

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. GARLET

**Disponibilités et défaillances d'un système homogène
de production. Première partie : définition et étude
analytique du modèle simple**

Revue de statistique appliquée, tome 17, n° 3 (1969), p. 31-60

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_3_31_0

© Société française de statistique, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISPONIBILITÉS ET DÉFAILLANCES D'UN SYSTÈME HOMOGÈNE DE PRODUCTION

PREMIÈRE PARTIE : DÉFINITION ET ÉTUDE ANALYTIQUE DU MODÈLE SIMPLE

M. GARLET

Électricité de France, Inspection Générale pour la Coopération Hors Métropole (IGECO)

	Pages
1 - Hypothèses et définitions. Notations. Objet de l'article	31
2 - Formule fondamentale de récurrence. Forme polynomiale ...	33
3 - Formule du reste. Achèvement de l'interpolation au moyen de la fonction Gamma (sans recours à la forme intégrale).....	37
4 - Forme intégrale et identification à la fonction Bêta avec interpolation complète.....	38
5 - Rattachement de la forme polynomiale à la fonction hypergéométrique et nouvelle voie pour obtenir la forme intégrale ...	40
6 - Probabilités élémentaires et expression binomiale classique .	41
7 - Etablissement de nouvelles formules de récurrence.....	43
8 - Méthodes de calcul - Formulaire utile.....	46
9 - Allure générale de la fonction $F(f, p, r)$. Phénomènes particuliers au domaine des petits nombres.....	47
10 - Prolongement des fonctions I_n^r pour les valeurs négatives de r .	53

1 - HYPOTHESES ET DEFINITIONS - NOTATIONS - OBJET DE L'ARTICLE

1-1 - Description du modèle

Nous considérons un système de production formé d'unités identiques dont chacune est à tout moment "disponible" ou "indisponible" avec une probabilité constante.

Sans doute constitue-t-il le modèle le plus simple que l'on puisse envisager, trouvant sa principale sinon unique justification dans l'accessibilité à un formalisme mathématique maniable :

- techniquement identiques, ses unités sont en outre indépendantes les unes des autres (en particulier, il n'y a pas de causes d'indisponibilité simultanée de plusieurs unités) ;

- son indisponibilité est entièrement aléatoire, ignorant notamment toute mise hors service systématique ;

- l'indisponibilité partielle d'une unité est exclue, de même que sa disponibilité ne comporte aucune restriction technique (c'est le "tout ou rien" pour chacune) ;

- enfin -et surtout- l'indisponibilité d'une unité (ou du système) à tout moment ne dépend pas du temps ni de ses états antérieurs.

1-2 - Définitions et notations

1-2-1 - Grandeurs principales

1-2-1-1 - Nombres d'unités

Envisagé de façon absolue, l'état instantané du système de n unités peut être défini

- soit par le nombre d'unités indisponibles, que nous appelons r ,
- soit, complémentirement, par le nombre d'unités disponibles, $n-r$, que nous désignons par p (a).

La disponibilité du système sera alors mesurée par le nombre p ou, en valeur relative, par le rapport $D = p/n = 1 - r/n$.

1-2-1-2 - Probabilités

f est la probabilité individuelle d'indisponibilité, supposée constante comme on l'a vu.

Nous désignons par I_n^r et adoptons comme grandeur-clé la probabilité pour que, sur n unités au total, r au plus soient indisponibles. Nous considérons également et désignons par $F_n^r = 1 - I_n^r$ la probabilité complémentaire pour que $r + 1$ unités au moins soient indisponibles (ou pour qu'il y ait moins de p unités disponibles). En d'autres termes :

$$I_n^r = \Pr \{D \geq p/n\} \quad , \quad F_n^r = \Pr \{D < p/n\}$$

1-2-2 - Autre définition (équivalente) des grandeurs principales

On peut aussi envisager le système non plus d'une façon absolue comme on vient de le faire, mais par rapport à un service fictif, caractérisé par le nombre p d'unités dont la marche serait nécessaire pour l'assurer. On reprendra les mêmes grandeurs que ci-dessus avec de nouvelles définitions :

- p devient le "nombre d'unités utiles" (ou "actives"),
- r devient le "nombre d'unités en réserve" (c'est-à-dire dont la marche ne serait pas nécessaire pour assurer le service en question) ;
- n , qui est toujours le nombre total d'unités du système, sera désigné plus concrètement par "nombre d'unités installées" ; quand à I_n^r (ou F_n^r), nous lui préférons la notation I_p^r (ou F_p^r). Le nombre n n'intervient plus directement, en effet, dans la nouvelle définition que l'on peut en donner, par exemple :

(a) étant bien entendu que les différentes unités demeurent indiscernables les unes des autres : on n'a pas à savoir "lesquelles" sont comptées dans p ou dans r .

I_p^r est la probabilité avec laquelle le système assure la marche de p unités moyennant l'adjonction d'une réserve de r unités.

F_p^r se définira, en termes symétriques, comme la probabilité pour que le système n'assure pas la disponibilité de p unités malgré l'adjonction d'une réserve de r unités.

1-2-3 - Grandeurs accessoires

Nous appellerons "taux de réserve" ou "réserve relative" le rapport

$$\rho = r/p \text{ (compté "en dehors").}$$

$$\rho' = r/n \text{ (compté "en dedans").}$$

1-3 - Objet de l'article

Ce premier article se propose de traiter la "théorie des I_n^r " considérés uniquement comme fonctions mathématiques, en commençant par établir leurs diverses expressions et relations pour chercher finalement à apprécier leur allure générale, particulièrement dans le domaine des petits nombres.

C'est en effet la discussion de la disponibilité des systèmes à unités peu nombreuses -comme il s'en trouve outre-mer- qui nous a fait entreprendre ce travail, avec les conclusions paradoxales auxquelles elle paraît parfois conduire et le besoin qu'elle rend plus impérieux, en présence de tels systèmes, de recourir à l'interpolation analytique des grandeurs arithmétiques en cause pour en saisir le jeu quelque peu déroutant (alors que cette interpolation est toute faite dans le domaine des grands nombres avec la loi normale dont le jeu est en outre plus régulier).

Nous ne dissimulerons pas que nous avons voulu aussi réagir contre l'application abusive de la loi normale à des nombres d'unités relativement faibles et même, dans un esprit de diversité, contre certaines présentations trop conventionnelles ou trop étroites telles que la forme binomiale habituelle ; sans ignorer cette dernière, qui reste la plus commode dans certaines analyses, nous avons recherché des attaques plus directes apportant, semble-t-il, quelques développements ou rapprochements originaux.

2 - FORMULE FONDAMENTALE DE RECURRENCE. FORME POLYNOMIALE

2-1 - Etablissement de la formule

2-1-1 - Considérons particulièrement un système de n unités dont r sont en réserve, et, nous intéressant à la probabilité de disponibilité I_n^r de l'ensemble des $p = n - r$ unités actives, examinons ce qu'elle devient lorsqu'on augmente la réserve d'une unité. Nous obtenons :

$$I_{n+1}^{r+1} = (1 - f) \cdot I_n^{r+1} + f \cdot I_n^r \quad (1)$$

soit, si l'on substitue à la notation I_n^r la notation I_p^r , et en augmentant p d'une unité pour conserver (p, r) comme plancher d'indices :

$$I_{p+1}^{r+1} = (1-f) \cdot I_p^{r+1} + f \cdot I_{p+1}^r \quad (2)$$

On observe que ces deux formules en I_n sont également vérifiées en $F = 1 - I$ (a) :

$$F_{n+1}^{r+1} = (1-f) \cdot F_n^{r+1} + f \cdot F_n^r \quad (3)$$

$$F_{p+1}^{r+1} = (1-f) \cdot F_p^{r+1} + f \cdot F_{p+1}^r \quad (4)$$

La formule fondamentale de récurrence est citée, sous une forme équivalente à la forme (1) ci-dessus, par Karl Pearson dans ses "Tables of the incomplete beta-function" [3] (page vi de l'introduction), à la construction desquelles elle a été systématiquement employée.

2-1-2 - Nous pouvons encore écrire (1) sous la forme :

$$I_n^{r+1} - I_{n+1}^{r+1} = f \cdot (I_n^{r+1} - I_n^r) \quad (5)$$

qui donne lieu à une interprétation graphique intéressante. Considérons en effet le diagramme en escalier KABCDEFGH (figure 1), dans l'hypothèse $n = 4$, des disponibilités d'un système de n unités, où chaque nez de marche, par exemple C, a pour hauteur $p = n - r$ le nombre d'unités utiles, et pour avancée I leur probabilité de disponibilité I_n^r , et examinons comment s'établit le diagramme K'L M A'B'C'D'E'F'G'H' du système de $(n+1)$ unités (en pointillé sur la figure). Comme on le vérifiera aisément au moyen de la formule (5), chaque nouveau nez de marche divise dans le rapport $f/(1-f)$ la largeur de la marche primitive sur laquelle il s'avance :

$$f/(1-f) = MA/MK = \dots = D'E/D'D = \dots = H'I/H'H$$

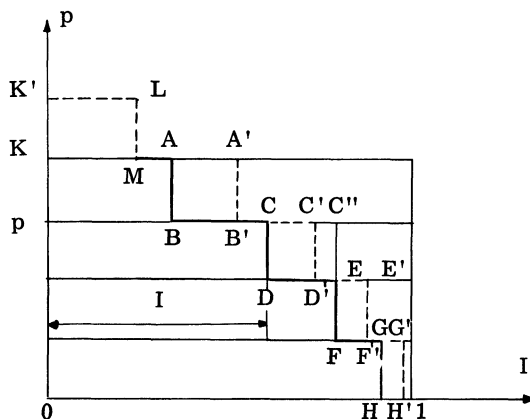


Figure 1

(a) Ce serait le cas pour toute relation linéaire homogène en I , ainsi qu'on l'établira ci-après en 7-1-3.

