

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. MORICE

P. THIONET

Loi binomiale et loi de Poisson

Revue de statistique appliquée, tome 17, n° 3 (1969), p. 75-89

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_3_75_0

© Société française de statistique, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOI BINOMIALE ET LOI DE POISSON

E. MORICE et P. THIONET

On sait que pour n tendant vers l'infini et p tendant vers zéro de telle sorte que le produit np ait une limite finie m , la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$:

$$\begin{aligned} b_k(n, p) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \longrightarrow p_k(m) = e^{-m} \frac{m^k}{k!} & n \longrightarrow \infty \\ & & p \longrightarrow 0 \\ \mathcal{B}_k(n, p) &= \sum_{x=0}^k C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow \mathcal{P}_k(m) = \sum_{x=0}^k e^{-m} \frac{m^x}{x!} & np = m \end{aligned}$$

Mais lorsqu'il s'agit de déduire de cette convergence une règle d'approximation considérée comme suffisamment valable et pratiquement utilisable, on trouve des indications diverses.

Ce problème d'approximation a des aspects variés selon qu'on s'intéresse aux probabilités individuelles ou aux probabilités cumulées, aux erreurs absolues ou aux erreurs relatives.

Quel que soit le problème envisagé, son étude analytique est difficile, la différence $b_k - p_k$ (ou $\mathcal{B}_k - \mathcal{P}_k$) dépendant de manière difficile à expliciter des trois paramètres p , n , et k dont deux sont des variables discrètes.

Sur le plan théorique de nombreuses tentatives ont été faites pour remplacer l'approximation par la loi de Poisson de paramètre $m = np$, par une loi corrigée à l'aide d'un terme additif ou d'un facteur multiplicatif.

Citons par exemple :

1/ USPENSKY [1]

$$b_k(n, p) \sim \beta e^{-np} \frac{(np)^x}{x!} \quad (1)$$

$$\mathcal{B}_k(n, p) \sim \sum_{x=0}^k e^{-np} \frac{(np)^x}{x!} + \Delta \quad (2)$$

β et Δ dépendent de k , n et p par des formules assez compliquées, donnant pour chacun deux valeurs permettant d'encadrer b_k ou $\mathcal{B}_k$.

2/ W. MOLENAAR [2]

$$\mathcal{B}_k(n, p) \sim \mathcal{Q}_k(\lambda n, p) \quad (3)$$

λ étant une fonction de n , p et k dont diverses expressions sont proposées.

Quel que soit leur intérêt théorique ces approximations sont pratiquement sans intérêt.

3/ RAFF [3]

$$\mathcal{B}_k(n, p) \sim \mathcal{Q}_k(np) + \frac{1}{2} p(k - np) p_k(np) = \mathcal{Q}'_k(np) \quad (4)$$

Cette approximation, qui exige l'emploi simultané des tables de $\mathcal{Q}_k$ et p_k donne, sans calculs compliqués, d'excellents résultats, ainsi que le montrent les exemples suivants.

Pour $0,01 < p < 0,10$ et $n < 100$, les erreurs d'approximation, croissantes avec p , restent inférieures à 0,001, pour $p = 0,20$, elles sont encore inférieures à 0,005.

A l'aide des tables très détaillées de la Général Electric C° [4], le calcul de $\mathcal{Q}'_k$ pourra, sans difficulté être fait avec une très bonne approximation pour des valeurs de p qui ne figurent pas dans les tables usuelles de la distribution binomiale, Romig [5] et N.B.S. [6], dans lesquelles p varie par intervalles de 0,01.

Exemple

$$n = 50 \quad p = 0,015 \quad np = 0,75$$

$$\mathcal{B}_0(50 ; 0,015) = 0,4724 - 0,0075 \times 0,75 \times 0,4724 = 0,4697$$

alors qu'une interpolation linéaire dans la table de Romig donne 0,4846, la valeur exacte étant 0,4699.

Approximation par la loi de Poisson

Regardons maintenant ce qui se passe si on veut utiliser la simple approximation de la loi binomiale (n, p) par la loi de Poisson $(m = np)$.

Voici quelques exemples des règles ou plutôt des indications données - le plus souvent sans précisions sur la nature ou la grandeur de l'approximation envisagée - par divers auteurs :

DIXON and MASSEY [7]

$$n \text{ grand et } np < 5^* \quad (I)$$

FRASER [8]

$$n > 20 \quad np < 5^* \quad (II)$$

 (*) Pour les valeurs de np supérieures à cette limite, emploi de l'approximation normale avec correction de continuité.

