

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

ANNIE ASTIÉ

Comparaisons par paires : recherche d'un classement ou d'un ensemble de classements des objets comparés

Revue de statistique appliquée, tome 21, n° 3 (1973), p. 51-63

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1973__21_3_51_0

© Société française de statistique, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPARAISONS PAR PAIRES :
RECHERCHE D'UN CLASSEMENT
OU D'UN ENSEMBLE DE CLASSEMENTS
DES OBJETS COMPARÉS ⁽¹⁾

Annie ASTIÉ

Laboratoire de Statistique, Université Paul Sabatier TOULOUSE

I – INTRODUCTION

Les applications des méthodes de comparaisons par paires sont nombreuses et variées. Citons les problèmes exposés par Doehlert dans (6) et qui lui ont été proposés par la Compagnie du Pont de Nemours :

La qualité et par conséquent la valeur marchande de nombreux produits dépend de l'attrait qu'ils exercent sur les sens, —vue, toucher, et goût — et plus généralement des préférences esthétiques des consommateurs. Pour mesurer ces réactions subjectives, les données sont souvent obtenues sous la forme de comparaisons d'objets. Quand le but recherché est l'obtention d'une relation d'ordre sur l'ensemble des objets, il n'est pas toujours possible de demander à un juge de classer l'ensemble complet des produits. D'une part, certains objets, (par exemple des tapis), sont trop volumineux pour qu'on puisse les présenter autrement que par petits groupes ; d'autre part, dans certaines comparaisons, les facultés de discernement s'émeussent, particulièrement le goût et l'odorat, et là encore seulement un petit nombre d'objets peut être présenté à la fois.

Les données seront donc collectées sous forme d'ordres sur des sous-ensembles des objets (plus précisément sur des paires d'objets dans les comparaisons par paires), et le problème sera d'estimer un ordre sur l'ensemble complet des objets.

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ désigne l'ensemble des objets, nous considérons ici qu'une comparaison de la paire $\{x_i, x_j\}$ est une expérience à 2 issues possibles (on ne permet pas les égalités) :

- x_i est préféré à x_j avec la probabilité π_{ij}
- x_j est préféré à x_i avec la probabilité π_{ji}

où $\pi_{ij} + \pi_{ji} = 1$.

Nous pouvons alors considérer la relation binaire — que nous appellerons relation de préférence sous-jacente à X — définie par :

$$x_i \text{ est "préférable" à } x_j \text{ si } \pi_{ij} \geq \pi_{ji}, \text{ c'est-à-dire si } \pi_{ij} \geq \frac{1}{2}.$$

(1) Article remis le 15/9/72 ; révisé le 2/11/72.

Si cette relation est symétrique (c'est-à-dire si on a à la fois x_i préférable à x_j et x_j préférable à x_i pour tout (i, j)), c'est que $\pi_{ij} = \frac{1}{2}$ pour tout (i, j) , c'est-à-dire que les réponses sont données indifféremment l'une pour l'autre.

Le but d'une expérience de comparaisons par paires étant, en général, de faire apparaître une relation de préférence qui soit un ordre sur X , le problème fondamental sera d'essayer de réfuter l'hypothèse de symétrie de la relation de préférence $\left(\pi_{ij} = \frac{1}{2}, \forall (i, j)\right)$, et parallèlement d'estimer cette relation. Nous étudierons ici 2 modèles différents : le premier modèle conduit à l'estimation d'un *classement* des objets, (qui se déduit de l'estimation des paramètres π_{ij}). En fait c'est l'estimation du classement, et non celle des paramètres, qui nous intéresse. Le deuxième modèle conduit à l'estimation d'un *ensemble de classements* (ces classements seront estimés directement et non plus à partir d'une estimation des paramètres du modèle).

Rappelons quelques définitions :

Une relation binaire R sur X est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times X$

- R est anti-réflexive si : $(x, x) \notin R, \forall x \in X$
- R est symétrique si : $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- R est anti-symétrique si : $(x, y) \in R, x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin R$
- R est transitive si : $(x, y) \in R, (y, z) \in R, x \neq z \Rightarrow (x, z) \in R$
- R est complète si : $(x, y) \notin R, x \neq y \Rightarrow (y, x) \in R$

Lorsque nous parlerons de relation d'ordre, il s'agira de relation d'ordre strict (anti-réflexive, anti-symétrique et transitive) ; si une relation d'ordre est complète, c'est un ordre total ; sinon c'est un ordre partiel.