2-2 - Construction d'un tableau des I_n^r

Il est intéressant de ranger les I_n^r en un tableau par lignes et colonnes en prenant $n = 1, 2, \text{etc.}$ comme numéro de la ligne compté du haut vers le bas et r comme numéro de la colonne compté de la gauche vers la droite (voir figure 2). Chaque I_n^r est également caractérisé par son "rang diagonal" $n - r = p = 1, 2, \text{etc.}$ On trouve en bordure du tableau :

		r (colonnes)					
		0	1	2	3	4	5
n (lignes)	1	I_1^0	I_1^1				
	2	I_2^0	I_2^1	I_2^2			
	3						
	4						
		$p = n - r$ (diagonales)					

Figure 2

- selon la colonne 0 les termes $I_n^0 = (1 - f)^n$,
- selon la diagonale 0 les termes $I_n^n = 1$.

Les cases situées au-dessus de la diagonale 0, dont le contenu ne saurait avoir de sens, ont été hachurées.

La formule (1), ou (5), permet de calculer de proche en proche tous les termes du tableau en partant du haut, puisque l'on connaît tous les termes de bordure (colonne 0 et diagonale 0), un terme donné (C) pouvant être calculé dès que l'on connaît le terme situé immédiatement au-dessus (B) ainsi que le terme situé immédiatement à gauche de ce dernier (A) (voir schéma figure 3). Plus précisément, en mettant la formule (1) sous la forme $C = B - f \cdot (B - A)$, on voit que : le terme cherché s'obtient en retranchant du terme situé au-dessus l'excédent, multiplié par f , que ce dernier présente lui-même sur le terme situé à sa gauche.

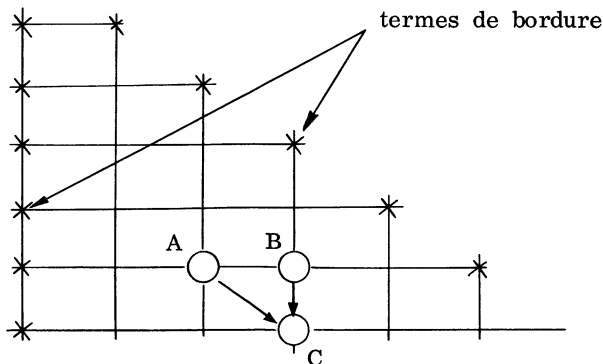


Figure 3

A titre d'exemple, ci-après les premiers termes du tableau I_n^r correspondant à $f = 0,10$:

$\begin{matrix} r \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3
1	0,9	1		
2	0,81	0,99	1	
3	0,729	0,972	0,999	1
4	0,6561	0,9477	0,9963	0,9999
5	0,59049	0,91854	0,99144	0,99954

et que l'on obtient comme suit :

$$\begin{aligned} 0,9 &= 1 - 0,1 ; 0,81 = (1 - 0,1)^2 ; \\ 0,99 &= 1 - 0,1 \times (1 - 0,9) \text{ etc...} ; \\ 0,972 &= 0,99 - 0,1 \times (0,99 - 0,81) \text{ etc...} \end{aligned}$$

On observe que toutes les lignes ont la même moyenne de l'ensemble de leurs termes non égaux à l'unité. Cela peut en effet se démontrer assez facilement par récurrence au moyen de la formule fondamentale, mais reste en fait sans grand intérêt car rendu évident, dans la pratique, par l'introduction de la puissance moyenne du système

2-3 - Expression générale ("polynomiale") des I_n^r

2-3-1 Le changement de fonction $I_n^r = (1-f)^p \cdot i_n^r$ simplifie la formule (1) en :

$$i_{n+1}^{r+1} = i_n^{r+1} + f \cdot i_n^r$$

tandis que les termes de bordure deviennent tous égaux à l'unité. Cela fait apparaître les i_n^r comme des polynômes en f de degré r . Le calcul des premiers, montrant plus précisément qu'ils se déduisent successivement de ceux qui les précèdent dans la même diagonale par addition du monôme de degré le plus élevé (par exemple : $i_n^0 = 1$; $i_n^1 = 1 + 2f$; $i_n^2 = 1 + 2f + 3f^2$; ...). conduit à poser : $i_n^r - i_{n-1}^{r-1} = a_n^r \cdot f^r$, les coefficients numériques a_n^r obéissant eux-mêmes à la formule de récurrence : $a_n^r = a_{n-1}^r + a_{n-1}^{r-1}$ et s'identifiant ainsi avec les nombres de combinaisons.

On obtient finalement la formule de récurrence suivante, en notations I_p^r :

$$I_p^r - I_p^{r-1} = (1-f)^p C_{n-1}^r \cdot f^r \quad (a) \quad (6)$$

d'où, en appliquant cette formule depuis $r = 1$ avec $I_p^0 = (1-f)^p$, l'expression générale de I_p^r (ou I_n^r) :

$$I_n^r = (1-f)^p \cdot \left[1 + pf + \frac{p(p+1)}{2} f^2 + \dots + \frac{p(p+1) \dots (p+r-1)}{r!} f^r \right] \quad (7)$$

(ou I_p^r)

(a) On pourra retrouver cette formule par combinaison linéaire de la formule fondamentale (1) et des formules binomiales (19) et (20) données dans la suite.

La forme de la parenthèse de cette expression (polynôme "vrai" en f) nous lui a fait donner le nom de "forme polynomiale" par opposition avec l'expression binomiale classique (voir 6-1) que l'on peut écrire :

$$I_n^r = (1-f)^p \cdot \left[(1-f)^r + (p+r)f \cdot (1-f)^{r-1} + \dots + \frac{(p+r)\dots(p+1)}{r!} f^r \right]$$

et où elle se présente comme un polynôme mixte (homogène) en f et $1-f$.

La parenthèse comportant $(r+1)$ termes, la formule (7) n'est évidemment valable que pour r entier.

2-3-2 - Correspondance avec la formule de Poisson

Si, selon la méthode connue, on fait tendre p vers l'infini et f vers zéro de telle sorte que le produit pf demeure fini, on obtient de façon immédiate :

$$\begin{aligned} \lim I_p^r &= \lim e^{pf} \cdot \left[1 + pf + \left(1 + \frac{1}{p}\right) \frac{p^2 \cdot f^2}{2!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p}\right) \dots \left(1 + \frac{r-1}{p}\right) \frac{p^r \cdot f^r}{r!} \right] \\ &= e^{pf} \cdot \left[1 + pf + \frac{p^2 f^2}{2!} + \dots + \frac{p^r f^r}{r!} \right] \end{aligned}$$

formule qui, si l'on pose $pf = x$, devient la formule de Poisson en (x, r) .

La forme polynomiale offre ainsi la particularité d'une correspondance terme à terme avec la forme limite de Poisson.

3 - FORMULE DU RESTE - ACHEVEMENT DE L'INTERPOLATION AU MOYEN DE LA FONCTION GAMMA (SANS RECOURS A LA FORME INTEGRALE)

3-1 - On reconnaît dans la parenthèse de la formule (7) le début du développement en série de $(1-f)^{-p}$.

Posons alors :

$$1 + pf + \dots + \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} f^r = (1-f)^{-p} - R_p^r$$

R_p^r étant ainsi le reste du développement de $(1-f)^{-p}$ après le terme en f^r , soit

$$R_p^r = \frac{p(p+1)\dots(p+r)}{(r+1)!} f^{r+1} + \dots + \frac{p(p+1)\dots(p+r-1+k)}{(r+k)!} f^{r+k} + \dots \quad (8)$$

Il en résulte pour I_p^r la nouvelle expression :

$$I_p^r = 1 - (1-f)^p R_p^r$$

ou plus simplement, en passant aux F :

$$1 - I_p^r = \boxed{F_p^r = (1 - f)^p R_p^r} \quad (9)$$

L'identité

$$\boxed{\frac{p(p+1)\dots(p+r)}{(r+1)!} = \frac{(p+r)!}{(p-1)!(r+1)!} = \frac{(r+2)\dots(r+p)}{(p-1)!}} \quad (10)$$

permet de donner à R_p^r l'autre forme :

$$\boxed{R_p^r = \frac{(r+2)(r+3)\dots(r+p)}{(p-1)!} f^{r+1} + \dots + \frac{(r+1+k)\dots(r+p-1+k)}{(p-1)!} f^{r+k} + \dots} \quad (11)$$

où r n'a plus besoin d'être entier, cette nécessité apparaissant en revanche pour p : les formules (8) et (11) employées concurremment, complétées bien entendu par la formule (9), réalisent donc déjà une "semi-interpolation double" des F_p^r (la variable nécessairement discontinue pouvant au choix être p ou r).

3-2 - On passe sans difficulté à l'interpolation complète -sans qu'il soit besoin de la forme intégrale habituellement sollicitée- en reprenant pour les coefficients de la série du reste la forme factorielle pure donnée ci-dessus en intermédiaire et en substituant à la fonction factorielle $z!$ sa fonction d'interpolation bien connue $\Gamma(z+1)$, d'où pour F_p^r :

$$F_p^r = (1 - f)^p \cdot \left[\frac{\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p)\Gamma(r+2)} f^{r+1} + \dots + \frac{\Gamma(p+r+k)}{\Gamma(p)\Gamma(r+k+1)} f^{r+k} + \dots \right] \quad (12)$$

soit encore :

$$\boxed{F_p^r = \frac{\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p)\Gamma(r+2)} (1 - f)^p f^{r+1} \cdot \left[1 + \frac{p+r+1}{r+2} f + \dots + \frac{(p+r+1)\dots(p+r+k)}{(r+2)\dots(r+k+1)} f^k + \dots \right]} \quad (13)$$

(Si l'on ne considère pas simultanément des valeurs non entières de p et r , il est plus simple de revenir, pour le facteur en Γ de (13), à l'une des deux expressions (10) encadrées ci-dessus).

