

TH. A. MÉTAKIDÈS

Un nouveau schéma d'établissement des polynômes orthogonaux dans le cas général : variable indépendante inégalement espacée et variable dépendante affectée de poids inégaux. Calcul simultané des polynômes simples ajustés et des sommes des carrés dans l'analyse de la variance

Revue de statistique appliquée, tome 16, n° 4 (1968), p. 73-96

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_4_73_0

© Société française de statistique, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN NOUVEAU SCHÉMA D'ÉTABLISSEMENT
DES POLYNOMES ORTHOGONAUX DANS LE CAS GÉNÉRAL :
VARIABLE INDÉPENDANTE INÉGALEMENT ESPACÉE
ET VARIABLE DÉPENDANTE AFFECTÉE DE POIDS INÉGAUX

Calcul simultané des polynomes simples ajustés
et des sommes des carrés dans l'analyse de la variance

Th. A. MÉTAKIDÈS

Ministère de l'Agriculture
Athènes, Gr ce

L'article consiste en la présentation d'un nouveau schéma d'arrangement des calculs nécessaires à l'établissement des polynomes orthogonaux dans le cas général où les niveaux (ou doses) $r = 0, 1, 2, \dots, n$ de la variable indépendante x sont inégalement espacés et les valeurs correspondantes de la variable dépendante y sont affectées de poids w différents.

Deux tables sont annexées, dont l'une contient les formules donnant les valeurs des polynomes orthogonaux, dans le cas général, en fonction explicite des w_r et x_r et l'autre les formules plus simples dans le cas particulier où les x_r sont également espacés, les w_r seulement étant différents, pour $n = 2, 3, 4$ et 5 .

Le calcul successif des coefficients des polynomes simples du premier, deuxième, troisième, etc., degrés, ajustés aux données, d'une manière dérivée de celle proposée par Wishart et Métakidès (1953), est aussi présenté, ainsi que l'obtention simultanée des sommes de carrés des composantes linéaire, quadratique, cubique, etc., dans l'analyse de la variance.

INTRODUCTION

Dans le cas particulier où les valeurs de la variable indépendante x sont également espacées et les valeurs correspondantes de la variable dépendante y sont toutes d'un même poids, le chercheur ou expérimentateur analysant statistiquement ses données est amplement servi. Pour décomposer une somme de carrés dans l'analyse de la variance en ses composantes polynomiales et ajuster une courbe polynomiale aux données, il peut employer les valeurs numériques des polynomes orthogonaux qui

se trouvent, par exemple, dans "Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1, by E.S. Pearson and H.O. Hartley ; Cambridge University Press, 1958", ou bien dans "Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, by R.A. Fisher and F. Yates, Oliver and Boyd ; Edinburgh, 1938 - 1964 (6 th ed.)".

Mais si les x_r sont inégalement espacés et les y_r sont affectés de poids w_r inégaux ($r = 0, 1, 2, \dots, n$), ou bien si l'une seulement de ces situations se présente, ces tables ne sont plus d'aucune aide. Il est besoin d'établir les coefficients des polynômes orthogonaux chaque fois dans chaque cas concret. A cette fin, différentes méthodes ont été proposées par différents auteurs. Bien qu'il n'y ait qu'une seule base mathématique pour toutes ces méthodes (à savoir, l'inversion d'une matrice dont les éléments sont les équivalents des variances et covariances dans le cas formellement analogue de régression multiple), la façon d'arranger l'arithmétique varie. Une discussion de ce sujet ainsi que nombre de références se trouvent dans Wishart et Métakidès (1953). Le schéma proposé par ces auteurs a l'avantage de permettre l'obtention de tout ce dont on pourrait possiblement avoir besoin au cours de l'ajustement d'une courbe polynomiale (y compris les "multiplicateurs de Gauss" utiles pour calculer les variances des coefficients), et cela dans le cadre de la même "routine" tabulaire concise. Une propriété intéressante de ce schéma est que, en même temps que les polynômes orthogonaux sont obtenus, le résultat peut facilement être aussi exprimé en polynôme simple de la forme : $a + bx + cx^2 + \dots$, ce dont nous ferons usage.

Il paraît, ainsi que Grandage (1958) le remarque, que la technique, de Wishart et Métakidès est la seule qui demeure pratiquement employable par un non-mathématicien, quand n est plus grand que 5, on désire aller plus loin que le second degré, en ne disposant que d'une machine à calculer de bureau ordinaire. Dans la notation de ces auteurs (que nous allons suivre dans cet article) et qui est la notation conventionnelle employée en analyse de régression multiple (les indices des b provenant de la convention $x_0 = x^0$, $x_1 = x^1$, $x_2 = x^2$, etc.), les valeurs des polynômes orthogonaux sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\xi_{0,r} &= 1 \\ \xi_{1,r} &= x_r - b_{10} \\ \xi_{2,r} &= x_r^2 - b_{21.0} x_r - b_{20.1} \\ \xi_{3,r} &= x_r^3 - b_{32.01} x_r^2 - b_{31.02} x_r - b_{30.12}\end{aligned}$$

etc.

En vertu des relations :

$$\begin{aligned}b_{20.1} &= b_{20} - b_{10} b_{21.0} \\ b_{30.12} &= b_{30} - b_{10} b_{31.0} - b_{20.1} b_{32.01}, \quad b_{31.02} = b_{31.0} - b_{20.1} b_{32.01}\end{aligned}$$

etc.

les équations précédentes peuvent être réécrites ainsi :

$$\begin{aligned}\xi_{0,r} &= 1 \\ \xi_{1,r} &= x_r - b_{10} \\ \xi_{2,r} &= x_r^2 - b_{21.0} \xi_{1,r} - b_{20} \\ \xi_{3,r} &= x_r^3 - b_{31.0} \xi_{1,r} - b_{32.01} \xi_{2,r} - b_{30}\end{aligned}$$

etc.

c'est-à-dire sous une forme qui est essentiellement la formule récursive proposée par Robson (1959).

On peut noter que dans les expressions ci-dessus :

$$\begin{aligned} b_{10} &= \sum_r w_r x_r / \sum_r w_r \\ b_{20} &= \sum_r w_r x_r^2 / \sum_r w_r & b_{21.0} &= \sum_r w_r x_r^2 \xi_{1.r} / \sum_r w_r x_r \xi_{1.r} \\ b_{30} &= \sum_r w_r x_r^3 / \sum_r w_r & b_{31.0} &= \sum_r w_r x_r^3 \xi_{1.r} / \sum_r w_r x_r \xi_{1.r} & b_{32.01} &= \sum_r w_r x_r^3 \xi_{2.r} / \sum_r w_r x_r^2 \xi_{1.r} \end{aligned}$$

Grandage (1958), tout en attirant l'attention sur la technique de Wishart et Métakidès, présente une méthode qui peut être facilement appliquée quand n ne dépasse pas 3 et les poids sont égaux. La méthode de Grandage est reprise par Dalebroux (1966) et généralisée pour couvrir le cas général où les poids sont aussi inégaux. Elle consiste, sous cette forme généralisée, à résoudre les systèmes d'équations suivants :

Pour le premier degré

$$\sum_r w_r \xi_{1.r} = \sum_r w_r (x_r - b_{10}) = 0$$

D'où on trouve la valeur de b_{10} pour la substituer dans la formule

$$\xi_{1.r} = x_r - b_{10} \text{ et obtenir ainsi les } \xi_{1.r}$$

Pour le second degré, un système de deux équations :

$$\begin{aligned} \sum_r w_r \xi_{2.r} &= \sum_r w_r (x_r^2 - b_{21.0} x_r - b_{20.1}) = 0 \\ \sum_r w_r \xi_{1.r} \xi_{2.r} &= \sum_r w_r (x_r^2 \xi_{1.r} - b_{21.0} x_r \xi_{1.r}) = 0 \end{aligned}$$