On appelle *l*-graphe, la représentation graphique d'une relation binaire ; c'est-à-dire un graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arcs un sous-ensemble R de $X \times X$; on note ce graphe (X, R) .

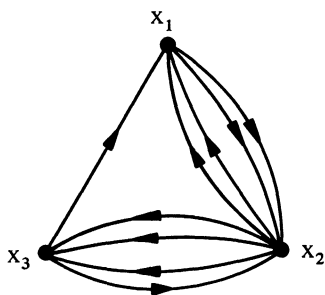
II – POSITION DU PROBLEME

1) Les données :

L'expérience consiste en m_{ij} comparaisons de la paire $\{x_i, x_j\}$ pour $1 \leq i < j \leq n$; soit au total en $m = \sum_{i < j} m_{ij}$ comparaisons effectuées indépendamment les unes des autres.

Le résultat de l'expérience sera représenté par un graphe orienté $G = (X, U)$ où U , ensemble des arcs du graphe, est obtenu en traçant un arc de x_i vers x_j chaque fois que x_i est préféré à x_j dans une comparaison. Il y a donc m_{ij} arcs entre x_i et x_j .

Exemple : $n = 3$, $m_{12} = 4$, $m_{13} = 1$, $m_{23} = 4$



L'expérience a donné les résultats suivants :

Sur les 4 comparaisons de x_1 et x_2 , x_1 a été préféré 2 fois.

Sur les 4 comparaisons de x_2 et x_3 , x_2 a été préféré 3 fois ;

enfin, dans l'unique comparaison de x_1 et x_3 , x_3 a été préféré.

Ces résultats peuvent également être représentés par une matrice carrée d'ordre n , $\|a_{ij}\|$, appelée matrice associée de G , où a_{ij} est le nombre d'arcs allant de x_i vers x_j ($a_{ij} + a_{ji} = m_{ij}$).

Dans l'exemple ci-dessus :

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On note Ω l'ensemble des graphes orientés $G = (X, U)$ dont le nombre d'arcs d'extrémités x_i et x_j est m_{ij} , ($|X| = n, |U| = m$)(*) ; le résultat de l'expérience est donc un graphe de Ω .

Remarque : Les graphes de Ω sont des l-graphes (définis ci-dessus) si et seulement si : $m_{ij} \leq 1, \forall (i, j)$.

La loi de probabilité sur Ω sera fonction du paramètre $\pi = (\dots, \pi_{ij}, \dots)$ qui appartient à un cube de côté 1 et de dimension $|I| \leq \frac{n(n-1)}{2}$

où $I = \{(i, j), i < j, m_{ij} > 0\}$.

Les comparaisons étant supposées indépendantes en probabilité, on a un produit de lois binômiales :

$$P_\pi(G) = \prod_{(i,j) \in I} C_{m_{ij}}^{a_{ij}} \pi_{ij}^{a_{ij}} \pi_{ji}^{a_{ji}}, \quad G \in \Omega$$

où $\|a_{ij}\|$ est la matrice associée de G .

— Pour $m_{ij} > 0$, l'estimation de π_{ij} par la méthode du maximum de vraisemblance est :

$$\hat{\pi}_{ij} = \frac{a_{ij}}{m_{ij}}$$

— Si $m_{ij} = 0$, c'est-à-dire si le couple $\{x_i, x_j\}$ n'est pas comparé, nous conviendrons qu'une relation de préférence peut contenir aussi bien (x_i, x_j) que (x_j, x_i) ; et nous poserons $\pi_{ij} = \frac{1}{2}$.

 (*) On note $|E|$ le cardinal de l'ensemble E .

En pratique, on devra toutefois se garder d'abuser de cette convention et on ne l'utilisera que si on a un petit nombre de paires qui sont impossibles à comparer.

Nous noterons $\hat{\pi} = (\dots, \hat{\pi}_{ij}, \dots)$ le vecteur de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$:

$$\hat{\pi}_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{m_{ij}} & \text{si } m_{ij} > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } m_{ij} = 0 \end{cases}$$

Pour reprendre l'idée de l'introduction, nous dirons qu'une relation binaire anti-réflexive R sur X est une *relation de préférence* si pour tout $(x_i, x_j) \in R$, on a : $\pi_{ij} \geq \frac{1}{2}$.

Notons R_π et \underline{R}_π les relations :

$$(x_i, x_j) \in R_\pi \Leftrightarrow \pi_{ij} \geq \frac{1}{2}$$

$$(x_i, x_j) \in \underline{R}_\pi \Leftrightarrow \pi_{ij} > \frac{1}{2}$$

Une relation binaire est alors une relation de préférence si et seulement si elle est contenue dans R_π .