4 - FORME INTEGRALE ET IDENTIFICATION A LA FONCTION BETA AVEC INTERPOLATION COMPLETE

En appliquant à la série du reste la formule du reste intégral de Taylor-Lagrange, on obtiendra la forme intégrale des $F_p^r(a)$. Plus précisément si, dans la formule générale :

(a) Ce processus est classique (cf. [2] page 123), mais intervient beaucoup plus naturellement ici.

$$[R_r]_a^b = \int_a^b \frac{(b-t)^r}{r!} g^{(r+1)}(t) dt \quad (a)$$

on fait $a = 0$, $b = f$ et $g(t) = (1-t)^{-p}$,

il vient :

$$R_p^r = \frac{p(p+1) \dots (p+r)}{r!} \cdot \int_0^f \frac{(f-t)^r}{(1-t)^{p+r+1}} dt \quad (14)$$

Il suffit alors de poser $1-t = \frac{1-f}{u}$ pour que l'intégrale ci-dessus prenne la forme :

$$\frac{1}{(1-f)^p} \int_{1-f}^1 u^{p-1} \cdot (1-u)^r du$$

et que l'on retrouve plus classiquement :

$$F_p^r = (1-f)^p \cdot R_p^r = \frac{p(p+1) \dots (p+r)}{r!} \int_{1-f}^1 u^{p-1} (1-u)^r du \quad (15)$$

L'intégrale s'identifie cette fois en effet avec la fonction Bêta (intégrale eulérienne de première espèce), fonction de trois variables :

$$\mathcal{B}_x(P, Q) = \int_0^x u^{P-1} \cdot (1-u)^{Q-1} du$$

Plus exactement, si comme il est habituel [3] on désigne par "fonction Bêta incomplète" le rapport :

$$J_x(P, Q) = \frac{\mathcal{B}_x(P, Q)}{\mathcal{B}_1(P, Q)}$$

où $\mathcal{B}_1(P, Q) = B(P, Q)$ représente la fonction Bêta complète plus communément considérée, la formule (15) ci-dessus se décompose en :

$$F_p^r = \frac{p(p+1) \dots (p+r)}{r!} \cdot [\mathcal{B}_1(p, r+1) - \mathcal{B}_{1-f}(p, r+1)]$$

Or, si $f = 1$: $F_p^r = 1$, $\mathcal{B}_{1-f} = 0$, d'où :

$$\mathcal{B}_1(p, r+1) = \frac{r!}{p(p+1) \dots (p+r)} = \frac{r! (p-1)!}{(p+r)!} = \frac{\Gamma(r+1) \Gamma(p)}{\Gamma(p+r+1)} \quad (b)$$

(a) où $[R_r]_a^b$ désigne le reste du développement en série entière de $g(b) - g(a)$ au-delà du terme en $(b-a)^r$.

(b) On retrouve en passant la formule classique d'Euler :

$$B(P, Q) = \Gamma(P) \Gamma(Q) / \Gamma(P+Q)$$

et

$$F_p^r = \frac{\beta_1 - \beta_{1-f}}{\beta_1} = 1 - J_{1-f}$$

On écrira plus directement :

$$\boxed{I_p^r = J_{1-f}(p, r+1)} \quad (16)$$

Comme, selon une propriété connue de symétrie de la fonction β (rappe-
lée dans [3]) :

$$\beta_1(P, Q) = \beta_1(Q, P) \quad \text{et} \quad \beta_x(P, Q) = 1 - \beta_{1-x}(Q, P) \quad (a)$$

on a encore :

$$\boxed{F_p^r = J_f(r+1, p)} \quad (17)$$

Le principal intérêt de la formule (16) ou (17) est de permettre d'utiliser les tables de Pearson [3] au calcul des I_p^r ou des $F_p^r(b)$. Ces tables, à 7 décimales, ont l'avantage de traiter l'ensemble des valeurs de f avec une densité appréciable (tous les 0,01) ainsi que les valeurs demi-entières de P et Q jusqu'à 11 (les tables s'étendent jusqu'à 50 par valeurs entières). En fait, leur économie ayant évidemment exploité les propriétés de symétrie rappelées plus haut, il faut y chercher :

$$\begin{aligned} F_p^r \text{ (ou } 1 - I_p^r) &= J_f(r+1, p) & \text{si} & \quad r \geq p-1 \\ 1 - F_p^r \text{ (ou } I_p^r) &= J_{1-f}(p, r, 1) & \text{si} & \quad r < p-1 \end{aligned}$$

5 - RATTACHEMENT DE LA FORME POLYNOMIALE A LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE ET NOUVELLE VOIE POUR OBTENIR LA FORME INTEGRALE

5-1 - Reprenons la formule (13) ci-dessus de F_p^r , avec la première expression (10) et en remplaçant $p+r$ par n , soit :

$$F_n^r = \frac{p(p+1) \dots n}{(r+1)!} (1-f)^p f^{r+1} \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1) \dots (n+1+k-1)}{(r+2) \dots (r+2+k-1)} f^k \right] \quad (13')$$

Le crochet s'identifie avec la fonction hypergéométrique de Gauss (cf. [5] page 236 et [1] page 9 : nous substituons toutefois la notation $\mathcal{H}$ à la notation F ou $\mathcal{F}$ pour éviter des confusions) :

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+k-1)} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

(a) On établira plus directement cette propriété en 7-1-2.

(b) comme le signale [4] page 142.

à condition de prendre :

$$\alpha = n + 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = r + 2$$

Autrement dit :

$$F_n^r = \frac{p(p+1) \cdot n}{(r+1)!} (1-f)^p f^{r+1} \cdot \mathcal{H}(n+1, 1, r+2, f) \quad (18)$$

5-2 - L'expression (18) permet de retrouver l'expression intégrale de F .
On a en effet (intégrale d'Euler : [1] page 12 et [5] page 244) :

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

soit ici :

$$\mathcal{H}(n+1, 1, r+2, x) = (r+1) \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{(1-tx)^{n+1}} dt$$

expression que le changement de variable $t = 1 - \frac{1-x}{x} \cdot \frac{u}{1-u}$ ramène à :

$$\mathcal{H}(n+1, 1, r+2, f) = \frac{r+1}{f^{r+1} \cdot (1-f)^p} \int_0^x u^r (1-u)^{p-1} du$$

d'où, d'après (18) et en faisant $x = f$:

$$F_n^r = \frac{p(p+1) \cdot (p+r)}{r!} \int_0^f t^r \cdot (1-t)^{p-1} dt,$$

formule identique à la formule (17) ci-dessus.

6 - PROBABILITES ELEMENTAIRES ET EXPRESSION BINOMIALE CLASSIQUE

6-1 - Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'en elle-même et de façon directe la réalisation ou la non réalisation de telle ou telle disponibilité du système sans nous soucier de la diversité possible de ses modes de réalisation. En termes probabilistes, nous nous sommes exclusivement intéressés à la fonction de répartition :

$$F_n^r = \Pr \left(D < \frac{p}{n} \right) \quad \left(\text{ou } I_n^r = \Pr \left(D \geq \frac{p}{n} \right) \right)$$

en négligeant les probabilités élémentaires composantes :

$$P_1 = \Pr \left(D = \frac{1}{n} \right), \quad P_2 = \Pr \left(D = \frac{2}{n} \right), \dots, \quad P_{p-1} = \Pr \left(D = \frac{p-1}{n} \right)$$

L'exposé classique de la "loi binomiale" revient au contraire à trouver la fonction de répartition comme somme des probabilités élémentaires des différents modes de réalisation de l'éventualité dont elle rend compte globalement. Nous nous contenterons ici d'écrire le formulaire utile qui en résulte pour nous :

$$P_n^k = \Pr(k \text{ unités indis.}) = \Pr((n-k) \text{ unités disp.})$$

$$Q_n^k = \Pr(k \text{ unités disp.}) = \Pr((n-k) \text{ unités indis.})$$

$$\begin{aligned} P_n^k &= Q_n^{n-k} = C_n^k \cdot f^k \cdot (1-f)^{n-k} = C_n^{n-k} \cdot (1-f)^{n-k} \cdot f^k \\ Q_n^k &= P_n^{n-k} = C_n^k \cdot (1-f)^k \cdot f^{n-k} = C_n^{n-k} \cdot f^{n-k} \cdot (1-f)^k \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I_n^r &= P_n^0 + P_n^1 + \dots + P_n^r \\ &= Q_n^p + Q_n^{p+1} + \dots + Q_n^n \end{aligned} \quad (20) \quad \begin{aligned} F_n^r &= Q_n^0 + Q_n^1 + \dots + Q_n^{p-1} \\ &= P_n^{r+1} + P_n^{r+2} + \dots + P_n^n \end{aligned} \quad (21)$$

$$P_n^{r+1} = Q_n^{p-1} = I_n^{r+1} - I_n^r = F_n^r - F_n^{r+1} \text{ avec } P_n^0 = I_n^0$$

Observons en passant que l'équivalence des expressions (20) (21) avec la forme polynomiale (7) se ramène à l'identité (par elle-même sans intérêt) :

$$\sum_{k=0}^{k=r} C_n^k f^k (1-f)^{r-k} = \sum_{k=0}^{k=r} C_{n-r+k-1}^k f^k$$

6-2 - Dérivée de $F_p^r = 1 - I_p^r$ par rapport à f

La formule (17), qui s'écrit explicitement :

$$F_p^r = \frac{\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)} \int_0^f t^r \cdot (1-t)^{p-1} dt$$

donne immédiatement :

$$\frac{\partial F_p^r}{\partial f} = \frac{\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)} (1-f)^{p-1} \cdot f^r = \frac{(p+r)!}{(p-1)! r!} (1-f)^{p-1} \cdot f^r \quad (22)$$

Cette dérivation, qui serait au contraire laborieuse à partir de l'expression (7), se fait également avec facilité sur la forme (21), les termes dérivés se détruisant mutuellement sauf le dernier.

On peut même, à l'inverse, partant de la formule (22) ainsi établie, retrouver l'expression (17) par intégration (cf. [4] pages 161-162).

7 - ETABLISSEMENT DE NOUVELLES FORMULES DE RECURRENCE

7-1 - Relations linéaires homogènes à 3 termes. Complémentarité de leurs coefficients

7-1-1 - Si (cf. [5] page 239 et [1] page 11) on qualifie de contiguës deux fonctions hypergéométriques $\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ayant même valeur de 2 de leurs 3 paramètres α, β, γ tandis que le troisième diffère d'une unité -par exemple $\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et $\mathcal{H}(\alpha - 1, \beta, \gamma, x)$ - il existe un théorème, dû à Gauss, selon lequel la fonction $\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et deux quelconques de ses contiguës vérifient une relation linéaire homogène dont les coefficients sont des polynômes du premier degré en x .

