

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

B. SORIN

Sur l'approximation gaussienne des queues de distributions binomiales

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 3 (1972), p. 89-96

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_3_89_0

© Société française de statistique, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'APPROXIMATION GAUSSIENNE DES QUEUES DE DISTRIBUTIONS BINOMIALES

B. SORIN

Faculté des Sciences - 37 - TOURS

En statistique ou dans les applications numériques de problèmes de probabilités, il est fréquent d'avoir à calculer les queues de distributions binomiales du type $P(X \geq a)$ où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, a entier donné $0 \leq a \leq n$; nous noterons $B(a ; n, p)$ cette valeur. Le calcul de $P(X \leq a')$ se ramène au précédent puisque :

$$P(X \leq a') = 1 - P(X \geq a' + 1) = 1 - B(a' + 1 ; n, p)$$

Or, on ne possède pas toujours sous la main le tableau des distributions binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ correspondant aux deux paramètres n et p désirés.

Toutefois si n est grand et p non voisin de 0 ou 1*, il est très classique, en vertu du théorème central-limite, d'approcher $P(X \geq a)$ par $P(Y \geq a)$ où Y est une variable aléatoire qui suit la loi de Laplace-Gauss de même moyenne np et de même variance npq ($q = 1 - p$) ou mieux (correction dite de continuité) par : $P\left(Y \geq a - \frac{1}{2}\right)$. Cette approximation conduit à prendre pour évaluation de $B(a ; n, p)$ la valeur

$$\Phi\left(\frac{(np - a + \frac{1}{2})}{\sqrt{npq}}\right)$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi de Laplace-Gauss réduite, tabulée dans nombre de manuels.

Notre but est ici d'étudier :

- le comportement de l'erreur exacte commise :

$$\Delta(a ; n, p) = \Phi\left(\frac{(np - a + \frac{1}{2})}{\sqrt{npq}}\right) - B(a ; n, p)$$

en fonction de a pour des paramètres n et p donnés,

- l'évolution avec n et p du maximum sur a de la valeur absolue de l'erreur commise :

$$\delta(n, p) = \max_{0 \leq a \leq n} |\Delta(a ; n, p)|$$

* Auquel cas on utiliserait l'approximation poissonnienne ; on se reportera alors pour l'étude de l'erreur commise au travail de MM. Morice et Thionet [1].

Pour diverses études théoriques conduisant à des majorations de l'erreur, on pourra se reporter à [2], [3], [4].

I - EVOLUTION AVEC a de $\Delta(a; n, p)$

I-1 Symétrie : $\Delta(a; n, p) = -\Delta(n+1-a, n, q)$

Soit $\frac{1}{2} < p \leq 1$; on a :

$$\begin{aligned}\Delta(a; n, p) &= \Phi\left(\left(np - a + \frac{1}{2}\right) / \sqrt{npq}\right) - B(a; n, p) = 1 - \Phi\left(\left(-np + a - \frac{1}{2}\right) / \sqrt{npq}\right) = \\ &= -1 + B(n+1-a; n, q) = E(n+1-a; n, q) - \Phi\left(\left(nq - (n+1-a) + \frac{1}{2}\right) / \sqrt{npq}\right) = \\ &= -\Delta(n+1-a; n, q).\end{aligned}$$

Ainsi, pour des valeurs p complémentaires, les graphes de :

$$a \longrightarrow \Delta$$

sont symétriques par rapport au point $I\left(\frac{n+1}{2}, 0\right)$; on n'envisagera donc les $\Delta(a; n, p)$ que pour des paramètres p compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

I-2 Nature de l'erreur commise

Pour des valeurs de n et p fixées, quelconques (dans le cadre sus-précisé de l'approximation gaussienne) nous donnons, en figure 1, l'allure générale des graphes de :

$$1^\circ a \longrightarrow P(X \geq a) \quad a \text{ entier}$$

c'est-à-dire des probabilités exactes ; les valeurs $P(X \geq a)$ étant, par définition, rigoureusement égales à 1 lorsque $a < 0$ et rigoureusement nulles lorsque $a > n$

$$2^\circ a \longrightarrow \Phi\left(\left(np - a + \frac{1}{2}\right) / \sqrt{npq}\right)$$

c'est-à-dire des approximations gaussiennes des probabilités ci-dessus. Les chevauchements des deux graphes délimitent 4 zones, respectivement :

(1) et (3) de sous-estimation ($\Delta < 0$)

(2) et (4) de sur-estimation ($\Delta > 0$).