Nous noterons $R_{\hat{\pi}}$ et $\underline{R}_{\hat{\pi}}$ les relations définies par :

$$(x_i, x_j) \in R_{\hat{\pi}} \Leftrightarrow \hat{\pi}_{ij} \geq \frac{1}{2}$$

$$(x_i, x_j) \in \underline{R}_{\hat{\pi}} \Leftrightarrow \hat{\pi}_{ij} > \frac{1}{2}$$

2) Le premier modèle (étudié par Thompson et Remage dans (13)) :

On admet l'existence d'un classement sous-jacent des objets, tel que, si x_i précède x_j dans ce classement, on a $\pi_{ij} \geq \frac{1}{2}$.

Autrement dit, on admet l'existence d'une relation de préférence sous-jacente qui est un ordre total T sur X (c'est-à-dire, il existe un ordre total $T : T \subseteq R_\pi$).

Ce modèle impose une restriction de l'espace paramétrique puisque π doit vérifier :

$$\forall (i, j, k) : \pi_{ij} > \frac{1}{2} \wedge \pi_{jk} > \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_{ik} \geq \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

Le paramètre π sera estimé par $\tilde{\pi}$ ($\tilde{\pi}$ est en général différent de $\hat{\pi}$), qui correspond au maximum de la vraisemblance sur l'espace paramétrique restreint par la condition ①.

3) Le deuxième modèle : (étudié dans (1)).

Reprenons l'exemple de l'introduction : des produits sont présentés par paires à un consommateur qui doit chaque fois répondre à la question :

“Lequel des deux produits préférez-vous ?”

Les produits présentés ont différentes caractéristiques — par exemple la couleur, la saveur, l'odeur, . . . , — et inconsciemment, la personne interrogée peut utiliser des critères de choix différents d'une comparaison à l'autre.

On admet donc l'existence de plusieurs classements sous-jacents des objets, c'est-à-dire l'existence de plusieurs relations d'ordre total sous-jacentes :

$$\{T_k ; k = 1, \dots, N\} \text{ telles que :}$$

— A chaque k ($1 \leq k \leq N$), est associée une probabilité p_k que le sujet se réfère au critère correspondant à l'ordre T_k ($\sum_{k=1}^N p_k = 1$ et $p_k \neq 0, \forall k=1, \dots, N$).

— A chaque couple d'objets $\{x_i, x_j\}$ est associée une probabilité π_{ij}^k que le sujet préfère x_i à x_j s'il se réfère au critère T_k , avec $\pi_{ij}^k > \frac{1}{2}$ si x_i précède x_j dans T_k .

$$\text{— On a donc } \pi_{ij} = \sum_{k=1}^N p_k \pi_{ij}^k .$$

Remarquons que si x_i précède x_j dans tous les critères (c'est-à-dire si $\pi_{ij}^k > \frac{1}{2}, \forall k = 1, \dots, N$), on a $\pi_{ij} > \frac{1}{2}$.

$$\text{Exemple : } n = 3, \quad N = 2 \quad T_1 : x_1, x_2, x_3 \quad T_2 : x_3, x_1, x_2$$

$$\pi_{ij} = p\pi_{ij}^1 + (1 - p)\pi_{ij}^2$$

$$\text{Supposons : } p = \frac{1}{2}, \pi_{12}^1 = \frac{4}{5}, \pi_{23}^1 = \frac{4}{5}, \pi_{13}^1 = \frac{3}{5}, \pi_{12}^2 = \frac{4}{5}, \pi_{23}^2 = \frac{2}{5}, \pi_{13}^2 = \frac{1}{5} :$$

$$\text{On a alors } \pi_{12} = \frac{4}{5}, \pi_{23} = \frac{3}{5}, \pi_{13} = \frac{2}{5} .$$

On a donc $\pi_{12} > \frac{1}{2}, \pi_{23} > \frac{1}{2}, \pi_{13} < \frac{1}{2}$; nous remarquons donc, sur cet exemple, que la restriction de l'espace paramétrique ①, qui s'imposait dans le premier modèle, n'est plus nécessaire ici. Nous estimerons donc π par $\hat{\pi}$, et

R_π par $R_{\hat{\pi}}$ et nous donnerons une méthode pour estimer les relations d'ordre (estimation qui ne sera pas déduite d'une estimation des paramètres π_{ij}^k).