Nos fonctions hypergéométriques particulières de 5.2, du type $\mathcal{H}(\alpha, 1, \gamma, x)$, ont, avec leurs deux seuls paramètres libres, 4 contiguës donnant donc lieu à $C_4^2 = 6$ relations distinctes. Nous ne nous attacherons pas de façon systématique à établir ou discuter ces relations, pour nous borner aux quelques remarques ou calculs qui nous paraissent intéressants.

Nous connaissons d'ailleurs déjà l'existence de l'une de ces relations, celle qui correspond à notre relation fondamentale de récurrence (2) et est du type $(\alpha, \gamma) (\alpha, \gamma - 1) (\alpha + 1, \gamma)$. On l'obtient en remplaçant dans la relation (2) les F par leurs expressions (18), soit :

$$\boxed{\alpha \mathcal{H}_{\alpha+1, \gamma+1} = (\alpha - \gamma) \mathcal{H}_{\alpha, \gamma+1} + \gamma \mathcal{H}_{\alpha, \gamma}} \quad (a) \quad (23)$$

7-1-2 - La substitution $f \rightarrow 1 - f$ entraîne successivement :

$$\begin{aligned} \text{(formule 19)} \quad P_n^k &= C_n^k \cdot f^k \cdot (1 - f)^{n-k} \\ &\longrightarrow C_n^k \cdot (1 - f)^k \cdot f^{n-k} = Q_n^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(formules (20) et (21))} \quad I_n^r &= P_n^0 + P_n^1 + \dots + P_n^r \\ &\longrightarrow Q_n^0 + Q_n^1 + \dots + Q_n^r = F_n^{p-1} = 1 - P_n^{p-1}, \end{aligned}$$

ce qui rétablit directement, en notations I_n^r , la propriété de symétrie

$$\boxed{1 - I(1 - f, n, p - 1) = I(f, n, r)} \quad (24)$$

rencontrée en 4 avec la fonction Bêta incomplète.

7-1-3 - I', I, I'' désignant en ordre croissant les 3 I_n^r en jeu dans une relation linéaire homogène, écrivons cette dernière sous la forme schématique :

$$aI = a'I' + a''I''$$

où les coefficients (positifs) a, a' et a'' sont des fonctions de n et r (ou de p et r , ou de n et p) et, bien entendu, de f .

(a) On remarquera l'espèce de réciprocité selon laquelle cette relation en $\mathcal{H}$ ne contient pas explicitement x (ou f) alors que la relation (2) en F ne contenait pas explicitement p ni r (ou α ni γ).

Si nous appliquons alors à I, I', I'' la transformation (24), nous voyons que, pour rester homogène à travers cette transformation, la relation doit être telle que $a = a' + a''$, donc être de la forme :

$$(a' + a'') I = a' I' + a'' I'' \quad (25)$$

(elle se trouve par là-même également vérifiée par les F).

Cette particularité donne lieu à une interprétation graphique intéressante, si on condense la formule en :

$$\boxed{\frac{I - I'}{I'' - I} = \frac{a''}{a'} = R} \quad (26)$$

Nous en avons déjà eu un exemple ci-dessus en 2-1-2 avec la formule fondamentale de récurrence, qui correspond à :

$$a' = f, \quad a'' = 1 - f \quad (I_n^r < I_{n+1}^{r+1} < I_n^{r+1})$$

Nous allons en trouver deux autres ci-après avec les relations par ligne et par colonne du tableau des I_n^r .

7-2 - Relations "par colonne" et "par ligne". Interprétation graphique

La relation fondamentale (2) présente certes l'avantage que ses coefficients ne dépendent pas des rangs des termes (puisque'ils sont seulement fonction de f), et qui doit être essentiel dans le calcul automatique d'un tableau des F_n^r pour f donné. Mais elle condamne à une "marche en crabe" en lisière d'un champ déjà entièrement exploré, alors qu'en pratique on se préoccupera davantage de savoir ce qui se passe le long d'une ligne, colonne ou diagonale du tableau, sans être condamné à déterminer tous les termes compris entre cette dernière et la frontière du tableau.

La théorie exposée en 7-1-1 ne fournit pas de "progression alignée" selon les diagonales, puisqu'elle exclut la variation simultanée de α et γ . Elle en fournit une selon les lignes -il s'agit de la relation du type $(\alpha, \gamma - 1)$ (α, γ) $(\alpha, \gamma + 1)$ - et une selon les colonnes avec le type $(\alpha - 1, \gamma)$ (α, γ) $(\alpha + 1, \gamma)$.

7-2-1 - Pour la relation "par colonne" on trouve par identification membre à membre :

$$\alpha \cdot (1 - x) \mathcal{H}_{\alpha+1, \gamma} + (\alpha - \gamma) \mathcal{H}_{\alpha-1, \gamma} = [2\alpha - \gamma - (\alpha - 1)x] \mathcal{H}_{\alpha, \gamma}$$

soit, en revenant aux F_n^r par la formule (18), puis en leur substituant les I_n^r et enfin en passant aux notations I_p^r :

$$\boxed{p I_{p+1}^r = n(1 - f) I_{p-1}^r = [p + n \cdot (1 - f)] I_p^r} \quad (27)$$

Compte tenu que $I_{p+1}^r < I_p^r < I_{p-1}^r$, cette relation correspond à :

$$a' = n(1 - f) \text{ et } a'' = p,$$

et a pour forme (26):

$$\frac{I_p^r - I_{p+1}^r}{I_p^r - I_p^r} = R = \frac{p}{n \cdot (1 - f)} \quad (27')$$

Comme le montre la figure 4 dans un système de coordonnées (I, p) à f fixé, la formule (28) rend compte localement (en un sommet d'abscisse p) de la convexité du tracé polygonal $r = C^{te}$ (a) : en effet, ce tracé est droit si $R = 1$, convexe si $R < 1$ (c'est le cas de la figure 4), concave si $R > 1$.

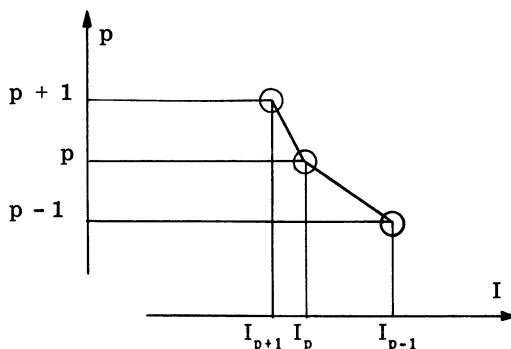


Figure 4

7-2-2 - La relation "par ligne" est beaucoup plus facile à établir, grâce à la forme (26) :

$$R = \frac{I_n^r - I_n^{r-1}}{I_n^{r+1} - I_n^r}$$

(avec $I_n^{r-1} < I_n^r < I_n^{r+1}$), les deux termes du rapport R étant immédiatement fournis par le formulaire classique du binôme rappelé en 6-1 :

$$I_n^{r+1} - I_n^r = P_n^{r+1} = C_n^{r+1} \cdot f^{r+1} \cdot (1 - f)^{n-r-1}$$

$$I_n^r - I_n^{r-1} = P_n^r = C_n^r \cdot f^r \cdot (1 - f)^{n-r}$$

d'où

$$R = \frac{r+1}{p} \cdot \frac{1-f}{f}$$

soit

$$a' = (r+1)(1-f) \quad \text{et} \quad a'' = pf$$

La relation "par ligne" s'écrit donc :

$$(r+1)(1-f) I_n^{r+1} + pf \cdot I_n^{r-1} = [(r+1)(1-f) + pf] I_n^r \quad (28)$$

(a) selon l'orientation adoptée par les analystes qui déclare convexe une courbe dont tout arc est au-dessous de sa corde (ou au-dessus d'une quelconque de ses tangentes).

Toujours en coordonnées (I, p) et à f donné, le rapport

$$R = \frac{r+1}{p} \cdot \frac{1-f}{f}$$

rend encore compte de la convexité d'un tracé polygonal, qui correspond cette fois à $n = C^{te}(a)$.

7-3 - Relation linéaire "diagonale" à deux termes

Nous pouvons ainsi qualifier, pour la distinguer des précédentes, la formule (6), "souche" de la forme polynomiale (7). Linéaire, mais non homogène, elle ne saurait être fournie par la théorie des fonctions contiguës. Observons simplement qu'elle devient évidente sur la forme hypergéométrique. Il suffit en effet de reprendre d'après 5-1 le crochet de l'expression (13') pour écrire :

$$\begin{aligned} [] &= \mathcal{H}_{\alpha, \gamma} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 \dots \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x \cdot \left[1 + \frac{\alpha+1}{\gamma+1} x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x^2 \dots \right] \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{H}_{\alpha, \gamma} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x \cdot \mathcal{H}_{\alpha+1, \gamma+1}$$

Soit à partir de cette expression, soit directement en faisant appel à la fonction Gamma, on peut étendre aux valeurs non entières de p et r la formule (6), écrite alors plus commodément sous la forme suivante de système récurrentiel en F_p^r et K_p^r :

$F_p^{r+1} = F_p^r - K_p^r \qquad K_p^{r+1} = \frac{p+r+1}{r+2} f \cdot K_p^r$	(29)
$K_p^{ro} = \frac{\Gamma(p+ro+1)}{\Gamma(p)\Gamma(ro+2)} f^{ro+1} \cdot (1-f)^p$	

8 - METHODES DE CALCUL - FORMULAIRE UTILE

On trouvera ci-après quelques indications sur les méthodes de calcul numérique qui nous ont servi à dresser divers graphiques de la fonction $F(f, p, r)$ considérée comme continue dans ses quatre dimensions, présentés au chapitre suivant.