D'où on obtient les valeurs de $b_{21.0}$ et $b_{20.1}$ pour les substituer dans la formule

$$\xi_{2.r} = x_r^2 - b_{21.0} x_r - b_{20.1}$$

Pour le troisième degré, un système de trois équations :

$$\begin{aligned} \sum_r w_r \xi_{3.r} &= \sum_r w_r (x_r^3 - b_{32.01} x_r^2 - b_{31.02} x_r - b_{30.12}) = 0 \\ \sum_r w_r \xi_{1.r} \xi_{3.r} &= \sum_r w_r (x_r^3 \xi_{1.r} - b_{32.01} x_r^2 \xi_{1.r} - b_{31.02} x_r \xi_{1.r}) = 0 \\ \sum_r w_r \xi_{2.r} \xi_{3.r} &= \sum_r w_r (x_r^3 \xi_{2.r} - b_{32.01} x_r^2 \xi_{2.r} - b_{31.02} x_r \xi_{2.r}) = 0 \end{aligned}$$

D'où on obtient les valeurs de $b_{32.01}$, $b_{31.02}$ et $b_{30.12}$ pour les substituer dans la formule

$$\xi_{3.r} = x_r^3 - b_{32.01} x_r^2 - b_{31.02} x_r - b_{30.12}$$

et ainsi de suite.

Tant la méthode de Robson que celle de Grandage, pour obtenir des multiples entiers $\xi' = \lambda \xi$, ont été proposées par leurs auteurs pour le cas particulier où les x_r seulement sont inégalement espacés, les poids des y_r étant égaux.

Or, si on les généralise pour couvrir aussi le cas de poids inégaux, leur application en pratique (excepté dans des situations très simples ou $n < 3$ et x_r et w_r très petits) se heurte à la difficulté presque insurmontable de manipuler des fractions ayant pour termes des nombres à plusieurs chiffres, non facilement simplifiables et souvent irréductibles, ce qui a pour conséquence la fatigue et l'accumulation énervante de fautes d'arithmétique.

La même difficulté se présente, quoique à un degré plutôt moindre avec la méthode de Wishart et Métakidès, si on veut l'employer pour obtenir des multiples entiers des valeurs des ξ .

C'est cette constatation qui nous a conduit à formuler une autre technique de calcul, moins pénible et ayant les avantages d'une routine assez simple, avec preuves de l'exactitude des calculs à chaque étape, pour pourvoir aux besoins des expérimentateurs en biologie et en agriculture lorsque les doses d'un traitement vont jusqu'à six. Ceci, bien entendu, quand on tient à obtenir des multiples entiers ξ . Autrement, le schéma de Wishart et Métakidès paraît être le plus commode en application pratique et sans restriction concernant la grandeur en n .

LE SCHEMA DE CALCUL PROPOSE

Ce schéma est basé sur le fait qu'il est aisé de dériver par des substitutions appropriées et un peu de manipulation algébrique, à partir des expressions données ci-dessus (toutes équivalentes d'ailleurs, comme il a été dit au début) pour les ξ , des expressions où ne figurent que les w et les x , les suivantes :

$$\xi_{0,r} = 1$$

$$\xi_{1,r} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=0}^n w_i (x_r - x_i)$$

$$\xi_{2,r} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n w_i w_j (x_r - x_i) (x_r - x_j) (x_j - x_i)^2$$

$$\xi_{3,r} = \frac{1}{\lambda_3} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{h=2}^n w_i w_j w_h (x_r - x_i) (x_r - x_j) (x_r - x_h) (x_j - x_i)^2 (x_h - x_i)^2 (x_h - x_j)^2$$

etc., o=

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^n w_i$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n w_i w_j (x_j - x_i)^2$$

$$\lambda_3 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{h=2}^n w_i w_j w_h (x_j - x_i)^2 (x_h - x_i)^2 (x_h - x_j)^2$$

etc.

Nous présenterons le schéma basé sur les formules précédentes à l'aide d'un exemple avec $n = 5$ qui paraît être la limite pratique, au delà de laquelle l'arithmétique devient trop longue et lourde. Avec $n \leq 4$

la routine proposée est rapide. Dans tous les cas, excepté, peut être, les plus simples, elle paraît beaucoup plus aisée que les autres méthodes citées.

Exemple

Supposons que six doses de la variable x sont appliquées, chacune, à un nombre d'unités expérimentales variant de 3 à 6, et que les résultats sont les suivants :

x_r							w_r	y_r	w_r	y_r
0	29.1	30.0	28.4	31.2	30.5	29.0	178.2	6	29.70	
2	31.6	31.5	29.7	31.0			123.8	4	30.95	
3	33.2	34.4	32.1	33.3	32.8		165.8	5	33.16	
4	35.1	35.3	33.7	35.5	35.4	35.6	210.6	6	35.10	
6	36.9	36.6	36.5	37.4			147.4	4	36.85	
9	30.9	32.7	30.3				93.9	3	31.30	

919,7 28

S_{y0} S_{00}

L'analyse de la variance prend la forme du tableau ci-dessous :

Analyse de la variance

	<u>D. L.</u>		<u>C. M.</u>
Total "non corrigé"	28	30601.63	
"Correction pour la moyenne"	1	30208.8604	
Composantes	Linéaire	1	47.7323
	Quadratique	1	92.9258
	Cubique	1	34.1123
	Quartique	1	1.2428
	Quintique	1	0.0244
Effet total de x	5	176.0376	
Erreur	22	16.7320	0.7605
Total "corrigé"	27	192.7696	

$$S_{yy} - S_{yy.0} = 30208.8604 \quad S_{yy} - S_{yy.0123} = 30383.6308$$

$$S_{yy} - S_{yy.01} = 30256.5927 \quad S_{yy} - S_{yy.01234} = 30384.8736$$

$$S_{yy} - S_{yy.012} = 30349.5185 \quad S_{yy} - S_{yy.12345} = 30384.0980$$

(Ces sommes de carrés cumulatives servent aux preuves des calculs à chaque étape).

La somme de carrés des y_r "non corrigée", avec 6 degrés de liberté (c'est-à-dire la somme des carrés des déviations des y_r de zéro) est :

$$S_{yy} = \sum_r w_r y_r^2 = 30384.898$$

La "correction pour la moyenne " est :

$$S_{y_0}^2/S_{00} = (\sum_r w_r y_r)^2 / \sum_r w_r = 30208.8604$$

(on peut noter que cette dernière somme des carrés avec 1 d.l. peut être considérée comme la contribution de la composante de degré zéro).

D'où la somme de carrés des y_r "corrigée" (c'est-à-dire la somme des carrés des déviations des y_r de leur moyenne), afférente à l'effet total de x , est :

$$30384.898 - 30208.8604 = 176.0376$$

L'expression $S_{y_0}^2/S_{00}$ peut être écrite :

$$b_{y_0} S_{y_0}, \text{ où } b_{y_0} = S_{y_0} / S_{y_0} = 32.8464257$$

Le polynôme de degré zéro, ajusté aux données, est :

$$\hat{y} = b_{y_0} = 32.846 \text{ (égale } \bar{y} = \text{la moyenne)}$$

Pour compléter l'analyse de la variance, en calculant les sommes de carrés dues aux composantes polynomiales, on procède par étapes, comme suit, au cours desquelles on peut établir en même temps les coefficients des polynômes simples, ajustés aux données, du premier, deuxième, troisième, etc., degrés.