Les graphes $a \longrightarrow \Delta$ vont donc présenter 4 oscillations ; à chaque zone correspondra un extremum relatif.

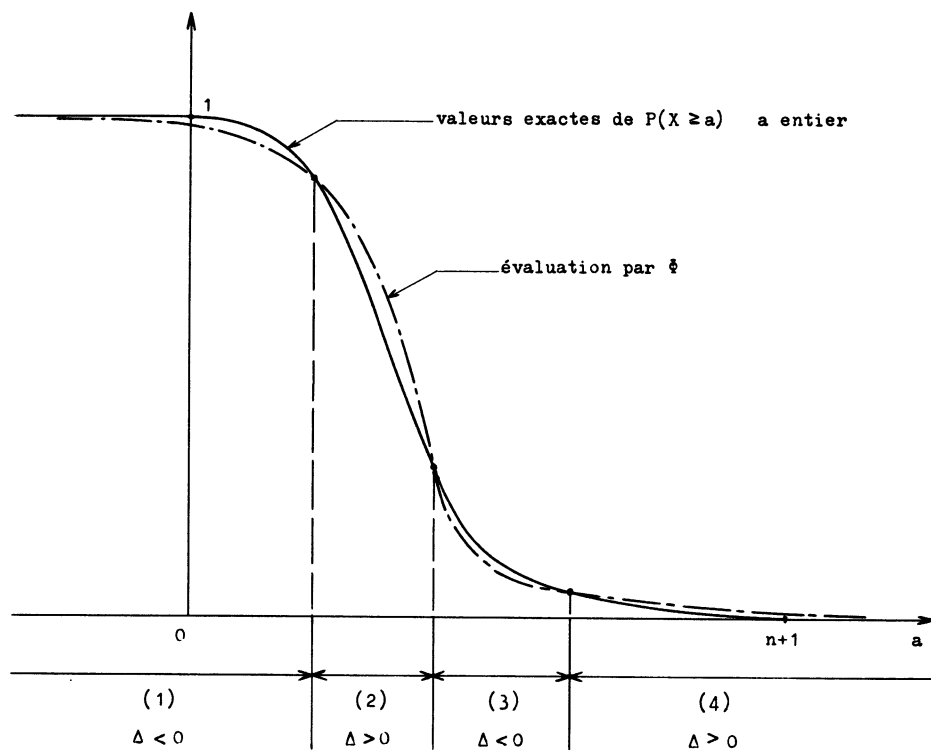


Figure 1 - Nature de l'erreur Δ commise en fonction de a .

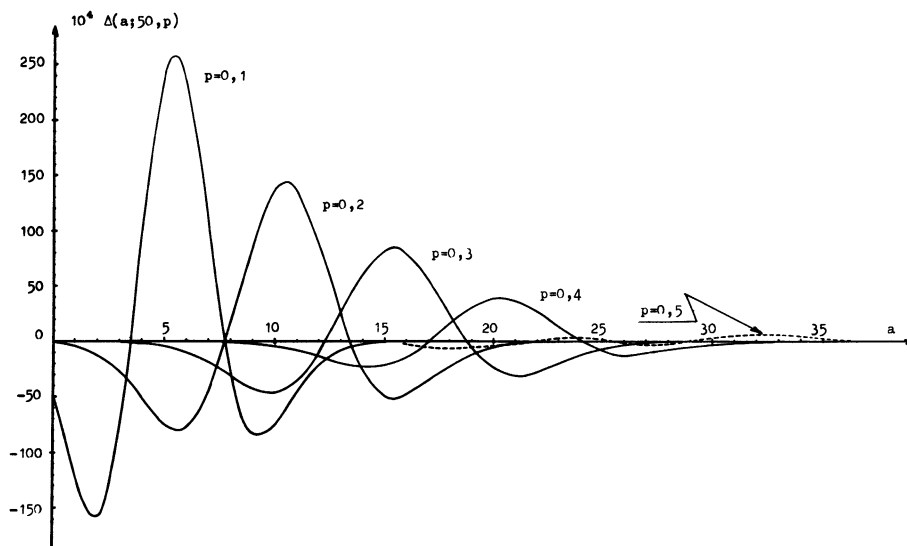


Figure 2 - Erreurs $\Delta(a; 50, p)$ commises par l'approximation.