SCHAAFSMA et WILLEMZE [9]

Les indications données à l'aide d'un graphique correspondent sensiblement aux conditions

$$p < 0,08 \quad n > 1,9 (p \%) \quad np < 10^* \quad (\text{III})$$

KENNEY and KEEPING [10]

$$p < 0,05 \quad n < 200 \quad (\text{IV})$$

HALD [11]

$$p < 0,10 \quad np(1-p) < 9 \quad (\text{V})$$

CALOT [12] - Centre de Formation Statistique [13]

$$p < 0,10 \quad n > 50 \quad (np < 18)^* \quad (\text{VI})$$

Le graphique n° 1 donne une idée de l'ensemble de ces indications dont aucune n'a évidemment la prétention d'être une règle formelle.

Pour tenter de préciser la solution du problème, il faut - à défaut d'une règle systématiquement valable pour toutes valeurs de p , n et k - choisir un critère d'approximation correspondant à l'aspect pratique le plus fréquent du problème, dans lequel il s'agit en général du calcul d'une queue de la distribution binomiale.

Ceci conduit à choisir comme critère :

$$\Delta_k = \mathcal{B}_k(n, p) - \mathcal{F}_k(np)$$

où, pour tenir compte du fait que cette différence peut être positive ou négative, à envisager séparément les deux critères (graphique n° 2).

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \mathcal{F}_k - \mathcal{B}_k && \text{pour } \mathcal{F}_k > \mathcal{B}_k \\ \Delta_k &= \mathcal{B}_k - \mathcal{F}_k && \text{pour } \mathcal{B}_k > \mathcal{F}_k \end{aligned}$$

Pour n et p fixés, ces valeurs dépendent de k , on retiendra finalement comme critères leurs valeurs maximales qui sont données dans le tableau n° 1 ci-après.

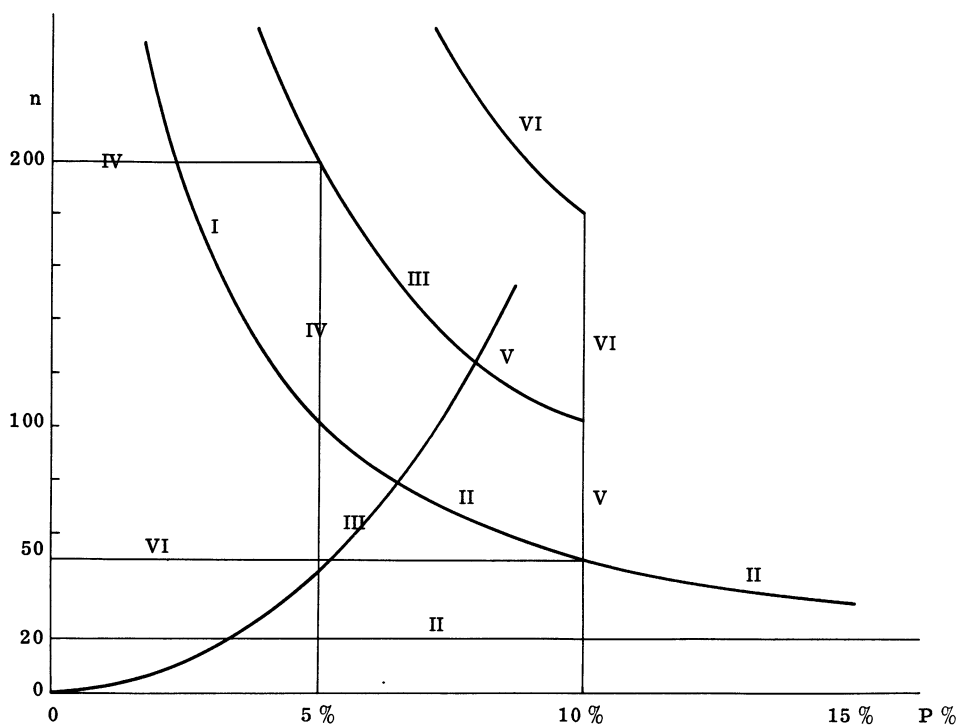
Pour chaque valeur de p , la première ligne correspond à $\mathcal{F} > \mathcal{B}$, $k < np$ et la seconde ligne à $\mathcal{B} > \mathcal{F}$, $k > np$. La valeur de k correspondant au maximum de Δ est indiquée entre parenthèses.