III – LE PREMIER MODELE

1) Estimation d'une relation d'ordre total

Thompson et Remage dans (13) ont proposé d'estimer π par $\tilde{\pi}$ en maximisant la vraisemblance sur l'espace paramétrique restreint. L'ordre total sous-jacent T sera alors estimé par T^* (non nécessairement unique) vérifiant :

$$\forall (x_i, x_j) \in T^*, \tilde{\pi}_{ij} \geq \frac{1}{2}$$

En fait, ce n'est pas l'estimation du paramètre π qui nous intéresse, mais seulement l'estimation de l'ordre total T . Nous avons donc établi dans (1) une formule définissant directement T^* :

$$\text{Soit : } \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij}) = m_{ij} (1 + \hat{\pi}_{ij} \text{Log } \hat{\pi}_{ij} + \hat{\pi}_{ji} \text{Log } \hat{\pi}_{ji})$$

(Logarithmes de base 2)

$$\Phi(\hat{\pi}, T) = \sum_{(x_i, x_j) \in T \cap R_{\hat{\pi}}} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij}) \quad (*)$$

\mathfrak{C} ensemble des $n!$ ordres totaux sur \mathfrak{C}

L'estimation T^* (non nécessairement unique), de l'ordre total sous-jacent obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance est définie par :

$$\Phi(\hat{\pi}, T^*) = \sup_{T \in \mathfrak{C}} \Phi(\hat{\pi}, T)$$

Nous avons généralisé dans (1) une propriété de T^* que Thompson et Remage avaient déjà démontré dans le cas particulier où $m_{ij} = 1 \forall (i, j)$:

T^* est un ordre hamiltonien du 1-graphe complet $G_{\hat{\pi}} = (X, R_{\hat{\pi}})$.

où un ordre total, correspondant au classement des objets : $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$, est appelé *ordre hamiltonien* de $G_{\hat{\pi}} = (X, R_{\hat{\pi}})$ si $(x_{k_i}, x_{k_{i+1}}) \in R_{\hat{\pi}}$ $i = 1, \dots, n - 1$; c'est-à-dire $\hat{\pi}_{k_i, k_{i+1}} \geq \frac{1}{2} \forall i = 1, \dots, n - 1$.

Pour alléger l'écriture, nous notons :

$$(*) \sum_{(x_i, x_j) \in S} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij}) \text{ au lieu de } \sum_{\{(i, j); (x_i, x_j) \in S\}} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$$

En pratique, pour déterminer T^* , on devra donc :

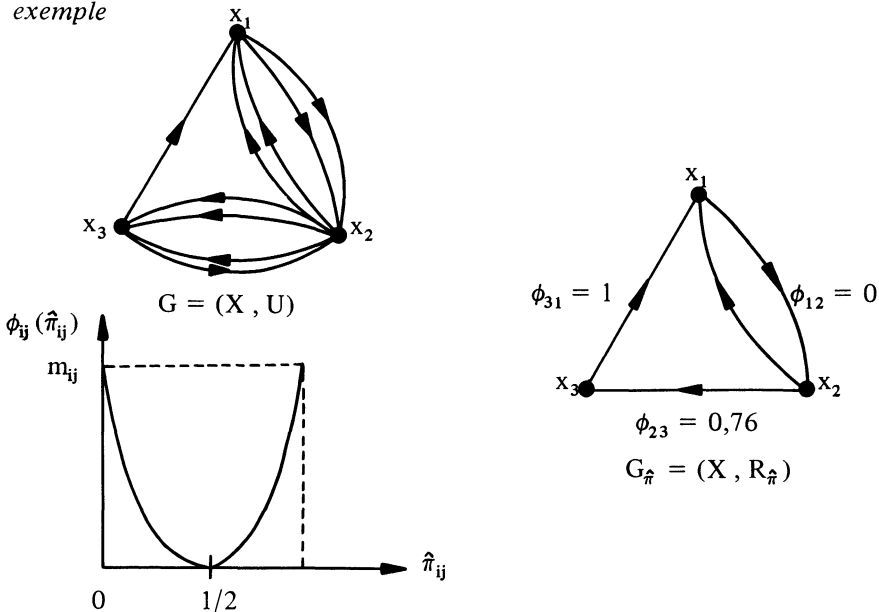
- 1) Déterminer tous les ordres hamiltoniens de $G_{\hat{\pi}}$
- 2) Calculer pour chacun de ces ordres hamiltoniens

$$\Phi(\hat{\pi}, T) = \sum_{(x_i, x_j) \in T \cap R_{\hat{\pi}}} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$$

Si n est grand, ces calculs deviennent vite très longs, il est alors intéressant d'utiliser la méthode de programmation dynamique proposée par De Cani dans (5) pour déterminer T^* dans le cas où m_{ij} a la même valeur pour tout (i, j) .