1. Composante linéaire

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	
i	x_{r-i}						w_i	$w_i x_{r-i}$						
	r=0	1	2	3	4	5		r=0	1	2	3	4	5	
0	0	2	3	4	6	9	6	0	12	18	24	36	54	
1	-2	0	1	2	4	7	4	-8	0	4	8	16	28	
2	-3	-1	0	1	3	6	5	-15	-5	0	5	15	30	
3	-4	-2	-1	0	2	5	6	-24	-12	-6	0	12	30	
4	-6	-4	-3	-2	0	3	4	-24	-16	-12	-8	0	12	
5	-9	-7	-6	-5	-3	0	3	-27	-21	-18	-15	-9	0	
$\mu_1 = 14$							28	-98	-42	-14	14	70	154	
							2	-7	-3	-1	1	5	11	
Preuve							λ_1	$\xi'_{1.0}$	$\xi'_{1.1}$	$\xi'_{1.2}$	$\xi'_{1.3}$	$\xi'_{1.4}$	$\xi'_{1.5}$	
$\sum_r w_r \xi'_{1.r} = 0$							$w_r x_r$	0	8	15	24	24	27	98
$6 \times (-7) = -42$														

Preuve	
$\sum_r w_r$	$\xi'_{1.r} = 0$
6 × (-7) =	-42
4 × (-3) =	-12
5 × (-1) =	-5
6 × 1 =	6
4 × 5 =	20
3 × 11 =	33

0

- On établit la grille des $x_{r-i} = x_r - x_i$ (colonnes 1 à 6).
- On obtient les colonnes 8 à 13 en multipliant les nombre de colonnes 1 à 6 par le w_i correspondant de la colonne.
- On simplifie les sommes des colonnes 7 à 13, en divisant par leur facteur commun $\mu_1 = 14$.

On obtient ainsi les plus petits multiples entiers $\xi'_{1,r} = \lambda_1 \xi_{1,r}$ ainsi que λ

Posons :

$$S_{y1.0} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_r w_r y_r \xi'_{1,r} = 97.95$$

$$S_{11.0} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_r w_r \xi_{1,r}^2 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_r w_r x_r \xi'_{1,r} = 201$$

$$b_{y1.0} = S_{y1.0}/S_{11.0} = 0.487313343283$$

La contribution de la composante linéaire à la somme de carrés est :

$$S_{y1.0}^2/S_{11.0} = b_{y1.0} S_{y1.0} = 0.4873134328 \times 97.95 = 47.7323$$

Pour obtenir le polynôme du premier degré, ajusté aux données, il faut encore calculer :

$$S_{10} = \sum_r w_r x_r = 98 \quad .$$

$$b_{10} = S_{10}/S_{00} = 3.5$$

$$b_{y0} = 32.84642857$$

$$-b_{10} b_{y1.0} = -1.70559701$$

$$b_{y0.1} = 31.14083156$$

Le polynôme est :

$$y = b_{y0.1} + b_{y1.0} x = 31.141 + 0.487313x$$

Preuve : Nous pouvons vérifier l'exactitude de tous les calculs jusqu'à ce point, en observant que

$$b_{y0.1} S_{y0} + b_{y1.0} S_{y1} = S_{yy} - S_{yy.01} = 30256.5927$$

En effet, $S_{y1} = \sum_r w_r x_r y_r$ étant égal à 3316.9, nous avons :

$$b_{y0.1} S_{y0} = 31.14083156 \times 919.7 = 28640.22279$$

$$+ b_{y1.0} S_{y1} = 0.487313433 \times 3316.9 = 1616.36993$$

$$30256.59272$$

2. Composante quadratique

	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
	$x_{r-i} \quad x_{r-i}^2 \quad x_{r-j}$					$w_j \quad x \quad w \quad x_{i-j-i}^2$	$w_i \quad w_j \quad x_{j-i}^2 \quad x_{r-i} \quad x_{r-j} \quad (x \ 1/2)$						
	r=0	1	2	3	4	5		r=0	1	2	3	4	5
0 1	0	0	3	8	24	63	4 × 24 = 96	0	0	144	384	1 152	3 024
0 2	0	-2	0	4	18	54	5 × 54 = 270	0	-270	0	540	2 430	7 290
0 3	0	-4	-3	0	12	45	6 × 96 = 576	0	-1 152	-864	0	3 456	12 960
0 4	0	-8	-9	-8	0	27	4 × 216 = 864	0	-3 456	-3 888	-3 456	0	11 664
0 5	0	-14	-18	-20	-18	0	3 × 486 = 1 458	0	-10 206	-13 122	-14 580	-13 122	0
1 2	6	0	0	2	12	42	5 × 4 = 20	60	0	0	20	120	420
1 3	8	0	-1	0	8	35	6 × 16 = 96	384	0	-48	0	384	1 680
1 4	12	0	-3	-4	0	21	4 × 64 = 256	1 536	0	-384	-512	0	2 688
1 5	18	0	-6	-10	-12	0	3 × 196 = 588	5 292	0	-1 764	-2 940	-3 528	0
2 3	12	2	0	0	6	30	6 × 5 = 30	180	30	0	0	90	450
2 4	18	4	0	-2	0	18	4 × 45 = 180	1 620	360	0	-180	0	1 620
2 5	27	7	0	-5	-9	0	3 × 180 = 540	7 290	1 890	0	-1 650	-2 430	0
3 4	24	8	3	0	0	15	4 × 24 = 96	1 152	384	144	0	0	720
3 5	36	14	6	0	-6	0	3 × 150 = 450	8 100	3 150	1 350	0	-1 350	0
4 5	54	28	18	10	0	0	3 × 36 = 108	2 916	1 512	972	540	0	0
	$\mu_2 = 6$						5 628	28 530	-7 758	-17 460	-21 534	-12 798	42 516
							469	4 755	-1 293	-2 910	-3 589	-2 133	7 086
$\lambda_2 \quad \xi'_{2,0} \quad \xi'_{2,1} \quad \xi'_{2,2} \quad \xi'_{2,3} \quad \xi'_{2,4} \quad \xi'_{2,5}$													
$w_t \quad x_t^2$								0	16	45	96	144	243
S_{20}													
													544

Preuve			
$\sum_r w_r \xi'_{2,r} (\xi'_{1,r} + 1) = 0$			
6	$\times$	4755	$\times (-7 + 1) = -171\,180$
4	$\times$	(-1 293)	$\times (-3 + 1) = 10\,344$
5	$\times$	(-2 910)	$\times (-1 + 1) = 0$
6	$\times$	(-3 589)	$\times (1 + 1) = -43\,068$
4	$\times$	(-2 133)	$\times (5 + 1) = -51\,192$
3	$\times$	7086	$\times (11 + 1) = 255\,096$

0

- Les colonnes 14 à 19 sont obtenues en multipliant deux à deux, dans l'ordre indiqué par les indices i et j, les nombres des colonnes 1 à 6.

- La colonne 20 est obtenue en multipliant les w_j par les produits des nombres correspondants se trouvant dans les parties délimitées par un trait pointillé des grilles des x_{r-1} (colonnes 2 à 6) et $w_i x_{r-1}$ (colonnes 9 à 13) : $2 \times 12 = 24$, $3 \times 18 = 54$, ..., $1 \times 4 = 4$, ..., $1 \times 5 = 5$, etc.

Ou bien elle peut être obtenue directement, en multipliant deux à deux les nombres symétriques par rapport à la diagonale de la grille des $w_i x_{r-1}$ (colonnes 8 à 13), en ignorant le signe négatif, ainsi : $-8 \times 12 = 96$, $-15 \times 18 = 270$, ..., $-5 \times 4 = 20$, ..., $-6 \times 5 = 30$, ..., $-8 \times 12 = 96$, ..., $-9 \times 12 = 108$.

Preuve : A ce point il y a lieu de vérifier que la somme de la colonne 20 est égale à : $\mu_1 \lambda_1 S_{11,0}$. En effet $5\,628 = 14 \times 2 \times 201$. Il y a intérêt à éliminer tout facteur commun dans les nombres de la colonne 20 pour alléger l'arithmétique ; ici le facteur commun est 2.

