reporté les limites ± 1 qui correspondent aux fourchettes habituellement imposées par les clients (Moyen cristal pouvant aller du simple au double).

Ce graphique met en évidence les points suivants :

[Les limites de tolérance ± 1 sont largement tenues à 95 % et pour la fabrication considérée on peut envisager d'en accepter de plus réduites.]

- Les variations en travers sont faibles et une action dans ce domaine n'aurait que peu d'effet.

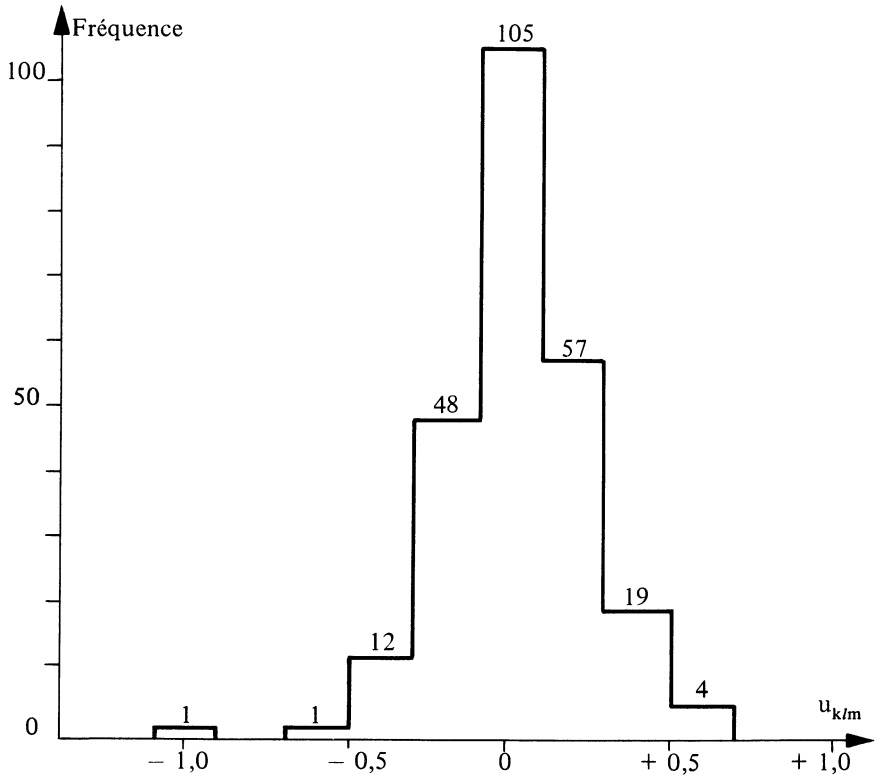
- C'est la *dispersion du décentrage des unités* qui est à l'origine de la part la plus importante des variations :

96,5 % (en variance) pour les valeurs individuelles vraies,
62,3 % " " " mesurées.

[C'est donc par une action sur cette dispersion que l'on peut espérer améliorer les résultats du four.]

II-1.4. Vérification de la normalité de la distribution des erreurs d'échantillonnage et de mesure

Tous les u_{klm} entrant dans le calcul de la somme des carrés "variations d'échantillonnage et de mesure" du tableau d'analyse de la variance après regrou-



pement sont distribués normalement de moyenne 0 (sauf pour k = 3, l = 1) et de variance σ_r^2 si les hypothèses faites sur le modèle sont remplies.

L'étude de la distribution de ces u_{klm} peut donc permettre de juger de la validité de ces hypothèses.

L'histogramme donné ci-dessous concerne 247 u_{klm}, tous ceux entrant dans la somme des carrés "variations d'échantillonnage et de mesure" à l'exception des 19 valeurs correspondant à k = 3 et l = 1 dont la moyenne est significativement différente de zéro.

[[L'allure de cet histogramme montre que l'on a affaire à une distribution suffisamment proche de la loi normale pour que les conclusions des paragraphes précédentes soient valables.]]

II-2. ETUDE DES VARIATIONS DE L'EPAISSEUR DE 46 BANDES LAMINEES SUR LE MEME LAMINOIR

Cet exemple sera traité plus succinctement que le précédent. Seuls quelques points importants seront abordés.

II-2.1. Analyse de la variance

Elle est donnée, avant et après regroupement, par les 2 tableaux ci-joints.