La somme des deux valeurs de Δ pour n et p fixés, donne la valeur maximale de :

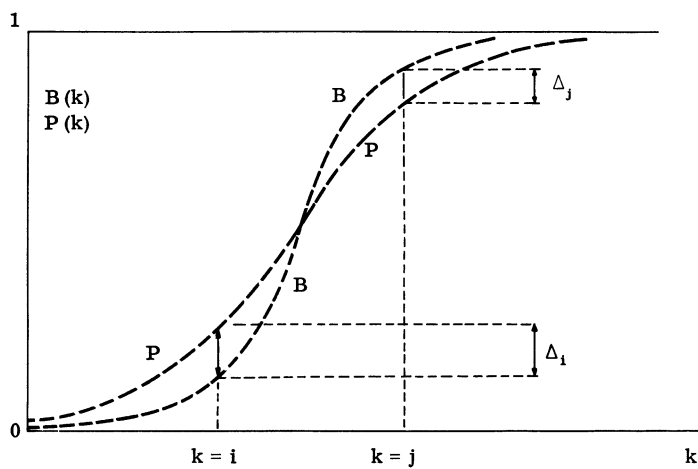
$$\Delta_{1j} = \sum_{x=1}^j C_n^x p^x (1-p)^{n-x} - \sum_{x=1}^j e^{-np} \frac{(np)^x}{x!}$$

c'est-à-dire l'erreur maximale commise en utilisant l'approximation de Poisson pour calculer une probabilité cumulée pour $i \leq x \leq j$.

(*) Pour les valeurs de np supérieures à cette limite, emploi de l'approximation normale avec correction de continuité.



Graphique 1



Graphique 2 - Courbes passant par les points $B(k)$ et $P(k)$.

Tableau n° 1

Valeurs maximales de $|\Delta_k| = |\mathcal{B}_k(n, p) - \mathcal{P}_k(np)|$ en fonction de n et p (en 10^{-4})

$\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}$	5	10	20	30	50	100	$n \rightarrow \infty$ (Δ_{ij})
0,01	2 (0) 8 (1)	4 (0) 4 (1)	8 (0) 6 (1)	11 (0) 8 (1)	15 (0) 9 (1)	19 (0) 9 (2)	24
0,02	9 (0) 9 (1)	16 (0) 13 (1)	17 (0) 17 (1)	34 (0) 14 (2)	37 (0) 19 (2)	27 (1) 20 (3)	48
0,03	20 (0) 17 (1)	34 (0) 24 (1)	50 (0) 21 (2)	56 (0) 28 (2)	50 (0) 29 (3)	45 (1) 31 (5)	70
0,04	34 (0) 27 (1)	55 (0) 34 (1)	73 (0) 35 (2)	73 (0) 36 (2)	55 (1) 38 (3)	60 (2) 43 (6)	100
0,05	50 (0) 39 (1)	73 (0) 41 (1)	94 (0) 48 (2)	85 (0) 49 (3)	79 (1) 52 (4)	72 (3) 54 (7)	124
0,06	69 (0) 50 (1)	102 (0) 43 (2)	110 (0) 55 (2)	90 (0) 61 (3)	91 (1) 63 (5)	83 (4) 65 (8)	148
0,07	90 (0) 62 (1)	126 (0) 58 (2)	124 (0) 66 (3)	102 (1) 68 (4)	100 (2) 74 (6)	93 (5) 77 (10)	172
0,08	112 (0) 82 (1)	149 (0) 73 (2)	132 (0) 82 (3)	126 (1) 85 (4)	121 (2) 88 (6)	102 (6) 91 (11)	202
0,09	146 (0) 81 (1)	172 (0) 89 (2)	137 (0) 94 (3)	144 (0) 94 (4)	131 (2) 102 (7)	120 (6) 104 (12)	224
0,10	160 (0) 87 (1)	192 (0) 101 (2)	143 (1) 99 (3)	154 (1) 107 (5)	147 (3) 113 (7)	141 (7) 116 (13)	254

La dernière colonne donne, pour n infini, la valeur limite de Δ_{ij} (dans ce cas les deux valeurs limites Δ_i et Δ_j sont égales) (cf. Annexe).