- Les colonnes 21 à 26 s'obtiennent, comme auparavant, par multiplication des colonnes 14 à 19 par la colonne 20. Les sommes des colonnes 20 à 26 sont divisées par leur facteur commun $\mu_2 = 6$. On a ainsi λ_2 et les $\xi'_{2,r}$.

Posons :

$$S_{y2.01} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_r w_r y_r \xi'_{2,r} = -200082,6/469 = -426,61535$$

$$S_{22.01} = \frac{1}{\lambda_2^2} \sum_r w_r \xi_{2,r}^{2'} = \frac{1}{\lambda_2^2} \sum_r w_r x_r^2 \xi'_{2,r} = 918564/469$$

$$b_{y2.01} = S_{y2.01}/S_{22.01} = -0,21782107724$$

La contribution à la somme de carrés de la composante du second degré est :

$$S_{y2.01}^2/S_{22.01} = b_{y2.01} S_{y2.01} = (-0,21782108)(-426,61535) = 92,9258$$

Calculons encore :

$$S_{20} = \sum_r w_r x_r^2 = 544$$

$$S_{21.0} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_r w_r x_r^2 \xi'_{1.r} = 1\,698$$

$$b_{y1.0} = 0.48731343283$$

$$b_{21.0} = S_{21.0}/S_{11.0} = 8.447761193$$

$$-b_{21.0} b_{y2.01} = +1.84010044333$$

$$b_{y1.02} = 2.32741387616$$

$$b_{20} = S_{20}/S_{00} = 19.42857143$$

$$-b_{10} b_{21.0} = -29.56716418$$

$$b_{y0.1} = 31.14083156$$

$$b_{20.1} = -10.13859275$$

$$-b_{20.1} b_{y2.01} = -2.20839919$$

$$b_{y0.12} = 28.93243237$$

Le polynome du second degré, ajusté aux données, est :

$$y = b_{y0.12} + b_{y1.02} x + b_{y2.01} x^2 = 28.932 + 2.32741x - 0.21782108x^2$$

Preuve : L'exactitude de tous les calculs jusqu'à ce point est prouvée si :

$$b_{y0.12} S_{y0} + b_{y1.02} S_{y1} + b_{y2.01} S_{y2} \text{ (où } S_{y2} = \sum_r w_r x_r^2 y_r = 18269.3) \text{ égale}$$

$$S_{yy} - S_{yy.012} = 30349.5185$$

En effet :

$$\begin{aligned} b_{y0.12} S_{y0} &= 28.93243237 \times 919.7 = 26609.15805 \\ +b_{y1.02} S_{y1} &= 2.32741376 \times 3316.9 = 7719.79909 \\ +b_{y2.01} S_{y2} &= -0.217821077 \times 18269.3 = -3979.43860 \\ \hline &30349.51854 \end{aligned}$$

3. Composante cubique

- Les colonnes 27 à 32 s'obtiennent en multipliant trois à trois, dans l'ordre indiqué par les indices i, j, et h, les nombres des colonnes 1 à 6.

- La colonne 33 provient de la multiplication des w_h par les produits des nombres correspondants se trouvant dans les parties délimitées par un trait pointillé des grilles des $x_{r-i} x_{r-j}$ (colonnes 14 à 19) et $w_i w_j x_{r-i} x_{r-j} x_{j-1}^2$ (colonnes 21 à 26) : $3 \times 144 = 432$, $8 \times 384 = 3\,072$, ..., $2 \times 20 = 40$, ..., $6 \times 90 = 540$, ..., $15 \times 720 = 10\,800$. Cette colonne est simplifiée en divisant par le facteur comme 12.

Preuve : On vérifie que la somme de la colonne 33 est égale à :

$$\mu_2 \lambda_2 S_{22.01}$$

3. Composante cubique

		(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	
i	j	h	$x_{r-1} x_{r-j} x_{r-h}$				$w_h \times w_i w_j x_{j-1}^2 x_{i-1}^2 x_{h-1}^2$	$w_i w_j w_h x_j^2 x_i^2 x_h^2$	$r=0$	$w_i w_j w_h x_{j-1}^2 x_{i-1}^2 x_{h-1}^2$	$x_{r-1} x_{r-j} x_{r-h} (x \ 1/24)$				
		$r=0$	1	2	3	4	5								
0	1	2	0	0	0	8	72	378	0	0	0	1440	12960	68040	
0	1	3	0	0	-3	0	48	315	0	0	-4608	0	73728	483840	
0	1	4	0	0	-9	-16	0	189	0	0	-82944	-147456	0	1741824	
0	1	5	0	0	-18	-40	-72	0	0	0	-857304	-1905120	-3429216	0	
0	2	3	0	4	0	0	36	270	0	4320	0	0	38880	291600	
0	2	4	0	8	0	-8	0	162	0	116640	0	-116640	0	2361960	
0	2	5	0	14	0	-20	-54	0	0	1377810	0	-1968300	-5314410	0	
0	3	4	0	16	0	0	0	135	0	221184	124416	0	0	1866240	
0	3	5	0	28	18	0	-36	0	0	4082400	2624400	0	-5248800	0	
0	4	5	0	56	54	40	0	0	0	4408992	4251528	3149280	0	0	
1	2	3	-24	0	0	0	24	210	-480	0	0	0	480	4200	
1	2	4	-36	0	0	-4	0	126	-17280	0	0	-1920	0	60480	
1	2	5	-54	0	0	-10	-36	0	-238140	0	0	-44100	-158760	0	
1	3	4	-48	0	3	0	0	105	-49152	0	3072	0	0	107520	
1	3	5	-72	0	6	0	-24	0	-1058400	0	88200	0	-352800	0	
1	4	5	-108	0	18	20	0	0	-1524096	0	254016	282240	0	0	
2	3	4	-72	-8	0	0	0	90	-12960	-1440	0	0	0	16200	
2	3	5	-108	-14	0	0	-18	0	-364500	-47250	0	0	-60750	0	
2	4	5	-162	-28	0	10	0	0	-1180980	-204120	0	72900	0	0	
3	4	5	-216	-56	-18	0	0	0	-583200	-151200	-48600	0	0	0	
								λ_3	$\xi'_{3,0}$	$\xi'_{3,1}$	$\xi'_{3,2}$	$\xi'_{3,3}$	$\xi'_{3,4}$	$\xi'_{3,5}$	
								λ_3	0	32	135	384	864	2187	3602
								$\sum w \xi'_n (\xi'_n + \xi'_{n+1} + 1) = 0$							

		Preuve
$\sum_r w_r \xi'_{3,r} (\xi'_{2,r} + \xi'_{1,r} + 1) = 0$		
$6 \times (-419099) \times (4755 - 7 + 1)$		$= -11941806906$
$4 \times 817278 \times (-1293 - 3 + 1)$		$= -4233500040$
$5 \times 529348 \times (-2910 - 1 + 1)$		$= -7702013400$
$6 \times (-56473) \times (-3589 \times 1 + 1)$		$= 1215411906$
$4 \times (-1203224) \times (-2133 + 5 + 1)$		$= 10237029792$
$3 \times 583492 \times (7086 + 11 + 1)$		$= 12424878648$

0

S_{30}

En effet :

$$5511384 = 6 \times 469 \times 918564/469$$

- Les colonnes 43 à 39 résultent de la multiplication des nombres correspondants des colonnes 27 à 32 par ceux de la colonne 33. Les sommes des colonnes 33 à 39, divisées par leur facteur commun $\mu_3 = 12$, donnent λ_3 et les $\xi'_{3,r}$.