· La situation est assez nettement moins simple que dans l'exemple précédent. En effet :

– La moyenne du profil en travers varie non seulement d'une unité à l'autre, mais aussi d'un prélèvement à l'autre, sans pour cela que l'on puisse mettre en évidence une variabilité attachée aux simples,

– Le profil en travers varie d'une unité à l'autre non seulement par son bombé mais aussi par son inclinaison.

– Les carrés moyens correspondant, pour l = 2, 3 et 4, à k = 2, 3 et 4 ne sont pas du même ordre de grandeur. Ils se classent par ordre décroissant :

– ceux correspondant à k = 3,
– " " à k = 2,
– " " à k = 4,

et leur regroupement sous la rubrique "variations d'échantillonnage et de mesure" n'est pas justifié sur le plan purement statistique.

· L'analyse de variance nous conduit à adopter un modèle comportant :

– 3 paramètres fixes : μ, α et β

– 5 groupes de variables aléatoires de variances :

$$_{\mu}\sigma_u^2 , \ _{\mu}\sigma_p^2 , \ _{\alpha}\sigma_u^2 , \ _{\beta}\sigma_u^2 \text{ et } \sigma_r^2 .$$

Exemple 2 – Epaisseur de 46 bandes laminées
Analyses de variance avant et après regroupement

Avant regroupement		k = 1			k = 2			k = 3			k = 4		
		Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens	Sommes de carrés	dd*l*	Carrés moyens
$l = 1$	Moyenne	506,4993	1	506,4993	173,9025	1	173,9025	2,0916	1	2,0916	0,1378	1	0,1378
	entre unités	995,6031	45	22,1245	27,1927	45	0,6043	18,8519	45	0,4189	1,5111	45	0,0336
$l = 2$	Moyenne	0,0132	1	0,0132	0,1170	1	0,1170	0,2381	1	0,2381	0,0036	1	0,0036
	entre unités	57,5160	45	1,2781	2,5180	45	0,0560	3,8640	45	0,0859	1,0464	45	0,0233
$l = 3$	Moyenne	0,1634	1	0,1634	0,0001	1	0,0001	0,1664	1	0,1664	0,0169	1	0,0169
	entre unités	53,3720	45	1,1860	2,1687	45	0,0482	2,2925	45	0,0509	0,7422	45	0,0165
$l = 4$	Moyenne	4,3305	1	4,3305	0,0965	1	0,0965	0,0164	1	0,0164	0,0031	1	0,0031
	entre unités	59,4083	45	1,3202	1,6133	45	0,0359	2,7673	45	0,0615	0,7894	45	0,0175

Après regroupement		Sommes de carrés	d.d.*l.*	Carrés moyens	Espérances mathématiques des carrés moyens
Moyenne du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	506,4993	1	506,4993	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 16_\mu\sigma_u^2 + 736\mu^2$
	Variations entre unités	995,6031	45	22,1245	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2 + 16_\mu\sigma_u^2$
	Variations entre prélèvements (intra unités)	174,8034	138	1,2667	$\sigma_r^2 + 4_\mu\sigma_p^2$
Bombé du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	173,9025	1	173,9025	$\sigma_r^2 \quad + 4_\alpha\sigma_u^2 \quad + 184\alpha^2$
	Variations entre unités	27,1927	45	0,6043	$\sigma_r^2 \quad + 4_\alpha\sigma_u^2$
Inclinaison du profil en travers	Moyenne pour toutes les unités	2,0916	1	2,0916	$\sigma_r^2 \quad + 2{,}22_\beta\sigma_u^2 + 102{,}2\,\beta^2$
	Variations entre unités	18,8519	45	0,4189	$\sigma_r^2 \quad + 2{,}22_\beta\sigma_u^2$
Variations d'échantillonnage et de mesure		20,1088	460	0,0437	σ_r^2
		1 919,0533	736		

Comme dans l'exemple précédent on note :

– L'absence d'un *défaut de parallélisme* nettement significatif,

– L'absence de variations le long des unités du profil en travers, aussi bien *systématiques qu'aléatoires.*

II-2.2. **Variations d'échantillonnage et de mesure**

- L'analyse de variance avant regroupement nous conduirait, d'après ce qui a été dit jusqu'ici, à admettre l'existence des variances entre prélèvements intra simples ${}_{\alpha}\sigma_p^2$, ${}_{\beta}\sigma_p^2$ et ${}_{\gamma}\sigma_p^2$ de trois des contrastes en travers, bombé – inclinaison et défaut de parallélisme, ou au moins de deux d'entre eux.