De ce tableau, ou des graphiques n° 3 et 3 bis qui lui correspondent, on déduit :

1/ Que, pour n fixé, $\max \Delta_k$, croît avec p , plus rapidement pour la queue de distribution correspondant aux valeurs $k < np$, que pour celles correspondant à $k > np$,

2/ Que pour p fixé, Δ_k varie avec n de manière irrégulière, mais que si l'on se contente d'une approximation à moins de $\pm 0,005$ sur Δ_k on peut considérer que pour p fixé, Δ_k ne dépend pas de n ,

3/ Que si l'on veut calculer une queue de la distribution binomiale avec une erreur inférieure à 0,01, il suffit pour $p < 0,08$ d'utiliser la distribution de Poisson quel que soit n .

(Pour $0,08 < p < 0,10$ cette erreur maximale reste comprise entre 0,01 et 0,02).

4/ Si l'on s'intéresse, non à une queue de la distribution, mais à un intervalle quelconque $\mathcal{B}_{ij}(n, p) = \sum_{x=i}^j C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, la valeur maximale de

$$\Delta_{ij} = \mathcal{B}_{ij}(n, p) - \mathcal{Q}_{ij}(np)$$

pour n et p fixés est donnée par la somme des deux valeurs de x de la case (n, p) du tableau pour les valeurs $k = i$ et $k = j$ qui sont associées aux valeurs de Δ_k .

Remarque

En ce qui concerne l'approximation normale de la loi binomiale, Raff [3] a montré en la définissant comme ci-dessus (n° 4) qu'elle était meilleure que l'approximation de Poisson pour l'ensemble des points (n, p) situés au-dessus de la courbe approximative définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} n & \left\{ \begin{array}{cccc} 10 & 20 & 100 & 300 & \longrightarrow \\ p & \left\{ \begin{array}{cccc} 0,25 & 0,15 & 0,10 & 0,08 & 0,07 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Mood [15], dit que pour $np > 25$, l'erreur maximale de l'approximation normale est :

$$\Delta_{ij} < \frac{0,15}{\sqrt{pqn}}$$

ANNEXE

I - Pour n augmentant indéfiniment les deux fonctions de répartition

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{x=0}^x C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{x=0}^x e^{-np} \frac{(np)^x}{x!}$$

tendent vers celles de lois normales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Q}$ de même moyenne np , mais de variances respectives

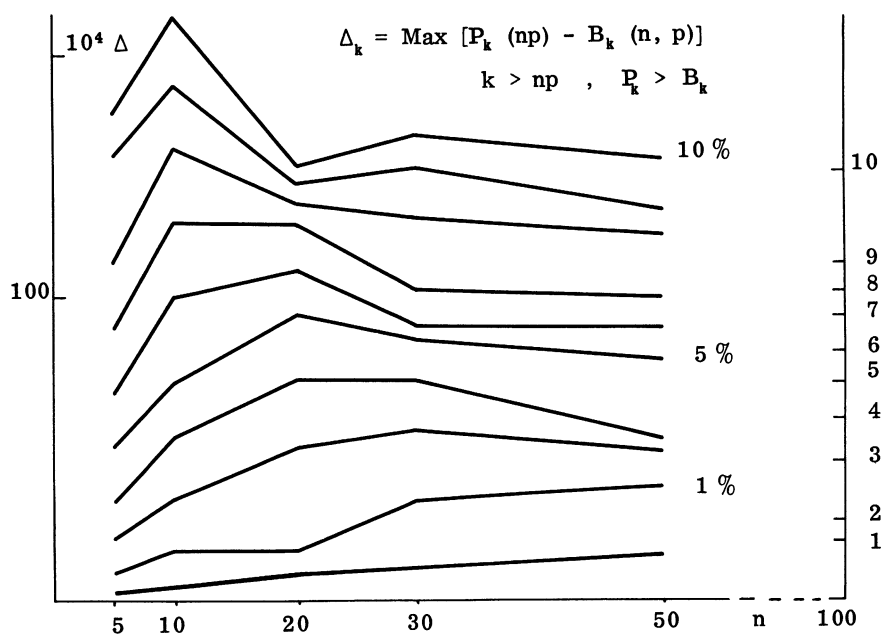
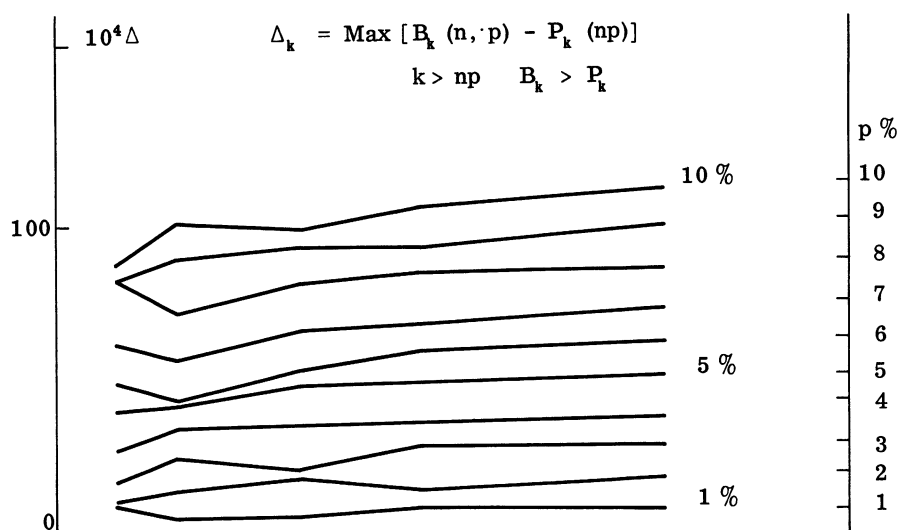
$$\sigma_{\mathcal{B}}^2 = np(1-p) \quad \sigma_{\mathcal{Q}}^2 = np$$