Posons :

$$S_{y3.012} = \frac{1}{\lambda_3^2} \sum_r w_r y_r \xi'_{3,r} = -20197059.6/(76547/2) = 527.70349$$

$$S_{33.012} = \frac{1}{\lambda_3} \sum_r w_r \xi_{3,r}^2 = \frac{1}{\lambda_3} \sum_r w_r x_r^3 \xi'_{3,r} = 312440712/(76547/2)$$

$$b_{y3.012} = S_{y3.012}/S_{33.012} = -0.064642854866$$

La contribution à la somme de carrés de la composante du troisième degré est :

$$S_{y3.012}^2/S_{33.012} = b_{y3.012} S_{y3.012} = (-0.064642855) (-527.70349) = 34.1123$$

Calculons encore :

$$S_{30} = \sum_r w_r x_r^3 = 3602$$

$$S_{31.0} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_r w_r x_r^3 \xi'_{1,r} = 14265$$

$$S_{32.01} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_r w_r x_r^3 \xi'_{2,r} = 11841768/469$$

$$b_{32.01} = S_{32.01}/S_{22.01} = 12.891609077$$

$$b_{y2.01} = -0.21782107724$$

$$-b_{32.01} b_{y3.012} = +0.83335041457$$

$$b_{y2.013} = 0.61552933733$$

$$b_{31.0} = S_{31.0}/S_{11.0} = 70.970149254$$

$$-b_{20.1} b_{32.01} = -108.905234876$$

$$b_{y1.02} = 2.32741387616$$

$$b_{31.02} = -37.935085622$$

$$-b_{31.02} b_{y3.012} = -2.45223223423$$

$$b_{y1.023} = -0.12481835807$$

$$b_{30} = S_{30}/S_{00} = 128.64285714$$

$$-b_{10} b_{31.0} = -248.39552239$$

$$-b_{20.1} b_{32.01} = +130.70277432$$

$$b_{30.12} = 10.95010907$$

$$b_{y0.12} = 28.93243237$$

$$-b_{30.12} b_{y3.012} = +0.70784631$$

$$b_{y0.123} = 29.64027868$$

Le polynôme du troisième degré, ajusté aux données est :

$$\begin{aligned} y &= b_{y0.123} + b_{y1.023} x + b_{y2.013} x^2 + b_{y3.012} x^3 \\ &= 29.640 - 0.124818x + 0.615529 x^2 - 0.064642855 x^3 \end{aligned}$$

Preuve : comme précédemment, on calcule

$$S_{y_3} = \sum_r w_r x_r^3 y_r = 119236.9$$

et on vérifie que

$$\begin{aligned} & b_{y_0.123} S_{y_0} + b_{y_1.023} S_{y_1} + b_{y_2.013} S_{y_2} + b_{y_3.012} S_{y_3} \\ \text{égale : } S_{yy} - S_{yy.0123} &= 30383.6308 \\ & b_{y_0.123} S_{y_0} = 29.6402787 \times 919.7 = 27260.16432 \\ & + b_{y_1.023} S_{y_1} = -0.124818358 \times 3316.9 = -414.01001 \\ & + b_{y_2.013} S_{y_2} = 0.615529337 \times 18269.3 = 11245.29012 \\ & + b_{y_3.012} S_{y_3} = -0.0646428549 \times 119236.9 = -7707.81369 \\ & \underline{\hspace{10em}} \\ & 30383.63080 \end{aligned}$$

4. Composante quartique

- On remplit les colonnes 40 à 45 en multipliant quatre à quatre les nombres de la grille des x_{r-1} (colonnes 1 à 6), dans l'ordre indiqué par les indices i, j, h, k . Ou bien ce qui est plus facile, en multipliant les nombres adéquats des colonnes 14 à 19, en consultant les indices par paires, ainsi : $(12) \times (34) : 6 \times 24 = 144, \dots, (02) \times (34) : -2 \times 8 = -16, \dots, (01) \times (34) : 3 \times 3 = 9$, etc.

- La colonne 46 est constituée en multipliant les w_k par les produits des nombres correspondants se trouvant dans les parties délimitées par un trait pointillé des colonnes 30 à 32 et des colonnes 37 à 39.

Preuve : La somme de la colonne est égale à $\mu_3 \lambda_3 S_{33.012}$. En effet $3749288544 = 12 \times (76547/2) \times 312440712 / (76547/2)$. On divise par le facteur commun ici : 144

- Les colonnes 47 à 52 résultent de la multiplication des colonnes 40 à 45 par la colonne 46. Les sommes des colonnes 46 à 52, divisées par leur facteur commun $\mu_4 = 72$, donnent λ_4 et les $\xi'_{4,r}$.

Posons :

$$\begin{aligned} S_{y_4.0123} &= \frac{1}{\lambda_4} \sum_r w_r y_r \xi'_{4,r} = 52731033.6 / (13018363/36) = 145.818427 \\ S_{44.0123} &= \frac{1}{\lambda_4} \sum_r w_r \xi_{4,r}^2 = \frac{1}{\lambda_4} \sum_r w_r x_r \xi'_{4,r} = 6186831840 / (13018363/36) \\ b_{y_4.0123} &= S_{y_4.0123} / S_{44.0123} = 0.0085231076 \end{aligned}$$

La Somme de carrés due à la composante du quatrième degré est :

$$S_{y_4.0123}^2 / S_{44.0123} = b_{y_4.0123} S_{y_4.0123} = 0.0085231076 \times 145.818427 = 1.2428$$

Le calcul du polynome du quatrième degré, ajusté aux données, se fait comme suit :

$$S_{40} = \sum_r w_r x_r^4 = 26872$$

$$S_{41.0} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_r w_r x_r^4 \xi_{1.r}' = 121686$$

$$S_{42.01} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_r w_r x_r^4 \xi_{2.r}' = 121642260/469$$

$$S_{43.012} = \frac{1}{\lambda_3} \sum_r w_r x_r^4 \xi_{3.r}' = 5427309024/(76547/2)$$

$$b_{43.012} = S_{43.012}/S_{33.012} = 17.37068447$$

$$b_{y3.012} = -0.06464285487$$

$$-b_{43.012} b_{y4.0123} = -0.14805221282$$

$$b_{y3.0124} = -0.21269506769$$

$$b_{42.01} = S_{42.01}/S_{22.01} = 132.426548$$

$$-b_{32.01} b_{43.012} = -223.936074$$

$$b_{y2.013} = 0.615529337$$

$$b_{42.013} = -91.509526$$

$$-b_{42.013} b_{y4.0123} = +0.779945537$$

$$b_{y2.014} = 1.395474874$$

$$b_{41.0} = S_{41.0}/S_{11.0} = 605.402985$$

$$-b_{21.0} b_{42.01} = -1118.707853$$

$$-b_{31.02} b_{43.012} = 658.958403$$

$$b_{y1.023} = -0.124818358$$

$$b_{41.023} = 145.653535$$

$$b_{41.023} b_{y4.0123} = -1.241420751$$

$$b_{y1.0234} = -1.366239109$$

$$b_{40} = S_{40}/S_{00} = 959.714285$$

$$-b_{10} b_{41.0} = -2118.910448$$

$$-b_{20.1} b_{42.01} = 1342.618839$$

$$-b_{30.12} b_{43.012} = -190.210890$$

$$b_{y0.123} = 29.64027868$$

$$b_{40.123} = -6.788214$$

$$-b_{40.123} b_{y4.0123} = +0.05785668$$

$$b_{y0.1234} = 29.69813536$$

Le polynome est :

$$y = b_{y0.1234} + b_{y1.0234} x + b_{y2.0134} x^2 + b_{y3.0124} x^3 + b_{y4.0123} x^4$$

$$= 29.698 - 1.3662x + 1.39547x^2 - 0.21269551x^3 + 0.0085331076x^4$$

Preuve : On calcule

$$S_{y4} = \sum_r w_r x_r^4 y_r = 876432.5$$

et on vérifie que

$$S_{yy} - S_{yy.01234} = 30384.8736$$

est égal à la somme de :

$$\begin{array}{rcl}
b_{y0.1234} S_{y0} & = & 29.69813536 \times 919,7 = 27313.37509 \\
+b_{y1.0234} S_{y1} & = & -1.36623911 \times 3316,9 = -4531.67850 \\
+b_{y2.0134} S_{y2} & = & 1.39547487 \times 18269,3 = 25494.34904 \\
+b_{y3.0124} S_{y3} & = & -0.212695068 \times 119236,9 = -25361.10055 \\
+b_{y4.0123} S_{y4} & = & 0.0085231076 \times 876432,5 = \frac{7469.92850}{30384,87358}
\end{array}$$

5. Composante quintique

On pourrait continuer de la même manière pour calculer la composante du cinquième degré. Mais dans la pratique il est bien rare qu'en biologie ou en agriculture on soit intéressé à l'ajustement d'une courbe polynomiale de degré supérieur à 3 à des données expérimentales. Dans l'exemple présent, où le polynôme du cinquième degré est la courbe d'ajustement parfait, comme nous avons calculé déjà les composantes jusqu'au 4ème degré, la somme de carrés attribuable à la composante cubique se trouve par différence.