- Sur le *plan technique,* et sans aucune justification statistique, nous préférons rejeter cette solution et remettre en cause les hypothèses sur le modèle mathématique.

Une de ces hypothèses consiste à affirmer que la variance des ϵ_{ijm} est égale à σ_r^2 quels que soient les indices i, j, m et en particulier la position en travers (indice i).

En fait il est réaliste, *dans le cas de l'épaisseur,* de penser qu'il peut en être autrement car la variance des ϵ_{ijm} risque d'être plus élevée en positions i = 1 et 4 (à proximité des bords des bandes) qu'en positions i = 2 et 3 par suite des erreurs d'échantillonnage. Ces erreurs d'échantillonnage liées à la nature aléatoire de la définition du point exact de mesure pour i donné sont en effet probablement plus importantes dans les zones où l'épaisseur varie rapidement (c'est le cas à proximité des bords des bandes) que dans les autres.

Il est à noter que, pour le moyen cristal, cette situation a peu de chances de se présenter car la mesure du MC par comparaison avec des micrographies-types est entachée d'une erreur dont la variance est relativement très élevée. Dans le carré moyen "variations d'échantillonnage et de mesure" c'est par conséquent la part due à la mesure elle-même qui est prépondérante alors que dans le cas de l'épaisseur ce serait plutôt celle due à l'échantillonnage.

- Admettons donc que la variance "échantillonnage et mesure" n'est pas la même suivant que les échantillons sont pris en positions i = 1 et 4 ou en positions i = 2 et 3.

Désignons par σ_b^2 (à proximité des *b*ords) et σ_m^2 (dans le *m*ilieu des bandes) les variances correspondant à ces deux types de positions en travers.

Les espérances mathématiques des carrés moyens sont alors les suivantes (pour l = 2, 3 et 4) :

– pour k = 2 : $\frac{1}{2}(\sigma_b^2 + \sigma_m^2)$

– pour k = 3 : $\frac{1}{10}(9\sigma_b^2 + \sigma_m^2)$

– pour k = 4 : $\frac{1}{10}(\sigma_b^2 + 9\sigma_m^2)$

ce qui conduit à prendre comme estimations :

$$\sigma_b^* = 0{,}27 \quad \text{et} \quad \sigma_m^* = 0{,}135$$

Les variations à 95 % des erreurs d'échantillonnage et de mesure sont de :

± 0,54 % dans les zones proches des bords,

± 0,27 % dans le milieu des bandes,

soit, pour une épaisseur de l'ordre de 0,75 mm :

$$\pm 4\,\mu \quad \text{et} \quad \pm 2\,\mu$$

Ces valeurs nous paraissent correspondre tout à fait à la réalité physique.

II-2.3. **Origines des variations d'épaisseur**

- Les estimations et intervalles de confiance à 95 % des paramètres du modèle sont les suivants :

Paramètres du modèle	Signification des paramètres	Estimations	Intervalles de confiance à 95 %
μ	Décentrage moyen de la fabrication	– 0,83	– 1,18 à – 0,48
${}_{\mu}\sigma_u$	Dispersion du décentrage des unités	1,14	0,92 à 1,46
${}_{\mu}\sigma_p$	Dispersion du décentrage des prélèvements (intra unités)	0,55	0,49 à 0,64
α	Bombé moyen de la fabrication	+ 0,97	+ 0,86 à + 1,09
${}_{\alpha}\sigma_u$	Dispersion du bombé des unités	0,37	0,30 à 0,48
β	Inclinaison moyenne de la fabrication	+ 0,13	+ 0,01 à + 0,27
${}_{\beta}\sigma_u$	Dispersion de l'inclinaison des unités	0,41	0,33 à 0,53
σ_r(1)	Dispersion d'échantillonnage et de mesure	0,21	0,20 à 0,22

(1) en supposant pour simplifier que σ_r ne dépend pas de i.