Le maximum de

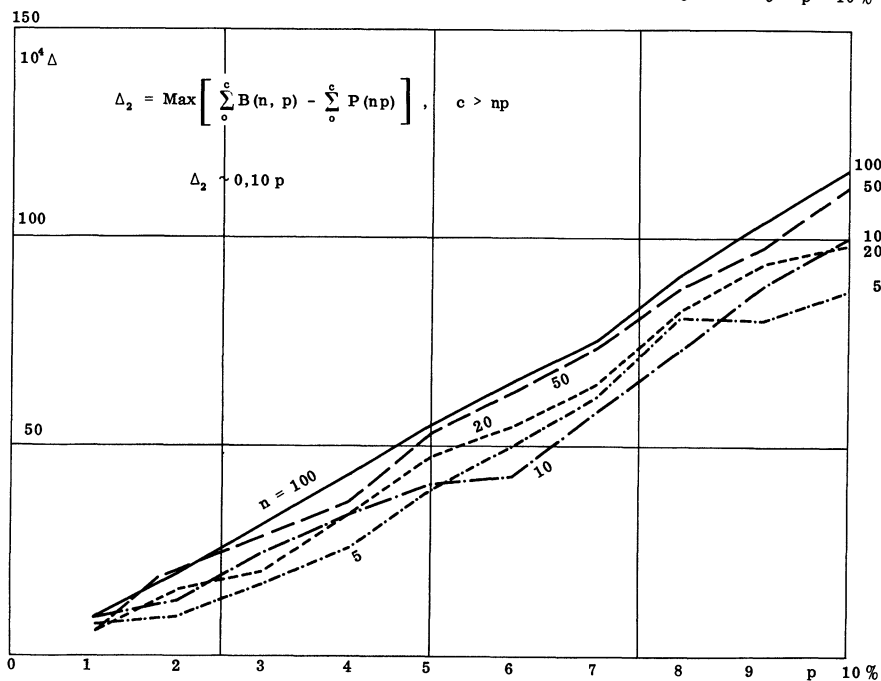
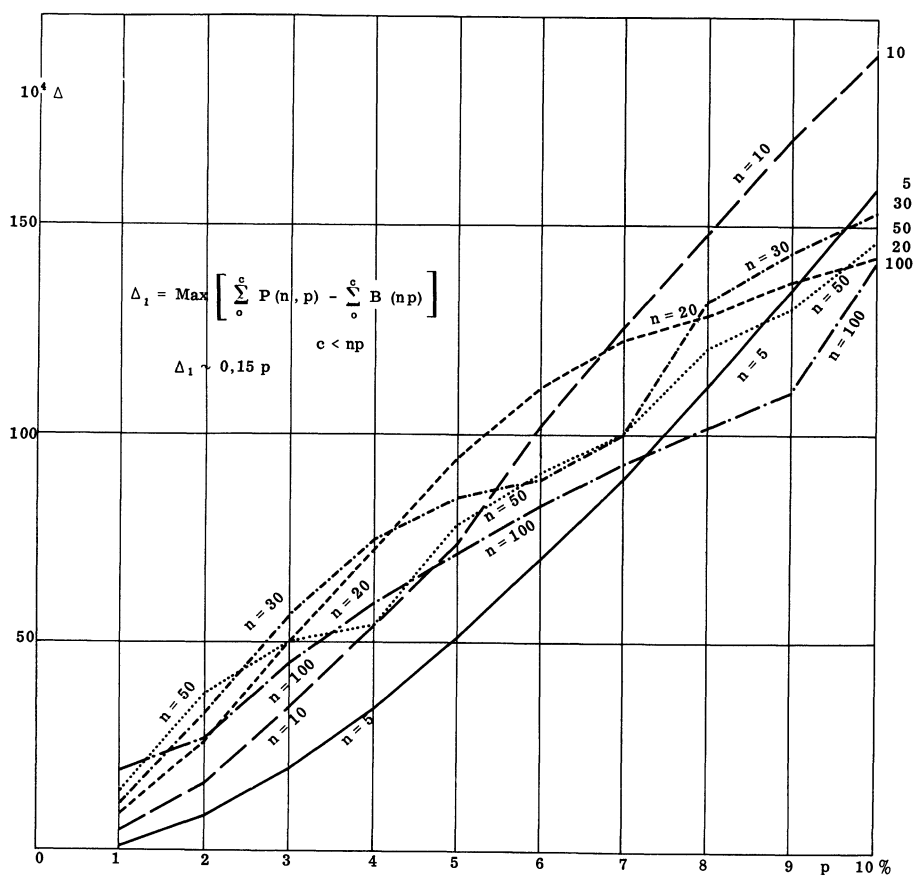
$$\Delta(x) = |\mathcal{B}(x) - \mathcal{Q}(x)|$$