- Pour p (ou n) et r entiers et demi-entiers, le travail est tout fait sous la forme des tables de Pearson [3] (jusqu'à 50 en nombres entiers, jusqu'à 12 en nombres demi-entiers).

- A l'opposé, pour p et r quelconques, particulièrement pour p et $r < 1$, nous avons généralement utilisé la formule du reste sous la forme (13) légèrement remaniée :

(a) Cette démarche s'identifie avec la très classique reconnaissance du terme le plus grand dans le développement du binôme.

$$F_p^r = \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)} (1-f)^p \cdot f^r \cdot \left[\frac{p+r}{r+1} f + \frac{(p+r)(p+r+1)}{(r+1)(r+2)} f^2 + \dots \right]$$

où, si l'on préfère : $[] = u_1 + u_2 + \dots$ avec :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1}{b_1} f & a_1 &= p+r \\ & & b_1 &= r+1 \\ u_2 &= u_1 \frac{a_2}{b_2} f & a_2 &= a_1 + 1 \\ & & b_2 &= b_1 + 1 \text{ etc...} \end{aligned}$$

- Les formules de récurrence permettraient de calculer de proche en proche F_p^r pour p et r quelconques en partant de $F_{p_0}^{r_0}$ ainsi calculé par exemple dans le seul carré ($0 < p < 1$, $0 < r < 1$), p_0 et r_0 désignant la partie non entière de p et r . En fait cela n'aurait d'intérêt que si l'on cherchait à étendre un quadrillage fin en p et r au-delà de ce carré. Or, dans ce domaine, nous nous sommes généralement contentés de la trame existante des entiers et demi-entiers déjà tissée par les tables existantes. Nous avons certes eu besoin de quelques points supplémentaires, mais nous les avons choisis à p ou r entier, ce qui nous a permis d'employer :

• (r entier) tout simplement la formule (7)

$$I_n^r = (1-f)^p \left[1 + pf + \frac{p(p+1)}{2} f^2 + \dots + \frac{p(p+1) \cdot (p+r-1)}{r!} f^r \right]$$

• (p entier) la forme intégrale (17) après développement de la parenthèse et intégration terme à terme, ce qui donne la formule :

$$\begin{aligned} F_p^r &= \frac{\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)} \left[\frac{f^{r+1}}{r+1} - (p-1) \frac{f^{r+2}}{r+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-1)(p-2)}{2} \cdot \frac{f^{r+3}}{r+3} - \dots - (-1)^p \frac{f^{r+p}}{r+p} \right] \end{aligned}$$

- En sens contraire, le système récurrentiel diagonal (29) fournira un moyen commode d'exploration du domaine $-1 < r < 0$ de prolongement des fonctions I_n^r dont il sera question au chapitre 10.

9 - ALLURE GENERALE DE LA FONCTION $F(f, p, r)$ - PHENOMENES PARTICULIERS AU DOMAINE DES PETITS NOMBRES

Disons bien que, ne prétendant pas à une description exhaustive de l'hypersurface $F(f, p, r)$, nous visons, de façon plus directe et plus "intéressée", à mettre en évidence ce que les disponibilités des systèmes à petit nombre d'unités peuvent, dans leur jeu, présenter d'inattendu par référence intuitive aux grands nombres. Cela sous forme "d'irrégularités" de l'hypersurface dans le domaine des petites valeurs de p et r .

9-1 - Section $f = C^{te}$: effet de nombre (ou effet de taille)

Cette section correspond en effet à notre problème schématique n° 1 ; que nous pouvons énoncer comme suit :

Désirant par exemple constituer un système de production au moyen d'unités identiques de technique déterminée, mais sans nous en fixer à l'avance ni la taille, ni le nombre total dont nous savons seulement qu'il sera petit (disons < 10), nous nous proposons, en un premier stade, de comparer les différentes associations possibles d'unités en réserve et d'unités utiles selon la probabilité de disponibilité assurée à l'ensemble de ces dernières, et en particulier de reconnaître lesquelles se placent favorablement à cet égard par rapport à un certain seuil.

En termes analytiques, il s'agit, f étant fixé, de se rendre compte

- comment varie $F_f(p, r)$ en fonction de p et r ,
- F étant également fixé, quels couples (p, r) satisfont la condition $F_f(p, r) \leq F$.

Parmi ces couples, on s'intéressera plus spécialement à ceux qui réalisent strictement cette condition (c'est-à-dire tels aussi que $F_p^{r-1} > F$) et dont on songera à comparer la réserve relative $r/p = \rho$, d'importance économique évidente.

9-1-1 - Graphique $r = C^{te}$ et $\rho = C^{te}$ en coordonnées (p, F) .

Nous avons choisi une échelle logarithmique en ordonnées de façon à obtenir pour F un degré de détail indépendant de son ordre de grandeur, à priori très variable. Nous avons pris $f = 0,10$, valeur simple et reflétant assez bien une moyenne.

Nous présentons un premier graphique G1, bilogarithmique, s'étendant sur :

- 2 décades en p (de 1 à 20 avec prolongement antérieur en pointillé jusqu'à $p = 0,2$),
- 4 décades en F (de $1/10\,000$ ou $f/1\,000$ ou $0,01\%$ à $1/1$ ou $10\,f$ ou 100%).

Les courbes tracées correspondent :

- aux valeurs entières de r de 0 à 9 ($r = 10$ sortant du champ) complétées par les valeurs demi-entières 0,5 et 1,5,
- aux valeurs suivantes de ρ (en centièmes) : 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 150, 200.

Ce graphique présentant toutefois dans sa partie droite un "tassement" progressif nuisible, nous l'avons doublé par un autre, un peu moins étendu, établi en linéaire-log. Ce deuxième graphique, G2, qui donne une meilleure vue d'ensemble, montre qualitativement :

- qu'en allant vers le bas et vers la droite le réseau de courbes tend à se présenter comme un quadrillage régulier avec des courbes ρ rectilignes et des courbes r régulièrement espacées ;
- qu'au contraire en allant vers le haut et vers la gauche, c'est-à-dire en se rapprochant de la frontière $r = 0 = \rho$, le réseau se déforme : convergence des courbes r et surtout accentuation de la courbure des courbes ρ avec maximum de l'ordonnée.

Le graphique G1 détaille l'irrégularité à maximum des courbes ρ , qui apparaît comme d'autant plus étendue que la réserve relative est plus faible et, corrélativement, la probabilité d'indisponibilité plus élevée. Les courbes r sont pratiquement rectilignes sur une grande étendue (qui dépasse la décade en F), surtout dans la partie régulière du réseau.

Cette exploration faite du continuum géométrique que nous lui avons donné comme support, revenons-en à notre modèle discret. L'effet de nombre (ou de taille) annoncé peut être constaté comme suit :

parmi les associations de p unités utiles et r unités en réserve respectant un seuil d'indisponibilité ($F_p^r < F$), ce n'est pas toujours une association à nombre maximal d'unités utiles (ou à taille minimale de ces unités) qui donne sa valeur minimale à la réserve relative r/p . Cela n'est assuré que si le seuil fixé est suffisamment bas ou les nombres d'unités admis suffisamment grands.

9-1-2 - Revenant au continu pour mieux caractériser la "loi de réserve à probabilité d'indisponibilité constante de l'ensemble des unités utiles", nous avons tracé deux jeux de courbes $F = C^t$ correspondant à diverses valeurs de F :

- l'un, G3, en coordonnées (p, ρ) ,
- l'autre, G4, en coordonnées (p, r) ,

l'un et l'autre en échelles linéaires et s'étendant jusqu'aux environs de $p = 50$, mais pour $f = 0,08^{(a)}$.

9-1-2-1 - Sur le graphique G3, nous avons également représenté en pointillé avec l'indice N la loi de réserve qui découlerait de la loi normale^(b). Ce graphique donne lieu aux observations suivantes :

- lorsque F est petit (cf. par exemple $F = 0,02$), le maximum de ρ est très élevé et se produit pour une petite valeur de p . (ρ) se rapproche rapidement de son asymptote (ρ_N). Donc la loi normale permet une assez bonne appréciation ;

- à mesure que F augmente, le sommet de la courbe descend et s'écarte vers la droite, c'est-à-dire :

d'une part les nombres d'unités donnant lieu à un "classement inversé" gagnent le domaine des nombres moyens ;

d'autre part le classement devient très peu différencié pour les nombres moyens tandis que les écarts se dégradent moins vite pour les petits nombres ;

- lorsque F est grand (cf. par exemple $F = 0,20$), la loi normale, tout à fait fautive pour p petit, ne devient acceptable que pour des valeurs très élevées de p (l'écart avoisine encore 10 % pour $p \approx 50$).

9-1-2-2 - Le graphique G4 n'a d'autre intérêt que de présenter en valeur absolue la loi de réserve homogène $r(p)$ la plus simple que l'on puisse imaginer.

(a) On voudra bien nous excuser de cette discordance avec les 2 graphiques précédents, établis pour $f = 0,10$, mais nous avons hésité à refaire un travail pour nous assez lourd.

(b) Voir formulation correspondante en note de 9-2-1 ci-après.

On sait (colonne 0 du tableau 2-2) que l'abscisse à l'origine d'une courbe (F) se définit par :

$$1 - F = I = (1 - f)^{p_0} = (1 - f)^{n_0},$$

d'où l'on tire :

$$n_0 = p_0 = \frac{\text{Log}(1 - F)}{\text{Log}(1 - f)} \quad (30)$$

En particulier, si $F = f$, $p_0 = 1$. On a ainsi une illustration limite de l'effet de taille signalé en 9-1-1 ci-dessus par l'exemple évident d'une seule unité utile assurant avec une réserve nulle une probabilité de disponibilité égale à la disponibilité individuelle.

9-2 - Section $F = C^{\text{te}}$: effet de disponibilité individuelle

C'est dans une telle section que se situe notre problème schématique n° 2, dont voici un énoncé possible :

ayant encore à constituer un système de production, nous n'excluons plus cette fois de faire appel à des solutions de techniques différentes ou tout au moins conduisant à des hypothèses différentes sur la valeur de f. Nous continuons à nous limiter aux associations homogènes (p, r) respectant la condition de seuil $F_p \leq F$. Mais nous désirons spécialement nous rendre compte dans quelle mesure par exemple la technique la plus sûre (qui est aussi la plus chère) autorise en revanche, toutes autres choses égales :

- une plus faible réserve relative,
- un plus petit nombre d'unités utiles moyennant une taille unitaire plus forte.