- Les estimations du décentrage moyen pour chaque position en travers et les intervalles de variations à 95 % des valeurs individuelles vraies et mesurées sont les suivants :

	En position i = 1	En position i = 2	En position i = 3	En position i = 4
Décentrages moyens	– 1,39	– 0,37	– 0,32	– 1,24
Intervalles de variation à 95 % des valeurs individuelles vraies	– 3,98 + 1,20	– 2,94 + 2,20	– 2,89 + 2,25	– 3,83 + 1,35
Intervalles de variation à 95 % des valeurs individuelles mesurées	– 4,02 + 1,24	– 2,97 + 2,23	– 2,92 + 2,28	– 3,87 + 1,39

Comme dans le cas du moyen cristal c'est la dispersion du décentrage des unités ($_{\mu}\sigma_u$) qui est à l'origine de la part la plus importante des variations : 88 % (en variance).

CONCLUSIONS

- Le plan d'expérience qui vient d'être présenté est utilisé à Sérifontaine en *contrôle de fabrication.* C'est là à notre avis le point le plus important car cela permet de prendre en compte les variations à *long terme* des caractéristiques étudiées quelles qu'en soient les causes. Les deux exemples d'application qui ont été exposés montrent d'ailleurs que ces variations à long terme (dispersion entre unités) sont parmi les plus importantes. Un essai en fabrication de courte durée, même de taille élevée, ne permettrait probablement pas de les déceler et risquerait de conduire à des conclusions exagérément optimistes.

- La principale originalité du plan d'expérience est qu'il permet d'étudier simultanément des variations de caractère systématique et des variations par nature aléatoires et hiérarchisées. L'utilisation de plans de ce type nous parait tout à fait indiquée dès que l'on a affaire à ce que nous avons appelé des *fabrications réputées homogènes.* C'est une situation qui se rencontre très frèquemment dans toutes sortes d'industries et on peut s'étonner de ce que ces plans ne se soient pas plus développés si on en juge par le peu de place qu'ils occupent dans les publications spécialisées.

- L'adaptation à chaque cas particulier d'un plan de ce type nécessite au préalable une connaissance pratique suffisamment approfondie de la fabrication et du caractère étudiés. C'est ce que nous avons essayé de montrer dans les trois domaines suivants :

– Choix du nombre de points de mesure sur la largeur des bandes et choix des paramètres utilisés pour décrire le profil en travers. Ces deux choix

ont été faits en fonction du type de profil (trapézoïdal) auquel nous nous attendions compte tenu de l'expérience antérieure dont nous disposions.

– Choix d'une variable auxiliaire dont les variations aléatoires suivent à tous les niveaux des distributions sensiblement normales et de variances constantes.

– Interprétation de certains résultats de l'analyse de variance : dans le deuxième exemple d'application nous avons préféré supposer que les erreurs d'échantillonnage et de mesure de l'épaisseur pouvaient être plus dispersées à proximité des bords qu'ailleurs plutôt que d'admettre l'existence de variations entre prélèvements intra simples du profil en travers.

- Des deux exemples d'application qui ont été présentés il se dégage surtout que ce sont les variations entre unités qui sont prépondérantes. Chaque unité a sa personnalité propre en ce sens qu'elle a un profil en travers stable aussi bien par son niveau moyen que par sa forme. C'est d'autre part la dispersion du décentrage des unités qui est à l'origine de la part la plus importante des variations totales. Cela a deux conséquences pratiques :

– Sur le plan *amélioration de la qualité* : c'est par une action sur le centrage des unités que l'on peut espérer obtenir des résultats. Les problèmes que cela pose sont nombreux et variés : stabilité des outils de fabrication, définition de leurs réglages, maintenance de leurs moyens de contrôle en continu. etc.

– Sur le plan *contrôle* : on a intérêt à accroître au maximum l'information sur la variabilité entre unités, c'est-à-dire à échantillonner le plus grand nombre possible d'unités et au contraire à réduire au minimum l'information sur la variabilité intra-unités, c'est-à-dire à échantillonner seulement 2 simples par unité et effectuer seulement 2 prélèvements par simple. Le fait que ces deux facteurs aient chacun 2 niveaux permet par ailleurs d'utiliser des contrastes en long ce qui facilite l'analyse du plan d'expérience et le dépouillement des résultats et permet de juger facilement de la normalité des distributions des paramètres aléatoires du modèle.