Remarque : Associons au graphe $G = (X, U)$ de Ω le 1-graphe $G_{\hat{\pi}} = (X, R_{\hat{\pi}})$ dont chaque arc (x_i, x_j) est valué par $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$

exemple



L'application qui associe à G le 1-graphe $G_{\hat{\pi}}$ valué est biunivoque, car la fonction $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$ est monotone sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Les données peuvent donc être représentées par le 1-graphe $G_{\hat{\pi}} = (X, R_{\hat{\pi}})$ valué par les $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$.

La quantité $\Phi(\hat{\pi}, T) = \sum_{(x_i, x_j) \in T \cap R_{\hat{\pi}}} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$ est la somme des valuations des arcs de $G_{\hat{\pi}}$ qui figurent dans l'ordre total T , on peut donc considérer cette quantité comme une mesure de proximité de T au graphe valué $G_{\hat{\pi}}$. T est alors "le plus proche" de $G_{\hat{\pi}}$.

Remarquons de plus que :

$$\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij}) = 0 \Leftrightarrow m_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad \hat{\pi}_{ij} = \frac{1}{2}$$

$\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$ est d'autant plus grand que m_{ij} est grand et que $\hat{\pi}_{ij}$ est très différent de $\frac{1}{2}$.

Nous avons vu dans (1) que la quantité $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$ peut être considérée comme une *quantité d'information* apportée par les m_{ij} comparaisons de la paire $\{x_i, x_j\}$, (et ce résultat apparaît intuitivement cohérent avec la remarque que nous venons de faire sur les variations de $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$). La quantité $\Phi(\hat{\pi}, T)$ est alors une quantité d'information en faveur de l'hypothèse que T est une relation de préférence ($T \subseteq R_\pi$) ; et T^* est un ordre total en faveur duquel l'information est maximum.

2) Cas particulier $m_{ij} = 1$ pour tout (i, j) : Test de Slater (12)

Pour éprouver $H_0 : \pi_{ij} = \frac{1}{2} \forall (i, j)$, nous utiliserons la statistique $\sup_{T \in \mathfrak{G}} \Phi(\pi, T)$ et nous rejeterons H_0 pour les grandes valeurs de cette statistique.

Dans le cas où $m_{ij} = 1 \forall (i, j)$, il est facile de montrer que cette statistique est égale à $\frac{n(n-1)}{2} - D$, où $D = \inf_{T \in \mathfrak{G}} |U - T \cap U|$ est le plus petit nombre d'arcs du graphe observé $G = (X, U)$ à inverser pour obtenir un graphe d'ordre total.

Nous aurons donc une région critique de la forme $D \leq u$, où $P[D \leq u/H_0] \leq \alpha$ (α étant le niveau du test).

Nous retrouverons ainsi le test proposé par Slater dans (12). Slater donne des tables de la distribution de D sous H_0 , c'est-à-dire $P[D = d/H_0]$, pour $2 \leq n \leq 8$ et $0 \leq d \leq 8$.

Pour la détermination de D des algorithmes ont été proposés dans (11), (3) et (10).

IV – LE DEUXIEME MODELE

1) Estimation d'un ensemble de relations d'ordre total

Nous avons vu que, s'il existe N relations d'ordre total sous-jacentes à X , $\{T_k ; k = 1, \dots, N\}$, nous avons nécessairement :

$$(x_i, x_j) \in \bigcap_{k=1}^N T_k \Rightarrow \pi_{ij} > \frac{1}{2}$$

L'intersection d'une famille d'ordres totaux est un ordre partiel, que nous noterons P , d'où $P = \bigcap_{k=1}^N T_k \subseteq R_\pi$

Nous estimerons π par $\hat{\pi}$, et par conséquent R_π par $R_{\hat{\pi}}$.

Nous procéderons en 2 étapes :

a) *estimation de P* : l'estimation P^* de P doit vérifier : $P^* \subseteq \underline{R}_{\hat{\pi}}$.