COMMENTAIRE

Quoique de prime abord la méthode ici présentée peut paraître longue et compliquée, elle ne l'est pas en comparaison avec les autres méthodes. Elle est moins pénible, moins sujette à des fautes d'arithmétique, parcequ'elle est une routine, "automatisée" pour ainsi dire, et sauvegardée par des "vérifications" fréquentes, aussi parcequ'elle permet des simplifications faciles au cours des calculs.

On peut la comparer, sur l'exemple numérique que nous avons utilisé, avec la méthode proposée par Robson (généralisée pour tenir compte des poids inégaux) qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi'_{1,r} &= 2 x_r - 7 \\
\xi'_{2,r} &= 469 x_r^2 - 1981 \xi'_{1,r} - 9112 \\
\xi'_{3,r} &= 71801086 x_r^3 - 2547866895 \xi'_{2,r} - 19736696849 \\
\xi'_{4,r} &= 467366300671109 x_r^4 - 141472476774787487 \xi'_{1,r} - 131965258068365 \xi'_{2,r} \\
&\quad 212117327688 \xi'_{3,r} - 448538115415501466
\end{aligned}$$

Pour les coefficients du premier et du second degré c'est aussi simple que dans notre méthode. Mais dès qu'on passe au troisième degré les nombres à manipuler deviennent très grands pour devenir énormes au quatrième, et dépasser la capacité des machines à calculer de bureau ordinaires. Ceci malgré toutes les simplifications opérées pour arriver aux chiffres ci-dessus, qui ont demandé des efforts et du temps, parceque non immédiatement apparentes.

La situation est similaire sinon plus difficile, car on se trouve rapidement impliqué dans une arithmétique très lourde, si on essaie de résoudre directement les systèmes d'équations de Grandage, généralisés par Dalebroux.

Comme nous l'avons déjà remarqué, toutes ces méthodes, ou plutôt techniques de calcul, sont basées sur la même solution mathématique et, par conséquent, absolument équivalentes. Elles ne diffèrent que par l'arrangement des opérations arithmétiques. Mais c'est ce qui peut être

décisif pour le chercheur non spécialisé au calcul numérique qui désire analyser statistiquement des données expérimentales. Une technique suffisamment maniable peut l'aider à s'affranchir de la limitation d'arranger les niveaux d'un traitement en progression arithmétique et de garder le nombre de répétitions constant pour tous ces niveaux, quand l'une ou l'autre de ces conditions (ou les deux) sont indésirables pour d'autres raisons ou impossibles à réaliser.

TABLES

La Table I présente sous forme générale le schéma de computation dans le cas d'intervalles inégaux entre les x_r et de poids différents. Elle peut être aussi considérée comme contenant les formules donnant les valeurs des ξ' et λ , en fonction explicite des w_r et des différences $x_{r-s} = x_r - x_s$, pour $n = 2, 3, 4$ et 5 . On y trouve, par exemple :

$$\xi'_{2,1} \text{ (quand } n = 3) = -w_0 w_2 x_{2-0}^2 x_{1-0} x_{2-1} - w_0 w_3 x_{3-0}^2 x_{1-0} x_{3-1} + w_2 w_3 x_{3-2}^2 x_{2-1} x_{3-1}$$

$$\lambda_2 \text{ (quand } n = 3) = w_0 w_1 x_{1-0}^2 + w_0 w_2 x_{2-0}^2 + w_1 w_2 x_{2-1}^2 + w_0 w_3 x_{3-0}^2 + w_1 w_3 x_{3-1}^2 + w_2 w_3 x_{3-2}^2$$

Son emploi est facilité si on dresse au préalable (ce qui est vite fait) la grille triangulaire des x_{r-s} ($r > s$; $r = 1, 2, \dots, n$; $s = 0, 1, \dots, n-1$) :

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1-0} & = & & & & & \\ x_{2-0} & = & x_{2-1} & & & & \\ x_{3-0} & = & x_{3-1} & = & x_{3-2} & = & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \\ x_{n-0} & = & x_{n-1} & = & x_{n-2} & = & \dots x_{n-(n-1)} = \end{array}$$

L'usage direct de la table, à l'aide de ces différences, quand $n = 2$ ou 3 , est aisé et même plus rapide que la routine qui vient d'être décrite. Quand $n = 4$, notre avis est qu'il est préférable d'employer le schéma, comme exemplifié, pour établir les $\xi'_{1,r}$, $\xi'_{2,r}$, et $\xi'_{3,r}$, et recourir à la Table I pour les $\xi'_{4,r}$ (et ceci à cause des formules simplifiées qui sont possibles pour les $\xi'_{h,r}$).

La Table II concerne le cas particulier où les intervalles entre les x sont égaux, les poids seulement étant différents. Elle couvre aussi les valeurs de $n = 2, 3, 4$ et 5 . Son usage est simple et rapide, dans tous les cas.

Pour l'autre cas particulier, poids égaux, intervalles seulement inégaux, il suffit de considérer tous les w_r comme égaux à 1, dans la Table I.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- DALEBROUX M.A., (1966) - Analyse de la Variance. Une Méthode Générale d'Etablissement des Coefficients Orthogonaux permettant la Décomposition d'une Somme de Carrés en ses Composantes de Régression Polynomiales. Ann. Amélior. Plantes, 16(3), 263-271.
- GRANDAGE A., (1958) - Orthogonal Coefficients for Unequal Intervals. Biometrics, 14, 287-289.
- ROBSON D.S., (1959) - A Simple Method for Constructing Orthogonal Polynomials when the Independent Variable is Unequally Spaced. Biometrics 15, 187-191.
- WISHART J. and METAKIDES, Th., (1953) - Orthogonal Polynomial Fitting. Biometrika, 40, 361-369.

Table I

Valeurs des polynômes orthogonaux $\xi'_{1,r} = \lambda_1 \xi'_{1,r}$ ($i = 1, 2, \dots, n$ $r = 0, 1, 2, \dots, n$)

Cas général : x_i inégalement espacés, poids w_i inégaux (Notation : $x_{r-s} = x_r - x_s$; $r > s$)

La somme de la colonne λ donne le λ . Les sommes des produits de la colonne λ et des colonnes $r = 0, 1, 2, \dots$ donnent les $\xi' = \lambda \xi$

λ_1	$\xi'_{1,r}$					
	$r=0$					
	0	1	2	3	4	5
w_0	0	x_{1-0}	x_{2-0}	x_{3-0}	x_{4-0}	x_{5-0}
w_1	$-x_{1-0}$	0	x_{2-1}	x_{3-1}	x_{4-1}	x_{5-1}
w_2	$-x_{2-0}$	$-x_{2-1}$	0	x_{3-2}	x_{4-2}	x_{5-2}
w_3	$-x_{3-0}$	$-x_{3-1}$	$-x_{3-2}$	0	x_{4-3}	x_{5-3}
w_4	$-x_{4-0}$	$-x_{4-1}$	$-x_{4-2}$	$-x_{4-3}$	0	x_{5-4}
w_5	$-x_{5-0}$	$-x_{5-1}$	$-x_{5-2}$	$-x_{5-3}$	$-x_{5-4}$	0