9-2-1 - Loi des grands nombres

Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, la loi normale^(a) donne à la limite :

$$\rho'_{\infty} = f \text{ (ou } \rho_{\infty} = f/(1 - f))$$

Avec $\rho' = r/n = 1 - p/n$ et en notant $1 - f = d =$ disponibilité individuelle, nous pouvons donner à cette "loi des grands nombres" la forme plus caractéristique :

$$nd = p \quad (31)$$

En d'autres termes, si nous comparons deux systèmes ayant le même nombre d'unités utiles (supposé très grand) (n_1, p, f_1) et (n_2, p, f_2) , nous

(a) Elle s'écrit en effet :

$$\rho' = r/n = f + \frac{K}{\sqrt{n}} \sqrt{f(1 - f)}$$

avec

$$F = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^K e^{-t^2/2} dt$$

voyons qu'ils offriront un risque égal d'indisponibilité de l'ensemble de ces unités si :

$$n_2 \cdot d_2 = n_1 \cdot d_1 \quad (32)$$

La loi des grands nombres fournit ainsi un point de comparaison intéressant auquel on se réfère intuitivement quand on affirme (traduction immédiate de l'égalité précédente) : "le nombre total d'unités nécessaire pour assurer avec une probabilité donnée la marche d'un nombre donné d'unités est inversement proportionnel à la disponibilité individuelle".

9-2-2 - Loi normale

Moyennant une approximation très acceptable, la loi normale trouve son expression la plus simple sous la forme :

$$nd = \frac{p}{1 - \frac{K(F)}{\sqrt{p}} \sqrt{f}} \quad (33)$$

qui apparaît comme une expression "corrigée" de la loi des grands nombres exprimée sous la forme (31).

Si nous comparons à nouveau deux systèmes (n_1, p, f_1) et (n_2, p, f_2) , avec $f_2 > f_1$ pour fixer les idées, nous voyons cette fois, le second membre de (33) étant fonction croissante de f (et croissant d'autant plus vite que p est plus petit), que

$$n_2 \cdot d_2 > n_1 \cdot d_1 \quad (34)$$

On révisera dès lors comme suit la conclusion de 9-2-1 :

le nombre total d'unités nécessaires pour assurer une probabilité donnée à la disponibilité de l'ensemble d'un nombre donné d'unités croît, lorsque la disponibilité individuelle diminue, plus vite que de façon inversement proportionnelle à cette dernière.

Les démarches précédentes ont mis en évidence le rapport p/nd , que nous désignerons par

$$\varphi = 1 - \frac{K(F)}{\sqrt{p}} \sqrt{f} \quad (35)$$

et que nous appellerons "coefficient de foisonnement de la disponibilité". On peut dire en effet que, par opposition au "disponible réel" de p unités, nd , produit du nombre total d'unités par la disponibilité individuelle, représente le "disponible apparent".

Revenant encore une fois à notre comparaison de systèmes (n_1, p, f_1) et (n_2, p, f_2) , il nous paraîtra dès lors commode, au lieu de remplacer l'égalité (32) par l'inégalité (34), de la maintenir sous la forme

$$n_2 \cdot \varphi_2 \cdot d_2 = n_1 \cdot \varphi_1 \cdot d_1 \quad (32')$$

pour énoncer : le nombre total d'unités nécessaire pour assurer avec une probabilité donnée la marche d'un nombre donné d'unités utiles est inversement proportionnel à la disponibilité individuelle corrigée par son coefficient de foisonnement, énoncé qui aurait évidemment un caractère tautologique si nous n'y ajoutions, en tenant compte des propriétés de l'expression (35) :

le coefficient de foisonnement de la disponibilité d'un système croît avec la disponibilité individuelle et le nombre d'unités utiles. Il tend vers 1 par valeurs inférieures lorsque la disponibilité individuelle tend elle-même vers 1 ou lorsque le nombre d'unités utiles devient très grand.

On peut, plus précisément, caractériser la variation de nd avec d par l'écart logarithmique relatif :

$\sigma = (\Delta n/n + \Delta d/d) / \Delta d/d$, soit, d'après (35) et en assimilant à une différentiation :

$$\sigma = \frac{\Delta \varphi / \Delta f}{\varphi / (1-f)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \frac{1-f}{f} \quad (36)$$

d'où il résulte que, lorsque p diminue, σ croît d'autant plus fortement que f est plus faible.

9-2-3 - Loi exacte

9-2-3-1 - Mis en évidence par la loi normale, le coefficient φ n'en offre pas moins une signification très générale. On observera à son sujet, en revenant momentanément à l'hypothèse de f fixé :

- qu'il s'identifie avec le rapport R de la formule de récurrence par colonne de 7-2-1,

- qu'il permet de décrire comme suit (en style "discret") l'effet de taille analysé en 9-1 :

si l'on diminue le nombre d'unités utiles d'un système tout en continuant à assurer à leur ensemble la même probabilité de disponibilité, il se peut, à condition que cette probabilité ne soit pas trop élevée, que le coefficient de foisonnement de la disponibilité du système passe par un minimum ; il se peut en outre qu'il prenne ensuite des valeurs supérieures à l'unité.

9-2-3-2 - Nous nous appuierons essentiellement sur des exemples numériques.

Sur le graphique G5, établi pour $F = 0,10$, nous avons représenté par une courbe continue, pour chacune des trois valeurs $f = 0,04$, $f = 0,08$, $f = 0,12$:

- la loi de réserve exacte $\rho(p)$,

- la loi de réserve normale $\rho_N(p)$.

On retrouve des tracés dont le graphique G3 a déjà donné l'allure générale (la courbe $f = 0,08$ de G5 n'est d'ailleurs autre que la courbe $F = 0,10$ de G3). Comme on pouvait s'y attendre en conséquence pour une valeur déjà élevée de F , l'approximation de la loi normale est mauvaise en valeur absolue. L'on observe en revanche que l'écart varie peu avec f même pour des valeurs de p relativement petites, de sorte que :

$$\Delta \rho (\Delta f) \sim \Delta \rho_N (\Delta f)$$

Nous nous autoriserons de cette assimilation pour conclure d'une façon générale, des formules (35) et (36), que σ augmente lorsque p diminue, en l'éclairant d'un ordre de grandeur :

par exemple, toujours pour $f = 0,08$ et $F = 0,10$ ($K = 1,282$), on aurait :

$$\varphi = 1 - 0,362/\sqrt{p}$$

de sorte que, pour $p = 3$:

$$\varphi \# 0,79 \quad \text{et} \quad \sigma \# -1,5,$$

$\left| \frac{\Delta n}{n} / \frac{\Delta d}{d} \right|$ dépassant ainsi le double de sa valeur asymptotique.

10 - PROLONGEMENT DES FONCTIONS I_n^r POUR LES VALEURS NEGATIVES DE r .

10-1 - Reprenons schématiquement, en figure 5, le graphique G4 annexé qui a été commenté ci-dessus en 9-1-2. Nous y observons que, pour $n = p + r$ donné, F ne saurait dépasser la valeur F_M , cote de la courbe du faisceau $F = C^{te}$ passant par le point d'intersection (cerclé) de la droite $n = C^{te}$ avec l'axe Op , correspondant à $r = 0$ et telle que $F = 1 - (1 - f)^n$.

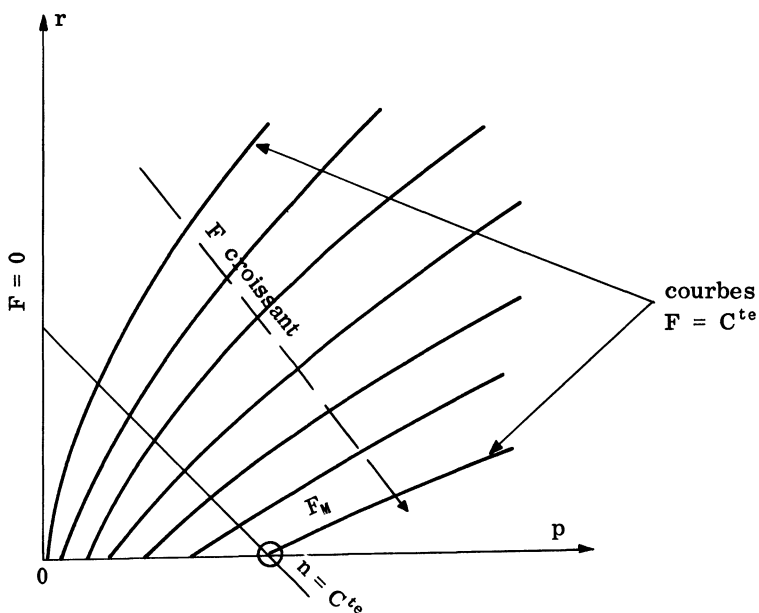


Figure 5

Ainsi l'"interpolation" de la fonction I_n^r (c'est-à-dire sa définition pour tout couple de nombres positifs n et r) à laquelle nous nous sommes particulièrement attachés, ne suffit pas à lui faire prendre, pour n donné, toute

valeur de l'intervalle fermé $[0, 1]$, à priori permise pour une probabilité. Elle appelle manifestement pour r , d'après la figure 5, un complément par "extrapolation" aux nombres négatifs.

Revenons au tableau des I_n^r . La borne 1 (correspondant à la borne 0 de F) y est atteinte tout le long de la diagonale $p = 0$, qui constitue l'une de ses deux frontières. Or pour $p = 0$, la formule de symétrie donnée en 7-1-2, soit :

$$I(f, p, r) + I(1 - f, r, p - 1) = 1,$$

s'écrit :

$$I(f, 0, r) + I(1 - f, r, -1) = 1,$$

et, puisque $I(f, 0, r) = 1$ quel que soit r :

$$I(1 - f, r, -1) = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$I(f', p', -1) = 0 \quad \text{quel que soit } p'.$$

Il suffira donc d'adjoindre au tableau des I_n^r une colonne supplémentaire $r = -1$, tout le long de laquelle la borne 0 sera atteinte. D'ailleurs le seul fait que cette nouvelle frontière verticale du tableau est la "symétrique" de la frontière oblique d'un autre tableau (en $f' = 1 - f$) nous assure de la continuité de l'extrapolation depuis l'ancienne frontière.