Nous définirons P^* par :

$$\Phi(\hat{\pi}, P^*) = \sup_{P \subseteq \underline{R}_{\hat{\pi}}} \Phi(\hat{\pi}, P) = \sup_{P \subseteq \underline{R}_{\hat{\pi}}} \sum_{(x_i, x_j) \in P} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$$

C'est-à-dire que nous prendrons pour P^* l'ordre partiel contenu dans $\underline{R}_{\hat{\pi}}$ qui est "le plus proche" du graphe valué $G_{\hat{\pi}}$ (au sens de la remarque précédente). P^* n'est pas nécessairement unique.

b) *Estimation de $\{T_k ; k = 1, \dots, N\}$* : P^* étant déterminé, nous estimerons $\{T_k ; k = 1, \dots, N\}$ par $\{T_k^* ; k = 1, \dots, N^*\}$ vérifiant :

$$(1) : P^* = \bigcap_{k=1}^N T_k^*$$

(2) N^* est la plus petite valeur de N pour laquelle il existe une famille de N ordres totaux dont l'intersection est P^* (N^* est appelé la dimension de P^*).

$$(3) \sum_{k=1}^{N^*} \Phi(\hat{\pi}, T_k^*) = \sum_{k=1}^{N^*} \sum_{(x_i, x_j) \in T_k^* \cap \underline{R}_{\hat{\pi}}} \phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij}) \text{ est maximum.}$$

Nous avons démontré dans (1) que la famille $\{T_k^* ; k = 1, \dots, N^*\}$ ainsi déterminée (non nécessairement unique) est composée d'ordres hamiltoniens de $G_{\hat{\pi}} = (X, R_{\hat{\pi}})$.

En pratique : Les calculs se font en 3 étapes a) b) c) :

a) on utilise les calculs du § précédent :

– Détermination des ordres hamiltoniens de $G_{\hat{\pi}}$.

– Calcul pour chaque ordre hamiltonien T de $\Phi(\hat{\pi}, T)$.

b) L'application de l'algorithme de Heuchenne (8) au graphe $(X, R_{\hat{\pi}})$ dont chaque arc (x_i, x_j) est valué par la quantité strictement positive $\phi_{ij}(\hat{\pi}_{ij})$ permet de déterminer les ordres partiels P^* .

c) Ducamp propose dans (7) une méthode pour déterminer parmi les ordres totaux prolongeant un ordre partiel P donné, les familles de cardinal minimum dont l'intersection est P (c'est-à-dire les familles dont le cardinal est la dimension de P). Nous appliquerons cette méthode à l'ordre partiel P^* et à l'ensemble des ordres hamiltoniens de $G_{\hat{\pi}}$ contenant P^* .

Pour chaque famille $\{T_k ; k = 1, \dots, N^*\}$ ainsi déterminé, nous calculerons

$$\sum_{k=1}^{N^*} \Phi(\hat{\pi}, T_k)$$

Les familles $\{T_k^* ; k = 1, \dots, N^*\}$ sont celles qui rendent maximum cette quantité.

Cas particulier $m_{ij} = 1, \forall (i, j)$: Test de transitivité partielle

Pour éprouver $H_0 : \pi_{ij} = \frac{1}{2} \forall (i, j)$, nous utiliserons la statistique

$\sup_{P \subseteq \underline{R}_{\hat{\pi}}} \Phi(\hat{\pi}, P)$ et nous rejetterons H_0 pour les grandes valeurs de cette statistique.

Lorsque $m_{ij} = 1, \forall (i, j)$, cette statistique est égale à $\sup_{P \subset U} |P| = \frac{n(n-1)}{2} - \Delta$;
 où $\Delta = \inf_{P \subset U} |U - P|$ est le plus petit nombre d'arcs du graphe observé $G = (X, U)$ à supprimer pour obtenir un graphe de relation d'ordre (partiel).
 Nous avons donc une région critique de la forme $\Delta \leq u$ où $P[\Delta \leq u/H_0] \leq \alpha$.
 Nous avons calculé dans (1), $P[\Delta_n \leq \delta/H_0]$ pour $0 \leq \delta \leq 5$, et quelconque ;
 nous avons tabulé ces résultats pour $n \leq 8$ (tableau ci-dessous).