est atteint pour

$$\frac{d \Delta(x)}{dx} = b(x) - p(x) = 0$$



Graphique 3



Graphique 3 bis

soit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{np}} = e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-np)^2}{np}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{nqp}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-np)^2}{nqp}}$$

$$x - np = \pm \sqrt{nq \log \frac{1}{q}} \quad (1)$$

soit pour les variables réduites correspondant respectivement aux deux distributions normales réduites :

$$u_{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{1}{p} \log \frac{1}{q}} \quad u_{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{q}{p} \log \frac{1}{q}}$$

d'où

$$\text{Max } |\Delta(x)| = |F\left(\sqrt{\frac{1}{p} \log \frac{1}{q}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{q}{p} \log \frac{1}{q}}\right)| \quad (2)$$

F étant la fonction de répartition de la loi normale.

Les deux solutions en x étant symétriques par rapport à x = np, la valeur maximale, pour n augmentant indéfiniment, de

$$\Delta_{ij} = \sum_{x=1}^j b(x) - \sum_{x=1}^j p(x)$$

pour i < np < j est égale à

$$\text{Max } \Delta_{ij} = 2 \left[F\left(\sqrt{\frac{1}{p} \log \frac{1}{q}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{q}{p} \log \frac{1}{q}}\right) \right]$$

Remarque

Pour p < 0,10, valeurs pour lesquelles l'approximation binomiale peut être pratiquement envisagée, des développements en série limitée permettent de calculer simplement les valeurs limites de u_ℳ et u_ℳ lorsque n augmente indéfiniment.

$$u_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1-p}{p} \log \frac{1}{1-p} = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{6} \dots\dots \# 1 - \frac{p}{2}$$

$$u_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{1-p} \quad u_{\mathcal{A}}^2 = 1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{3} + \dots\dots \# 1 + \frac{p}{2}$$

d'où

$$u_{\mathcal{A}} = 1 - \frac{p}{4} \quad u_{\mathcal{A}} \# 1 + \frac{p}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \Delta(x) &= F\left(1 + \frac{p}{4}\right) - \left(F\left(1 - \frac{p}{4}\right)\right) \\ &= F(1) + \frac{p}{4} F'(1) \dots\dots - \left[F(1) - \frac{p}{4} F'(1) \dots\dots\right] \\ &\# \frac{p}{4} F'(1) = 0,242 \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Pour $p = 0,10$ ceci donne $0,0121$, alors que le calcul direct, d'après (2), donne $0,0127$, soit $\Delta_{1j} = 0,0254$.