Sur la figure 5, cela revient à reconnaître la droite d'ordonnée $r = -1$ comme la courbe $F = 1$ du réseau. La courbe $F = 0$ n'étant, par ailleurs, elle-même autre que la droite d'abscisse $p = 0$, on en infère que le point ω d'intersection de ces deux droites doit être le sommet commun du faisceau des courbes $F = C^{\text{te}}$. Pour le vérifier, posons :

$$r = -1 + \xi \quad \text{et} \quad p = \eta$$

A partir de la formule (13), F prend l'expression :

$$F_p^r = \frac{\Gamma(\xi + n)}{\Gamma(1 + \xi)\Gamma(\eta)} \cdot (1 - f)^\eta \cdot f^\xi \cdot \left[1 + \frac{\xi + \eta}{1 + \xi} f + \dots \right]$$

de sorte que, lorsque ξ et η tendent vers 0 : $F_p^r \sim \eta/(\xi + \eta)$.

Dès lors, sur la figure 6, quand le point $M(p, r)$ représentatif du système tend vers le point ω , sa cote F peut tendre vers toute limite comprise entre 0 et 1 selon la direction de la tangente D en ω à la trajectoire d'approche de ce point. Plus précisément, si m désigne le coefficient angulaire de D :

$$\lim_{M \rightarrow \omega} F = 1/(1 + m)$$

Ainsi prolongé, le faisceau des courbes $F = C^{\text{te}}$, se présente, d'un point de vue formel, de façon beaucoup plus satisfaisante que sur la figure 1 (ou que sur le graphique G4).

Quant au tableau arithmétique des I_n^r , on sera tenté, avant sa présentation définitive, de l'étendre autant que le permet la formule fondamentale de récurrence. Compte tenu de ce qui précède, on obtient la configuration suivante :

		$r =$							
$r =$		-3	-2	-1	0	1	2	3	
	-1			0/1					
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	1	0	0	0	x	1	1	1	
	2	0	0	0	x	x	1	1	
	3	0	0	0	x	x	x	1	

x : valeurs déterminées de l'intervalle $[0,1]$
 0/1 toute valeur " " $[0,1]$

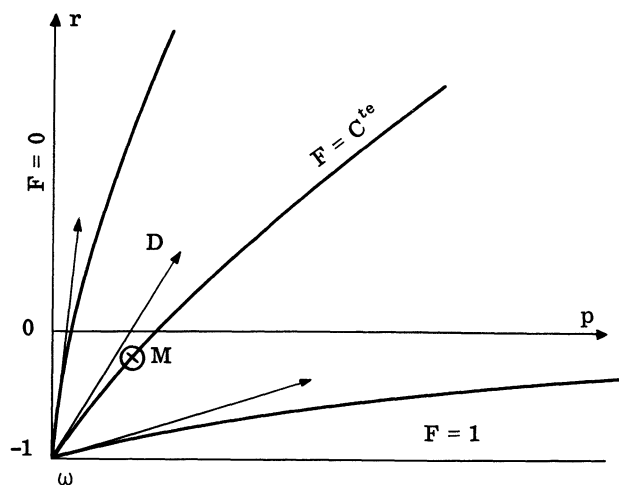
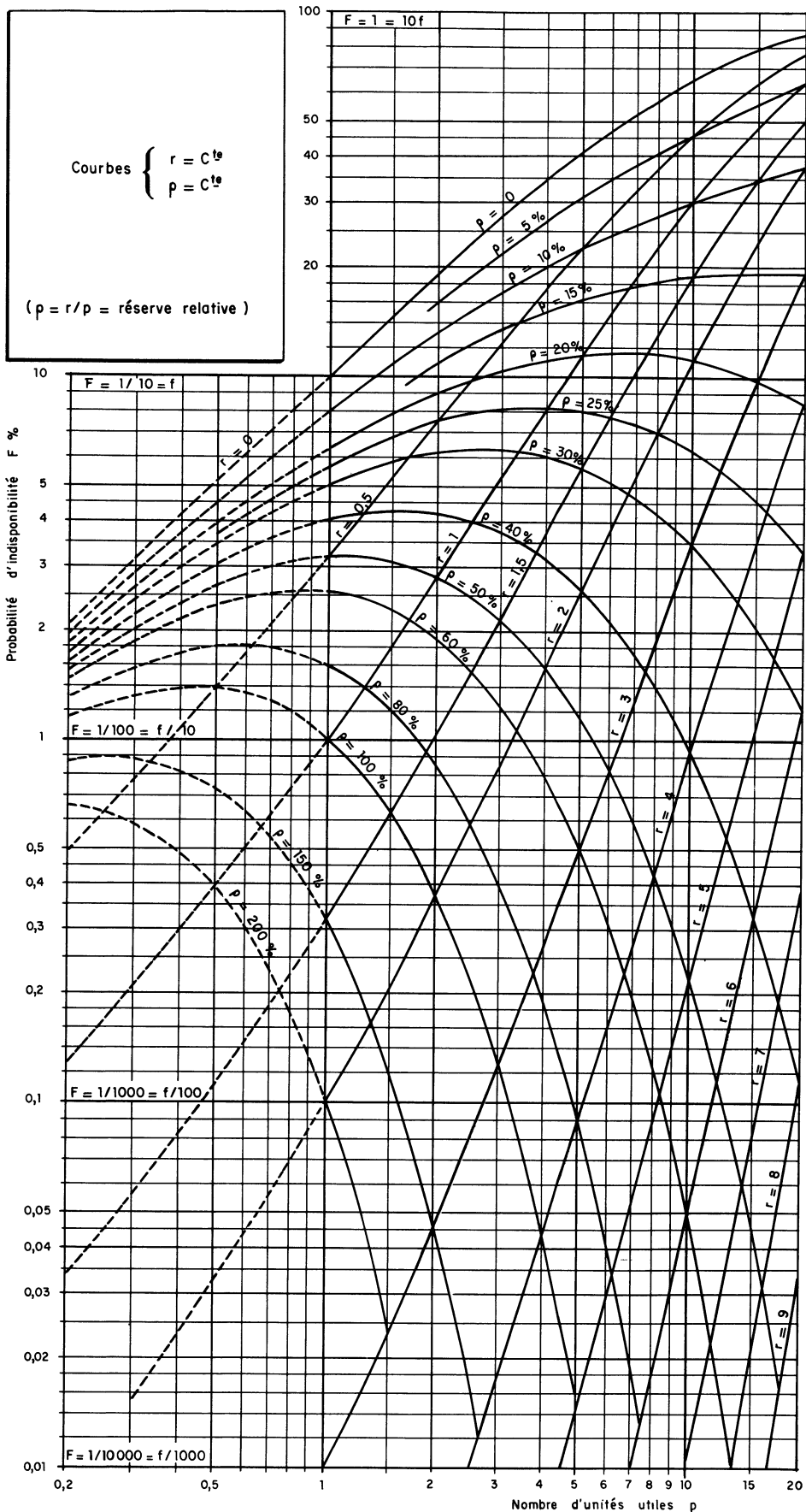


Figure 6

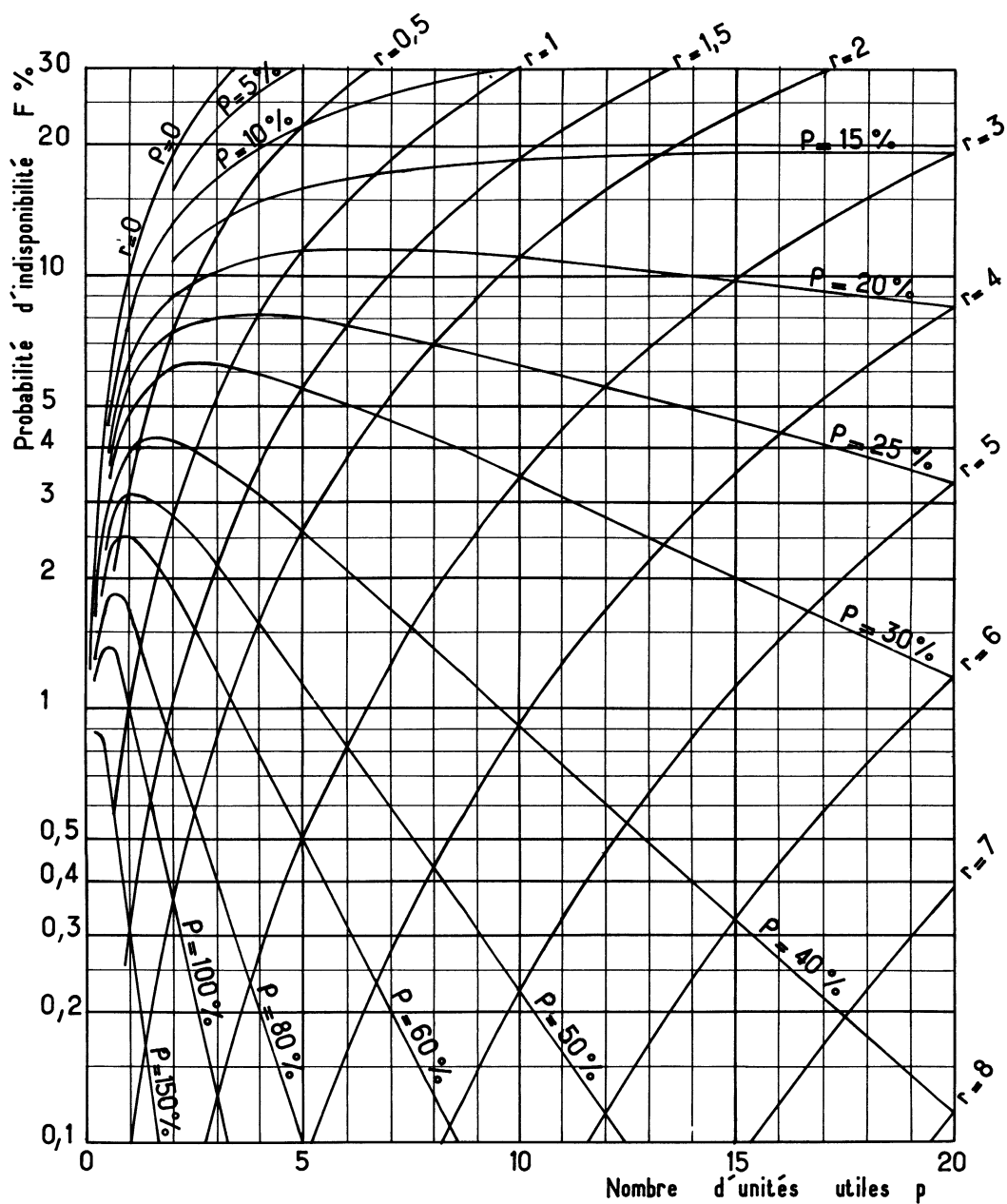
10-2 - Lorsque r n'est pas entier, l'initiation du système (29) peut ainsi être avancée d'un rang, c'est-à-dire le terme initial devenir $K_p^{-1+r_0}$ où r_0 désigne la partie entière de r .