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

$n = 5$

λ_2	$\xi'_{2,r}$					
	$r =$					
	0	1	2	3	4	5
(*) $n = 2$	$w_0 w_1 x_{1-0}^2$	0	$x_{2-0} x_{2-1}$	$x_{3-0} x_{3-1}$	$x_{4-0} x_{4-1}$	$x_{5-0} x_{5-1}$
	$w_0 w_2 x_{2-0}^2$	0	$-x_{1-0} x_{2-1}$	$x_{3-0} x_{3-2}$	$x_{4-0} x_{4-2}$	$x_{5-0} x_{5-2}$
	$w_1 w_2 x_{2-1}^2$	$x_{1-0} x_{2-0}$	0	$x_{3-1} x_{3-2}$	$x_{4-1} x_{4-2}$	$x_{5-1} x_{5-2}$
$n = 3$	$w_0 w_3 x_{3-0}^2$	0	$-x_{1-0} x_{3-1}$	$-x_{2-0} x_{3-2}$	0	$x_{4-0} x_{4-3}$
	$w_1 w_3 x_{3-1}^2$	$x_{1-0} x_{3-0}$	0	$-x_{2-1} x_{3-2}$	0	$x_{4-1} x_{4-3}$
	$w_2 w_3 x_{3-2}^2$	$x_{2-0} x_{3-0}$	$x_{2-1} x_{3-1}$	0	$x_{4-2} x_{4-3}$	$x_{5-2} x_{5-3}$
$n = 4$	$w_0 w_4 x_{4-0}^2$	0	$-x_{1-0} x_{4-1}$	$-x_{2-0} x_{4-2}$	$-x_{3-0} x_{4-3}$	$x_{5-0} x_{5-4}$
	$w_1 w_4 x_{4-1}^2$	$x_{1-0} x_{4-0}$	0	$-x_{2-1} x_{4-2}$	$-x_{3-1} x_{4-3}$	$x_{5-1} x_{5-4}$
	$w_2 w_4 x_{4-2}^2$	$x_{2-0} x_{4-0}$	$x_{2-1} x_{4-1}$	0	$-x_{3-2} x_{4-3}$	$x_{5-2} x_{5-4}$
$n = 5$	$w_3 w_4 x_{4-3}^2$	$x_{3-0} x_{4-0}$	$x_{3-1} x_{4-1}$	$x_{3-2} x_{4-2}$	0	$x_{5-3} x_{5-4}$
	$w_0 w_5 x_{5-0}^2$	0	$-x_{1-0} x_{5-1}$	$-x_{2-0} x_{5-2}$	$-x_{3-0} x_{5-3}$	0
	$w_1 w_5 x_{5-1}^2$	$x_{1-0} x_{5-0}$	0	$-x_{2-1} x_{5-2}$	$-x_{3-1} x_{5-3}$	0
$n = 5$	$w_2 w_5 x_{5-2}^2$	$x_{2-0} x_{5-0}$	$x_{2-1} x_{5-1}$	0	$-x_{3-2} x_{5-3}$	0
	$w_3 w_5 x_{5-3}^2$	$x_{3-0} x_{5-0}$	$x_{3-1} x_{5-1}$	$x_{3-2} x_{5-2}$	0	0
	$w_4 w_5 x_{5-4}^2$	$x_{4-0} x_{5-0}$	$x_{4-1} x_{5-1}$	$x_{4-2} x_{5-2}$	$x_{4-3} x_{5-3}$	0

(*) Quand $n = 2$, on peut simplifier par $x_{1-0} x_{2-0} x_{2-1}$, et employer les formules suivantes :

$$\xi'_{2,0} = +w_1 w_2 x_{2-1} \quad \xi'_{2,1} = -w_1 w_2 x_{2-0} \quad \xi'_{2,2} = +w_1 w_2 x_{1-0}$$

$$\lambda_2 = (w_0 w_1 x_{1-0}^2 + w_0 w_2 x_{2-0}^2 + w_1 w_2 x_{2-1}^2) / (x_{1-0} x_{2-0} x_{2-1})$$

Table I (suite)

λ_3		$r=0$					
		0	1	2	3	4	5
(*)	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	$X_{3-0} X_{3-1} X_{3-2}$	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	0	0	0	0	$X_{4-0} X_{4-1} X_{4-2}$	$X_{5-0} X_{5-1} X_{5-2}$
$n = 3$		$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$
$n = 4$		$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$
$n = 5$		$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$	$W_0^2 W_1^2 W_2^2 W_3^2 W_4^2 W_5^2$

(*) Quand $n = 3$, on peut simplifier par le facteur commun $\prod_{s=0, r=1}^{2,3} X_{r-s}$, ce qui donne pour les $\xi'_{3,r}$ les formules :

$$\begin{aligned} \xi'_{3,0} &= -W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 X_{2-1} X_{3-1} X_{3-2} & \xi'_{3,1} &= +W_0 W_2 W_3 W_4 W_5 X_{2-0} X_{3-0} X_{3-2} \\ \xi'_{3,2} &= -W_0 W_1 W_3 W_4 W_5 X_{1-0} X_{2-0} X_{3-1} & \xi'_{3,3} &= +W_0 W_1 W_2 W_4 W_5 X_{1-0} X_{2-0} X_{2-1} \end{aligned}$$

Il faut diviser par ce même facteur la somme de la colonne λ_3 pour avoir le λ_3 correspondant.

Table I (suite)

[illegible]

(*) Quand $n = 4$ une simplification par $\prod_{s=0}^{3,4} x_{r-s}$ est possible

Les $\xi'_{4,r}$ sont donnés par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_{1,0}^{\pm} = +W_1 W_3 W_4 X_2 X_1 X_1 X_2 X_4 X_3 \\ \mathcal{E}_{1,1}^{\pm} = -W_2 W_3 W_4 X_2 X_1 X_3 X_1 X_2 X_4 X_3 \\ \mathcal{E}_{1,2}^{\pm} = -W_0 W_2 W_3 W_4 X_2 X_0 X_3 X_0 X_2 X_4 X_3 \\ \mathcal{E}_{1,3}^{\pm} = +W_0 W_1 W_3 W_4 X_1 X_0 X_3 X_0 X_2 X_1 X_4 X_3 \\ \mathcal{E}_{1,4}^{\pm} = -W_0 W_1 W_2 W_4 X_1 X_0 X_2 X_0 X_1 X_1 X_4 X_2 \\ \mathcal{E}_{1,5}^{\pm} = +W_0 W_1 W_2 W_3 X_1 X_0 X_2 X_0 X_2 X_1 X_3 X_2 \end{array}$$

Il faut aussi diviser par ce même facteur la somme de la colonne λ_i de la table, pour avoir λ_i correspondant.

$$\lambda_5 = \sum_{\mathbf{u}} W_{\mathbf{u}} W_{\mathbf{v}} W_{\mathbf{s}} W_{\mathbf{t}} X_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} X_{\mathbf{u}, \mathbf{w}} X_{\mathbf{t}, \mathbf{w}} X_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} X_{\mathbf{s}, \mathbf{v}} X_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} X_{\mathbf{u}, \mathbf{t}} X_{\mathbf{v}, \mathbf{t}} X_{\mathbf{u}, \mathbf{s}} X_{\mathbf{v}, \mathbf{s}} X_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} / \prod_{\mathbf{r} \in S_0} X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}}^{4.5}$$

Table II

Valeurs des polynômes orthogonaux

Cas particulier : x_r également espacés, poids w_r inégaux ($r=0, 1, 2, \dots, n$)Les $\xi'_i = \lambda_i \xi_i$, ainsi que les λ_i sont obtenus en faisant les sommes des produits des w_r , $w_r w_s$, $w_r w_s w_u$, etc. et des coefficients correspondants de chaque colonne.