I-3 Graphes de $\Delta(a; n, p)$, $p < \frac{1}{2}$.

En figure 2, pour $n = 50$ et $p = 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5$ et à partir des tabulations exactes (à 10^{-5}) des lois binomiales (cf. [5]) et de la fonction Φ (cf. [6]), nous avons construit les graphes de $a \rightarrow \Delta(a; 50, p)$.

On peut en tirer les remarques suivantes :

A chaque zone correspond un maximum de $|\Delta|$ et, vers la moyenne np , dans la zone (2) [resp. (3)], quand $0 < p < \frac{1}{2}$ [resp. $\frac{1}{2} < p < 1$] a lieu le maximum absolu. Seules exceptions, pour des valeurs de p très voisines de $\frac{1}{2}$ (en fait, quand $n = 50$, pour $|\frac{1}{2} - p| < 0,02$) où il a alors lieu en (1) [resp. (4)]. Hormis ces mêmes situations, dans la zone (4) [resp. (1)] les valeurs exactes et approchées sont négligeables à la précision utilisée ; il s'ensuit que Δ est pratiquement nulle (oscillation invisible).

Pour le cas limite $p = \frac{1}{2}$, le graphe de $a \rightarrow \Delta(a; n, \frac{1}{2})$ présente des variations de très faibles amplitudes (approximation excellente) ; il est, en vertu de I-1, symétrique par rapport à $I(\frac{n+1}{2}, 0)$; il possède alors deux (faibles) extremums, respectivement en (1) et (4), de valeurs opposées.

Ces remarques sont générales, c'est-à-dire que, pour $0 < p < \frac{1}{2}$, un maximum absolu de $a \rightarrow \Delta(a; n, p)$ se présente au voisinage de la valeur moyenne np , excepté pour des valeurs de p très proches de $\frac{1}{2}$ (auquel cas l'approximation gaussienne est excellente) ; l'approximation, relativement au critère $\text{Max}_a |\Delta(a; n, p)|$, est d'autant meilleure que n est grand et p voisin de $\frac{1}{2}$; elle se dégrade franchement lorsque p prend des valeurs très petites ou très proches de 1 (cf. note ci-dessus). Nous allons préciser quantitativement ceci au II.

II - EVOLUTION DE $\delta(n, p)$

II-1 Décroissance de $\delta(n, p)$ à n donné et p variant de 0 à $\frac{1}{2}$

Posons :

$$\delta(n, p) = \text{Max}_{0 \leq a \leq n} |\Delta(a; n, p)|$$

D'après I-1, on a :

$$\delta(n, p) = \delta(n, 1 - p).$$

$\delta(n, p)$ est une fonction décroissante de p pour $0 < p \leq \frac{1}{2}$ (croissante, symétriquement par rapport à $p = \frac{1}{2}$, pour $\frac{1}{2} \leq p < 1$) ; pour $n = 50$, nous avons, en figure 3, tracé son graphe dans un repère semi-logarithmique.

II-2 Décroissance de $\delta(n, p)$ à p donné pour n croissant

$\delta(n, p)$ est une fonction décroissante de n ; pour différentes valeurs de $p : 0,1 (0,1) 0,9$ -puisque $\delta(n, p) = \delta(n, 1 - p)$ - et $10 \leq n < 1000$, nous en avons tracé les graphes sur l'abaque figure 4.

Exemple d'utilisation de l'abaque 4

Soit $p, 0 < p < 1$ et $\alpha, 0 < \alpha < 1$. A partir de quelle valeur N peut-on affirmer que l'erreur commise par évaluation gaussienne d'une queue de distribution binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \geq N$, est inférieure à α ?

Numériquement :

$\alpha = 0,015 ; 0,010 ; 0,005$ et $p = 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,9$

Réponses :

Les valeurs de N sont sensiblement les suivantes :

$\alpha \backslash p$	0,5	0,6 0,4	0,7 0,3	0,8 0,2	0,9 0,1
0,015	< 10	< 10	16	45	140
0,010	< 10	< 10	33	100	320
0,005	< 10	30	140	400	1 300

Valeurs N telles que $\delta(n, p) < \alpha$ pour $n \geq N$.