En pratique : Ce test sera utilisé lorsque n objets sont comparés par paires, à raison d'une comparaison et une seule pour chaque paire ($m_{ij} = 1, \forall (i, j)$) ; c'est-à-dire lorsque le résultat de l'expérience est représenté par un graphe orienté $G = (X, U)$ qui a un arc et un seul entre chaque couple de sommets. On utilise l'algorithme de Heuchenne (8) pour déterminer "le plus grand" ordre partiel contenu dans le graphe G ; c'est-à-dire l'ordre partiel P^* (non nécessairement unique) tel que : $P^* \subset U$ et $|P^*| = \sup_{P \subset U} |P|$

On a alors la valeur observé de la statistique $\Delta = \frac{n(n-1)}{2} - |P^*|$. Le tableau ci-dessous permet de calculer la région critique :

Exemple : $n = 7$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{niveau } \alpha = 0,05 : \Delta \leq 4 \\ \text{niveau } \alpha = 0,01 : \Delta \leq 3 \end{array} \right.$

$P[\Delta_n \leq \delta/H_0]$

$\delta \backslash n$	3	4	5	6	7	8
0	0,75	0,375	0,1171	0,0219	0,0024	0,0001
1	0,75	0,375	0,1171	0,0219	0,0024	0,0001
2	1	0,625	0,2343	0,0585	0,0064	0,0004
3	1	1	0,4686	0,1244	0,0160	0,0011
4	1	1	0,8202	0,2587	0,0384	0,0030
5	1	1	0,9374	0,5004	0,1922	0,0078

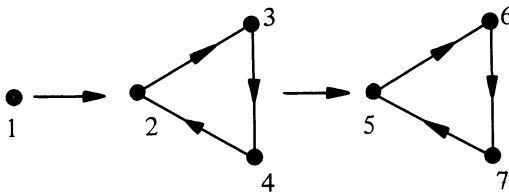
Remarque :

Nous avons vu que, lorsque nous avons estimé un ordre partiel P^* , nous déterminons une famille d'ordre totaux $\{T_k^* ; k = 1, \dots, N^*\}$ vérifiant $P^* = \bigcap_{k=1}^{N^*} T_k^*$, où N^* est minimum et appelé dimension de P^* . Ces ordres totaux T_k^* sont interprétés comme les classements des objets suivant différents critères de choix. Il est donc intéressant de connaître la dimension de P^* , qui sera le nombre de classements des objets, c'est-à-dire le nombre de critères de choix.

Nous avons montré dans (1) que si $\Delta \leq 5$, il existe un ordre P^* de dimension 2. *Donc, dans les limites imposées par nos calculs numériques pour le test, notre méthode conduit à l'estimation d'un couple d'ordres totaux.*

V – EN CONCLUSION, nous essaierons de donner les idées concrètes qui nous ont guidé dans ce travail, et ceci en nous limitant au cas le plus simple où chaque paire est comparée exactement une fois ($m_{ij} = 1, \forall (i, j)$). Dans ce cas, il est d'usage d'utiliser le classement par les scores, $s_i = \sum_{j(\neq i)} a_{ij} (i = 1, \dots, n)$, (méthode qui a le grand avantage de la simplicité), et d'utiliser le test de Kendall et Smith (9) basé sur la statistique E, nombre de circuits de longueur 3 du graphe (ce nombre a l'avantage de se calculer aisément en fonction des scores : $e = \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \sum_{i=1}^n s_i^2$).

Exemple 1 :



Les flèches non tracées vont de gauche à droite.

On choisit le niveau $\alpha = 0,05$ pour les tests.

Le test de Slater n'est pas significatif et on n'admet pas l'existence d'un ordre total sous-jacent.

Par contre le test de Kendall et Smith est significatif, on accepte donc le classement par les scores qui est :

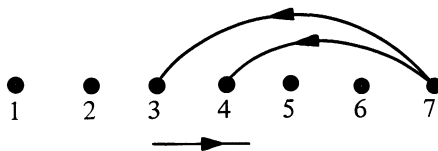
$$(1) \quad (2, 3, 4) \quad (5, 6, 7)$$

Ce résultat apparait logique : un classement sans ex-aequo (c'est-à-dire un ordre total) est inacceptable, par contre un classement avec des ex-aequo est acceptable.

Un classement avec des ex-aequos étant un ordre partiel particulier, nous avons pensé poser le problème sous une forme plus générale : existe-t-il un ordre partiel sur X ? (un ordre partiel ne correspondant pas nécessairement à un classement avec des égalités).

Exemple 2 : $G = (X, U)$

Les flèches non tracées vont de gauche à droite.



Au niveau $\alpha = 0,05$, le test de Slater n'est pas significatif, on n'accepte donc pas l'existence d'un ordre total.