On a aussi, pour les valeurs correspondantes de x :

$$x = np \pm \sqrt{nq \log \frac{1}{q}} = np \pm \sqrt{np \left(1 - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{6} \dots \right)}$$

soit

$$x \neq np \pm \sqrt{np}$$

pour n augmentant indéfiniment, $m = np$ restant fini (p tendant vers zéro).

II - Pour n fini, et pour $\mathcal{B}_k > \mathcal{Q}_k$, la valeur modale de $\Delta_k = \mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k > 0$, aura lieu pour une valeur $k = j$ telle que l'on ait simultanément

$$\mathcal{B}_j - \mathcal{Q}_j > \mathcal{B}_{j-1} - \mathcal{Q}_{j-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_j - \mathcal{Q}_j > \mathcal{B}_{j+1} - \mathcal{Q}_{j+1}$$

Soit

$$\mathcal{B}_j - \mathcal{B}_{j-1} > \mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_{j-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{j+1} - \mathcal{Q}_j > \mathcal{B}_{j+1} - \mathcal{B}_j$$

$$b_j > p_j \quad \text{et} \quad p_{j+1} > b_{j+1} \quad (3)$$

De même, pour $\mathcal{B}_k < \mathcal{Q}_k$, on obtiendra les conditions

$$b_i < p_i \quad \text{et} \quad p_{i+1} < b_{i+1} \quad (4)$$

La valeur maximale de $\Delta_k = |\mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k|$ se produit donc pour des valeurs $k = i$ ou $k = j$ telles que $b_k - p_k$ change de signe lorsque k passe de $k = i$ (ou $k = j$) à $k = i + 1$ (ou $k = j + 1$), c'est-à-dire lorsque le rapport b_k/p_k traverse la valeur 1.

Or on a :

$$\frac{b_k}{p_k} = \frac{e^{np}}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} = u_k e^{np},$$

si l'on pose

$$u_k = \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \quad (5)$$

On voit que

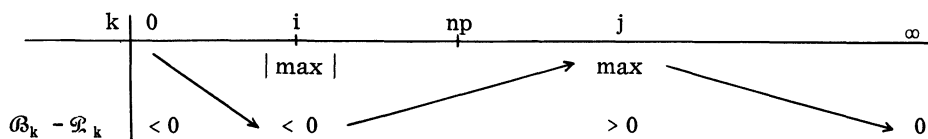
$$u_{k+1} > u_k \quad \text{si } k < np$$

$$u_{k+1} < u_k \quad \text{si } k > np$$

(si $k = l = np$, entier, on a $u_{l+1} = u_l$)

d'où

3/ Des conditions :



Il en résulte encore que les deux graphiques cumulatifs ne se traversent qu'une fois pour une valeur k_0 , ($i < k_0 < j$).

III - Des conditions (3) et (4), il résulte que les valeurs maximales de Δ_k doivent avoir lieu pour des valeurs entières de k , voisines des solutions des équations :

$$b_k = p_k \quad \text{et} \quad b_{k+1} = p_{k+1}$$

La condition $b_k = p_k$ donne :

$$e^{-np} = (1 - p)^{n-k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Posant $\lambda = np$ et prenant les logarithmes on a

$$-\lambda = (n - k) \left(-\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} \dots\right) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \text{Log} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)$$

d'où

$$k^2 - 2 \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)k + \lambda^2 - k \frac{\lambda^2}{n} + \frac{k(k-1)(2k-1)}{6n} \sim 0$$

Pour n grand, $\lambda = np$ restant fini on a en première approximation :

$$k^2 - 2 \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)k + \lambda^2 \sim 0$$

$$k \sim \lambda + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$$

On obtient ainsi les deux solutions approchées

$$i \text{ ou } j \sim np + \frac{1}{2} \pm \sqrt{np + \frac{1}{4}}$$

De même, la recherche de k à partir de la condition $b_{k+1} = p_{k+1}$ donnerait :

$$k^2 - 2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)k + \lambda(\lambda - 2) \sim 0$$

$$k \sim \lambda - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$$

En fait, les tables montrent que pour $p < 0,10$ (domaine où l'approximation poissonnienne est pratiquement valable quelque soit n) les valeurs maximales de $\Delta_k = |\mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k|$ ont toujours lieu pour les valeurs entières i ou j , immédiatement inférieures à $np + 1/1 \pm \sqrt{np} + 1/4$ (ces valeurs entières sont immédiatement voisines de $np \pm \sqrt{np}$ mais peuvent être inférieures ou supérieures).