II-3 Valeurs N telles que $\delta\left(n, \frac{1}{m}\right) < \alpha$ pour $n \geq N$

Il est assez fréquent d'utiliser les distributions binomiales du type $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{m}\right)$ m entier modéré. Aussi avons-nous déterminé indépendamment de la figure 4 pour $m = 2 ; 3 ; 4 ; 5$ et $\alpha = 0,015 ; 0,010 ; 0,005$ les valeurs N telles que $\delta\left(n, \frac{1}{m}\right) < \alpha$ pour $n \geq N$.

$\alpha \backslash m$	2	3	4	5
0,015	3	10	28	45
0,010	4	24	$\simeq 60$	$\simeq 100$
0,005	6	$\simeq 88$	$\simeq 240$	$\simeq 400$

Valeurs N telles que $\delta\left(n, \frac{1}{m}\right) < \alpha$ pour $n \geq N$.

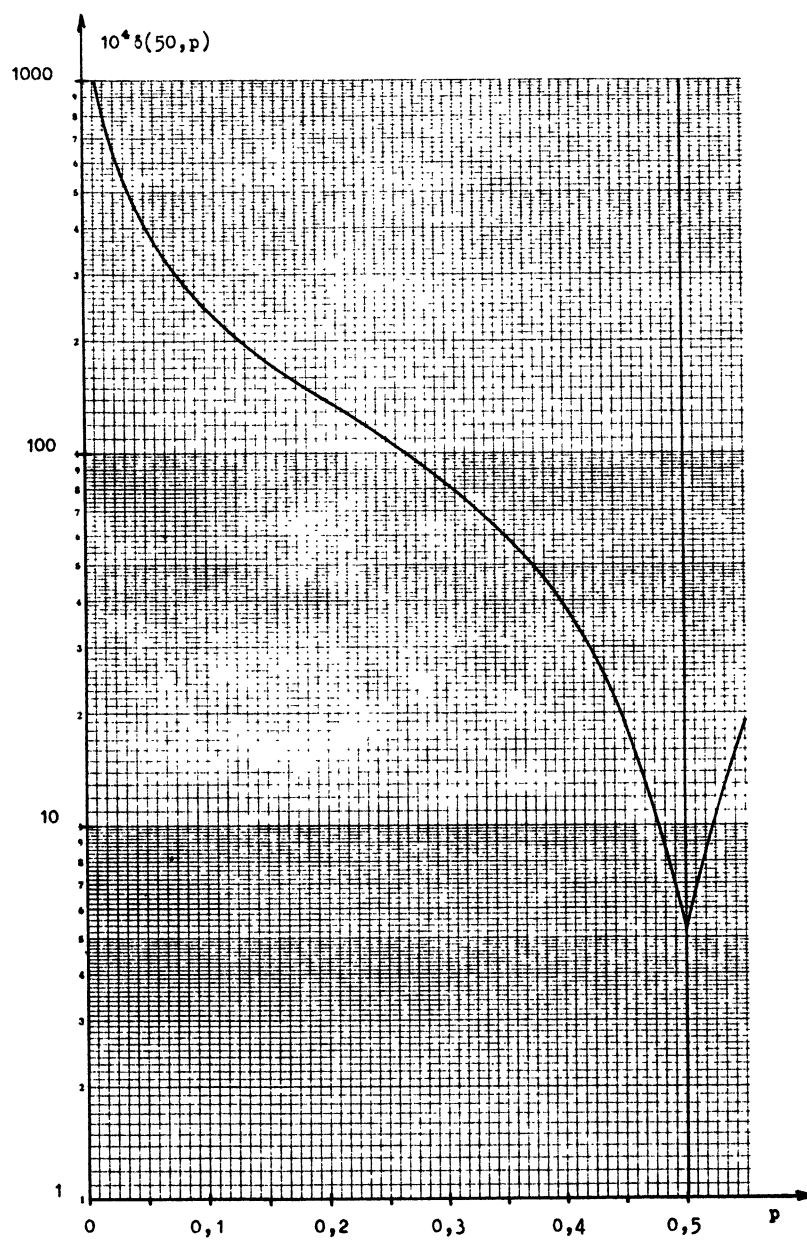


Figure 3 - Evolution de l'erreur maximum commise $\delta(50, p)$ en fonction de p .