REFERENCES

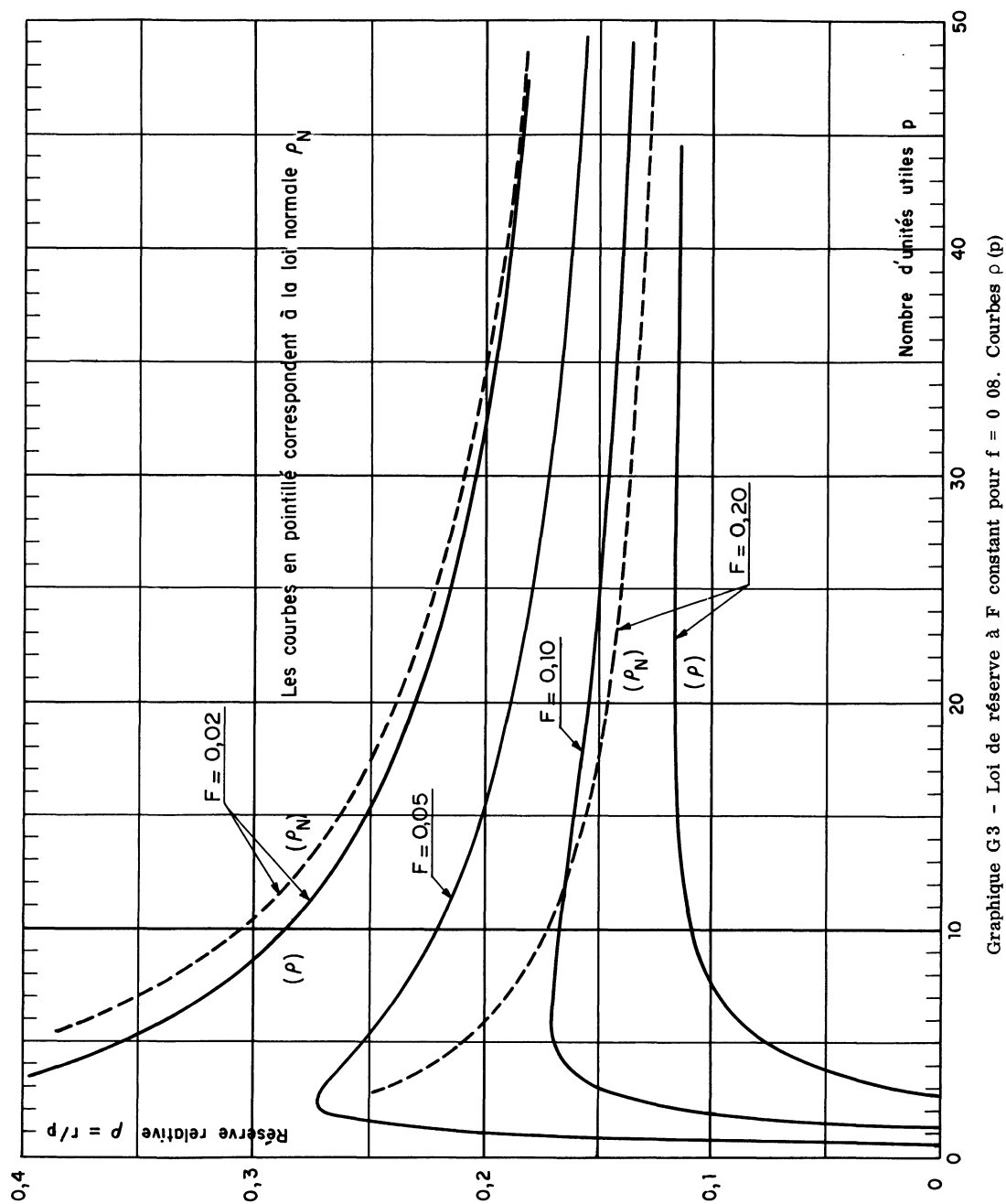
- [1] CNRS - Fonctions de la physique mathématique (fascicule IX du formulaire de mathématiques à l'usage des physiciens et des ingénieurs) CNRS 1957.
- [2] KENDALL M.G. et STUART A. - The advanced theory of Statistics, tome I, Charles Griffin, Londres 1963.
- [3] PEARSON K. - Tables of the incomplete Beta-function, Cambridge 1956.
- [4] PEYRET B.G. - Elements de calcul des probabilités à l'usage des ingénieurs, Eyrolles 1964.
- [5] VALIRON G. - Cours d'analyse mathématique, tome II Equations fonctionnelles, applications, Masson 1950.

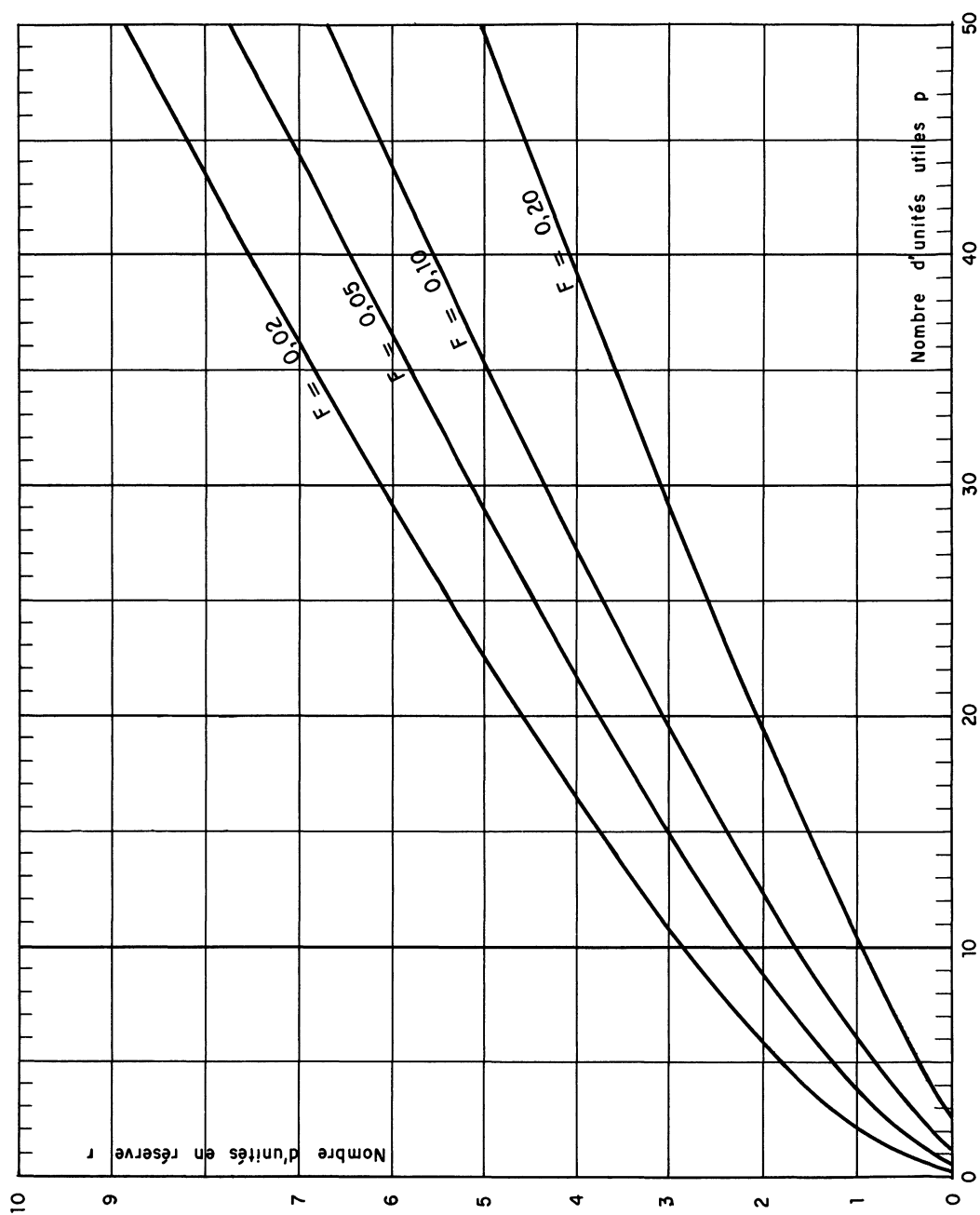


Graphique G1 - Section $f = 0,1$ de l'hypersurface $F(f, p, r)$.



Graphique G2 - Section $f = 0,1$ de l'hypersurface $F(f, p, r)$. (linéaire-log).





Graphique G4 - Loi de réserve à F constant pour $f = 0,08$. Courbes $r(p)$