Une autre approximation du problème nous a été signalée par M. Thionet :

En application de relations connues [14], existant entre loi de Poisson et loi Gamma d'une part et entre loi binomiale et loi Beta d'autre part, on sait que :

$$\mathcal{Q}_k = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = 1 - \int_0^{\lambda} e^{-x} \frac{x^k}{k!} dx$$

$$\mathcal{B}_k = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \int_0^p \frac{u^k (1-u)^{n-k-1}}{\beta(k+1, n-k)} du$$

avec

$$\beta(k+1, n-k) = \frac{k! (n-k-1)!}{n!}$$

(Dans le problème qui nous intéresse on a $\lambda = np$).

Si au lieu de chercher la valeur de k correspondant au maximum de $|\mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k|$, on considère $|\mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k|$ comme fonction de λ , pour n et k fixés le maximum de $|\mathcal{B}_k - \mathcal{Q}_k|$ aura lieu pour les valeurs de λ telles que

$$\frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \lambda} = \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta \lambda} = \frac{1}{n} \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta p}$$

La dérivation sous le signe $\int$ donne :

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k-1} \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{1}{n}$$

soit

$$e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

équation dont il est facile de voir qu'elle est équivalente à

$$p_{k+1}(np) = b_{k+1}(n, p)$$

c'est-à-dire l'une des conditions limites envisagées ci-dessus.

Pour n augmentant indéfiniment cette équation en λ se réduit à

$$\lambda^2 - 2(k+1)\lambda + k(k+1) \sim 0$$

d'où

$$\lambda \sim k + 1 \pm \sqrt{k + 1}$$

ou encore à

$$k^2 - 2 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) k + \lambda (\lambda - 2) \sim 0$$

soit

$$k \sim \lambda - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda + \frac{1}{2}}$$

qui est l'une des valeurs limites trouvées précédemment pour encadrer le nombre entier k .

Si $np = l^2$ est un carré, les valeurs maximales de Δ_k ont lieu exactement pour les valeurs entières i ou $j = l (l \pm 1)$.

Remarque

Enfin il convient de noter que lorsqu'on utilise l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, les queues de distribution sont surestimées : il en résulte que, dans un test d'hypothèse, des résultats significatifs à un risque donné pourront ne pas être considérés comme tels, mais inversement aucun résultat non significatif ne sera considéré comme significatif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] USPENSKY - Introduction to mathematical probability, Mac Graw Hill 1937 (et Kenney and Keeping p. 45).
- [2] MOLENAAR - How to poison Poisson distribution when approximating binomial tails. Stat. Neerl. 23 (1969) n° 1 p. 19/40.
- [3] RAFF - On approximating the point binomial. Journal of the American Statistical Association 51 (1956) N° 274 p. 293/304.
- [4] GENERAL ELECTRIC C° - Tables of the individual and cumulative terms of Poisson distribution. Van Nostrand 1962.
- [5] ROMIG - 50-100 binomial tables. John Wiley 1953.
- [6] N.B.S. - Tables of the binomial probability distribution ($n \leq 49$). Government Printing Office U.S.A. 1949.
- [7] DIXON and MASSEY - Introduction to statistical analysis. Mac Graw Hill, 2ème Edition 1957, p. 231.
- [8] FRASER - Statistics : an introduction. John Wiley 1958 p. 47
- [9] SCHAAFSMA et WILLEMZE - Gestion moderne de la qualité. Philips, p. 372.
- [10] KENNEY and KEEPING - Mathematics of Statistics Van Nostrand, 2ème Edition 1951, p. 42
- [11] HALD - Statistical theory with engineering applications John Wiley. 1952, p. 688.

- [12] CALOT - Cours de Statistique Descriptive. Dunod 1965, p. 113.
- [13] TABLES STATISTIQUES - Centre de Formation Statistique 1959 p. 1-10
- [14] CHARTIER ET MORICE - Relations entre quelques lois de probabilité.
Rev. Stat. Appl. 1967 - n° 4 p. 17-33.