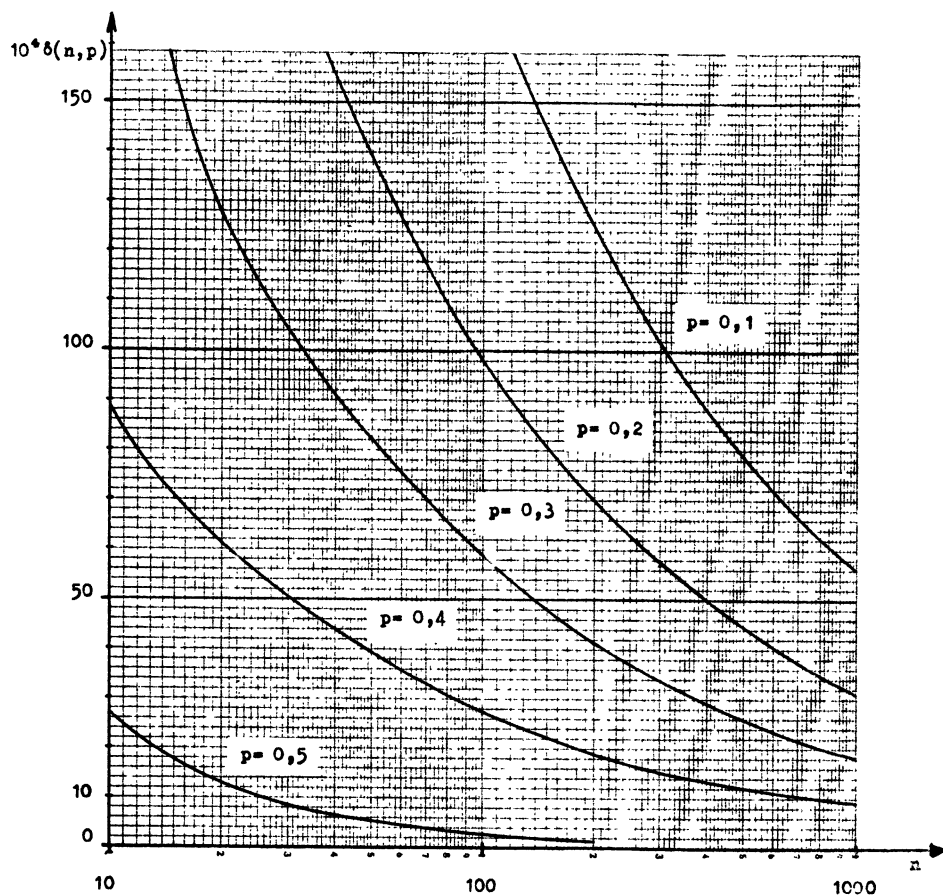


Figure 4 - Evolution de l'erreur maximum commise selon n pour diverses valeurs de p .

RESUME

Nous précisons ici la nature de l'erreur commise dans l'approximation gaussienne des queues de distributions binomiales $\mathcal{B}(n, p)$. Nous avons construit l'abaque qui, pour différentes valeurs de p , donne la décroissance de l'erreur maximum commise $\delta(n, p)$ en fonction de n .

REFERENCES

- [1] MORICE E. et THIONET - Loi Binomiale et loi de Poisson , Rev. Stat. Appl. , 1969, Vol. XVII, n° 3, p. 75-89.
- [2] USPENSKY J.V. - Introduction to Mathematical Probability ; Mc Graw-Hill, 1937, p. 129.
- [3] FELLER W. - On the Normal Approximation to the Binomial Distribution ; Ann. Math. Stat. , 1945, Vol. 16, p. 319-329.
- [4] SMITH E.S. - Binomial, Normal and Poisson Probabilities ; Ed. S. Smith, Bel Air, Maryland, 1953.
- [5] XXXX - Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution ; Harvard University Press, 1955.
- [6] BOLL M. - Tables Numériques Universelles ; Dunod, 1957.