$\xi'_{1,r} (*)$									$\xi'_{3,r}$								
r =								λ_1	r =						λ_3		
0 1 2 3 4 5									0 1 2 3 4 5								
n = 2	w_0	0	1	2	3	4	5	1	$w_0 w_1 w_2$	0	0	0	1	4	10	1/6	
	w_1	-1	0	1	2	3	4	1		$w_0 w_1 w_3$	0	0	-3	0	18	60	9/6
	w_2	-2	-1	0	1	2	3	1		$w_0 w_2 w_3$	0	3	0	0	12	45	9/6
n = 3	w_3	-3	-2	-1	0	1	2	1	$w_1 w_2 w_3$	-1	0	0	0	1	4	1/6	
n = 4	w_4	-4	-3	-2	-1	0	1	1	$w_0 w_1 w_4$	0	0	-24	-36	0	120	36/6	
n = 5	w_5	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$w_0 w_2 w_4$	0	32	0	-32	0	160	64/6	
$\xi'_{2,r}$									$\xi'_{3,r}$								
r =								λ_2	r =								λ_3
0 1 2 3 4 5									0 1 2 3 4 5								
n = 2	$w_0 w_1$	0	0	1	3	6	10	1/2	$w_0 w_1 w_5$	0	0	-100	-200	-200	0	100/6	
	$w_0 w_2$	0	-2	0	6	16	30	4/2		$w_0 w_2 w_5$	0	150	0	-225	-300	0	225/6
	$w_1 w_2$	1	0	0	1	3	6	1/2		$w_0 w_3 w_5$	0	300	225	0	-150	0	225/6
n = 3	$w_0 w_3$	0	-9	-9	0	18	45	9/2	$w_0 w_4 w_5$	0	200	200	100	0	0	100/6	
	$w_1 w_3$	6	0	-2	0	6	16	4/2	$w_1 w_2 w_5$	-60	0	0	-24	-36	0	36/6	
	$w_2 w_3$	3	1	0	0	1	3	1/2	$w_1 w_3 w_5$	-160	0	32	0	-32	0	64/6	
n = 4	$w_0 w_4$	0	-24	-32	-24	0	40	16/2	$w_1 w_4 w_5$	-120	0	36	24	0	0	36/6	
	$w_1 w_4$	18	0	-9	-9	0	18	9/2	$w_2 w_3 w_5$	-45	-12	0	0	-3	0	9/6	
	$w_2 w_4$	16	6	0	-2	0	6	4/2	$w_2 w_4 w_5$	-60	-18	0	3	0	0	9/6	
	$w_3 w_4$	6	3	1	0	0	1	1/2	$w_3 w_4 w_5$	-10	-4	-1	0	0	0	1/6	
	$w_0 w_5$	0	-50	-75	-75	-50	0	25/2									
	$w_1 w_5$	40	0	-24	-32	-24	0	16/2									
	$w_2 w_5$	45	18	0	-9	-9	0	9/2									
	$w_3 w_5$	30	16	6	0	-2	0	4/2									
	$w_4 w_5$	10	6	3	1	0	0	1/2									

(*) On peut trouver les valeurs $\xi'_{1,r}$ en calculant $\xi'_{1,0} = -\sum_r r w_r$ et y ajoutant $\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1$, etc. ($\lambda_1 = \sum_r w_r$) (Voir exemple ci-après).

Table II (suite)

		$\xi'_{4,r}$						
		r=						λ_4
		0	1	2	3	4	5	
n = 4	$w_0 w_1 w_2 w_3$	0	0	0	0	1	5	1/24
	$w_0 w_1 w_2 w_4$	0	0	0	-4	0	40	16/24
	$w_0 w_1 w_3 w_4$	0	0	6	0	0	60	36/24
	$w_0 w_2 w_3 w_4$	0	-4	0	0	0	20	16/24
	$w_1 w_2 w_3 w_4$	1	0	0	0	0	1	1/24
	$w_0 w_1 w_2 w_5$	0	0	0	-50	-100	0	100/24
	$w_0 w_1 w_3 w_5$	0	0	100	0	-200	0	400/24
	$w_0 w_1 w_4 w_5$	0	0	200	200	0	0	400/24
	$w_0 w_2 w_3 w_5$	0	-75	0	0	-75	0	225/24
	$w_0 w_2 w_4 w_5$	0	-200	0	100	0	0	400/24
n = 5	$w_0 w_3 w_4 w_5$	0	-100	-50	0	0	0	100/24
	$w_1 w_2 w_3 w_5$	20	0	0	0	-4	0	16/24
	$w_1 w_2 w_4 w_5$	60	0	0	6	0	0	36/24
	$w_1 w_3 w_4 w_5$	40	0	-4	0	0	0	16/24
	$w_2 w_3 w_4 w_5$	5	1	0	0	0	0	1/24

		$\xi'_{5,r}$						
		r=						
		0	1	2	3	4	5	
n = 5	$w_0 w_1 w_2 w_3 w_4$	0	0	0	0	0	1	1/120
	$w_0 w_1 w_2 w_3 w_5$	0	0	0	0	-5	0	25/120
	$w_0 w_1 w_2 w_4 w_5$	0	0	0	10	0	0	100/120
	$w_0 w_1 w_3 w_4 w_5$	0	0	-10	0	0	0	100/120
	$w_0 w_2 w_3 w_4 w_5$	0	5	0	0	0	0	25/120
	$w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$	-1	0	0	0	0	0	1/120

Table II (suite)

Les relations :

$$\lambda_1 = \xi'_{1,r} - \xi'_{1,r-1}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (\xi'_{2,r} - \xi'_{2,r-1} + \xi'_{2,r-2})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} (\xi'_{3,r} - 3\xi'_{3,r-1} + 3\xi'_{3,r-2} - \xi'_{3,r-3})$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{24} (\xi'_{4,r} - 4\xi'_{4,r-1} + 6\xi'_{4,r-2} - 4\xi'_{4,r-3} + \xi'_{4,r-4})$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{120} (\xi'_{5,r} - 5\xi'_{5,r-1} + 10\xi'_{5,r-2} - 10\xi'_{5,r-3} + 5\xi'_{5,r-4} - \xi'_{5,r-5})$$

peuvent servir à vérifier l'exactitude des calculs

Exemple :			
w_r	$-r$	$-rw_r$	
6	0	0	$\xi'_{1,0} = -23$
4	-1	-4	$\xi'_{1,1} = -23 + 18 = -5$
5	-2	-10	$\xi'_{1,2} = -5 + 18 = 13$
3	-3	-9	$\xi'_{1,3} = 13 + 18 = 31$
18		-23	
λ_1		$\xi'_{1,0}$	

$w_0 w_1 = 24$	0	0	24	72	24/2
$w_0 w_2 = 30$	0	-60	0	180	120/2
$w_1 w_2 = 20$	20	0	0	20	20/2
$w_0 w_3 = 18$	0	-162	-162	0	162/2
$w_1 w_3 = 12$	72	0	-24	0	48/2
$w_2 w_3 = 15$	45	15	0	0	15/2
	137	-207	-162	272	389/2
	$\xi'_{2,0}$	$\xi'_{2,1}$	$\xi'_{2,2}$	$\xi'_{2,3}$	λ_2

$w_0 w_1 w_2 = 120$	0	0	0	120	120/6
$w_0 w_1 w_3 = 72$	0	0	-216	0	648/6
$w_0 w_2 w_3 = 90$	0	270	0	0	810/6
$w_1 w_2 w_3 = 60$	-60	0	0	0	60/6
	-60	270	-216	120	1638/6
	-10	45	-36	20	273/6
	$\xi'_{3,0}$	$\xi'_{3,1}$	$\xi'_{3,2}$	$\xi'_{3,3}$	λ_3