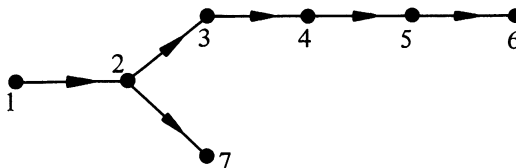
Le test de Kendall et Smith n'est pas significatif non plus et on n'accepte pas le classement par les scores (1) (2) (3) (4, 5, 7) (6).

Test de transitivité partielle :

– L'utilisation de l'algorithme de Heuchenne donne un seul ordre partiel P^* vérifiant :

$$|P^*| = \sup_{P \subset U} |P| = 17, \text{ on a donc } \Delta = \frac{7 \times 6}{2} - 17 = 4$$

(P^* est la fermeture transitive du graphe représenté ci-dessous).



Au niveau $\alpha = 0,05$, la région critique (déterminée à partir de notre tableau est $\Delta \leq 4$, le test est donc significatif.

– Le calcul des ordres hamiltoniens de $G_{\hat{\pi}} = G$ et, pour chacun d'eux de $\Phi(\hat{\pi}, T) = |T \cap U|$, donne 11 ordres hamiltoniens :

	T								$\frac{n(n-1)}{2} - T \cap U $
T_1	1	2	3	4	5	6	7		2
T_2	1	2	7	3	4	5	6		2
T_3	1	2	3	5	7	4	6		3
T_4	1	2	3	5	6	7	4		3
T_5	1	2	5	7	3	4	6		3
T_6	1	2	3	6	7	4	5		4
T_7	1	2	4	5	7	3	6		4
T_8	1	2	4	5	6	7	3		4
T_9	1	2	5	6	7	3	4		4
T_{10}	1	2	6	7	3	4	5		4
T_{11}	1	2	4	6	7	3	5		5

Remarquons que, si le test de Slater avait été significatif, on aurait accepté l'existence de l'un ou l'autre des deux ordres totaux T_1 ou T_2 .

Dans l'ensemble $\{T_1, T_2, \dots, T_{11}\}$ nous cherchons les couples $\{T_i, T_j\}$, vérifiant : $P^* = T_i \cap T_j$: seul le couple $\{T_1, T_2\}$ vérifie $P^* = T_1 \cap T_2$. (Si on avait trouvé plusieurs couples, on aurait choisi ceux qui maximisent $\phi(\hat{\pi}, T_i) + \phi(\hat{\pi}, T_j)$).

Nous en concluons qu'il existe deux classements différents des objets (correspondants à deux critères de choix) : T_1 et T_2 . C'est l'objet 7 qui, en occupant un rang différent dans les deux classements, introduit les circuits du graphe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASTIE, A. (1971) – Sur les problèmes de comparaisons par paires. Thèse de 3^{ème} Cycle. Laboratoire de Statistique. Université Paul SABATIER. TOULOUSE.
- [2] BERGE, C. (1970) – Graphes et Hypergraphes. Dunod.
- [3] BERMOND, J.C. (1972) – Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuit maximaux. Mathématiques et Sciences Humaines, n° 37.
- [4] DAVID, H.A. (1971) – Ranking the players in a round robin tournament. Review of the international statistical institute, 39 : 2, 137-147.
- [5] DE CANI, J. (1969) – Maximum likelihood paired comparison ranking by linear programming. Biometrika, 56 : 3, 537-545.
- [6] DOEHLERT, D.H. (1962) – Estimating rank order by triad reduction. Unpublished thesis. University of Delaware.
- [7] DUCAMP (1966) – Sur la dimension d'un ordre partiel. Journées d'études de la théorie des graphes. Rome.
- [8] HEUCHENNE, C. (1969) – Sous-relations transitives maxima. Bulletin de la société royale des sciences de Liège, 38 : 9, 10 ; 435-449.
- [9] KENDALL M.G. ; SMITH B. (1940) – On the method of paired comparisons. Biometrika, 31, 324-345.
- [10] PHILIPS, J.P.N. (1969) – A further procedure for determining Slater's i and all nearest adjoining orders. Brit. J. Math. Stat. Psychol. 22, 97-101.
- [11] REMAGE R. ; THOMPSON, W.A. (1966). Maximum-likelihood paired comparison rankings. Biometrika, 53, 143-149.
- [12] SLATER, P. (1961) – Inconsistencies in a schedule of paired comparisons. Biometrika, 48, 303-312.
- [13] THOMPSON, W.A. ; REMAGE R. (1964) – Rankings from paired comparisons. Annals of Mathematical Statistics, 35 : 2, 739-747.