

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. CAVÉ

## **Expressions générales concernant la fiabilité de systèmes réparables**

*Revue de statistique appliquée*, tome 16, n° 1 (1968), p. 37-57

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1968\\_\\_16\\_1\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_1_37_0)

© Société française de statistique, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# EXPRESSIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LA FIABILITÉ DE SYSTÈMES RÉPARABLES <sup>(1)</sup>

R. CAVÉ

On considère le cas d'un système constitué par un nombre quelconque  $n$  d'éléments identiques, caractérisés par un taux de défaillance  $\lambda$  (loi exponentielle). Ces éléments sont redondants en ce sens que, pour que le système fonctionne, il faut et il suffit qu'un au moins des éléments fonctionne. (2)

Pour chaque élément, un instant  $t$  étant fixé - instant compté à partir d'une origine où l'élément fonctionne effectivement - on a les définitions et relations classiques suivantes :

- probabilité de défaillance entre  $t$  et  $t + dt$

$$f(t)dt = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

- probabilité de défaillance entre 0 et  $t$

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

- fiabilité pour l'intervalle de temps  $(0, t)$

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

- moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF)

$$m = \int_0^{\infty} t f(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt = \frac{1}{\lambda}$$

Les éléments destinés à servir de "relais" sont supposés ne pas vieillir lorsqu'ils sont en attente, et la fiabilité de leur dispositif de mise en action est supposée égale à 1.

Dans le cadre d'une organisation générale de maintenance, les éléments sont soumis à une vérification périodique, et, s'ils sont en panne, réparés ou échangés ; on suppose, pour chaque élément, un taux de réparation constant, désigné par  $\mu$ . De la sorte, la probabilité qu'un élément donné soit remis en service entre les instants  $t$  et  $t + dt$  - l'élément ne fonctionnant pas à l'instant  $t$  - est  $\mu dt$ . Le paramètre  $\mu$  a la même dimension que le paramètre  $\lambda$  : nombre moyen d'événements par unité de temps. Par exemple  $\mu = 10^{-2}$  heures signifie que pour chaque élément

-----  
(1) Cette étude a bénéficié des compléments apportés par Monsieur A. Vessereau. L'auteur profite de cette occasion pour lui adresser ses remerciements.

(2) Un problème analogue a aussi été étudié par :  
Santosh Kumar & N. K. Malhotra - Behaviour of a complex system having two types of components, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle Vol 9 n° 2 (1967) p. 99/107.

il y a vérification, et éventuellement réparation, en moyenne toutes les 100 heures.

Pour le système on définit :

La fiabilité, ou probabilité de survie entre 0 et t :  $R_s(t) = 1 - F_s(t)$  ; c'est la probabilité que le système ait fonctionné, sans interruption (avec ou sans réparation de certains éléments) de l'instant 0 à l'instant t : il faut donc qu'à aucun moment la totalité des éléments aient été défectueux.

La moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF)

$$m_s = \int_0^{\infty} R_s(t) dt$$

La disponibilité à l'instant t :  $D_s(t)$  (ou disponibilité instantanée) : c'est la probabilité pour que le système fonctionne à l'instant t, sans qu'il soit nécessaire qu'il ait fonctionné pendant toute la durée (0, t). La disponibilité limite ( $t = \infty$ ) sera désignée par  $D_s$ .

On étudiera d'abord le cas élémentaire d'un seul élément réparable, puis le cas de deux éléments (en parallèle ou en relais). On donnera enfin les expressions générales pour un nombre quelconque d'éléments en parallèle ou en relais.

## 1 - CAS D'UN SEUL ELEMENT

Soient à un instant t :

$p_0(t)$  la probabilité que l'élément fonctionne (0 défaillance) avec  $p_0(0) = 1$   
 $p_1(t)$  " " " ne fonctionne pas avec  $p_1(0) = 0$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t)$$

Pour que l'élément fonctionne à l'instant  $t + dt$  - probabilité  $p_0(t + dt)$  - il faut :

- soit qu'il fonctionne à l'instant t, et qu'il n'y ait pas de défaillance entre t et t + dt,
- soit qu'il ne fonctionne pas à l'instant t et qu'il soit remis en service entre t et t + dt.

On a donc :

$$p_0(t + dt) = p_0(t) \cdot (1 - \lambda dt) + (1 - p_0(t)) \mu dt$$

D'où, en divisant par dt, et en faisant tendre dt vers 0 :

$$p_0'(t) + (\lambda + \mu) p_0(t) = \mu$$

équation différentielle dont la solution, obtenue aisément, est

$$p_0(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} (\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t})$$

$p_0(t)$  n'est autre que la disponibilité instantanée de l'élément :

$$D(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} (\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}) \quad (1)$$

La disponibilité limite ( $t = \infty$ ) est :

$$D = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (\text{elle est égale à } 0 \text{ si } \mu = 0) \quad (2)$$

La probabilité de survie, ou fiabilité, est évidemment la même que dans le cas où l'élément n'est pas réparable :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (\text{valeur de } D(t) \text{ pour } \mu = 0) \quad (3)$$

Le MTBF est aussi, comme dans le cas de non réparation :

$$m = \frac{1}{\lambda}$$

## 2 - CAS DE DEUX ELEMENTS

### 2.1 - Généralités

Le système peut avoir  $i = 0, 1$  ou  $2$  éléments défectueux.

Soit  $p_i(t)$  la probabilité à l'instant  $t$  de l'état " $i$  défectueux" :

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1 \quad \forall t$$

avec au moment de la mise en service :

$$p_0(0) = 1 \quad p_1(0) = p_2(0) = 0$$

la disponibilité à l'instant  $t$  est  $D_s(t) = 1 - p_2(t)$ .

On appellera (fig. 1) :

$\lambda_i dt$  la probabilité dans un intervalle de temps  $dt$  de passer de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  (défaillance)

$\mu_i dt$  la probabilité dans un intervalle de temps  $dt$  de passer de l'état  $i$  à l'état  $i - 1$  (réparation).

On établira tout d'abord les expressions générales de la disponibilité, de la probabilité de survie, et du MTBF, en fonction des  $\lambda_i$  et des  $\mu_i$ . On considèrera ensuite les quatre cas suivants :

- 2 éléments en parallèle - réparation simultanée des 2 éléments possible
- " - réparation d'un seul élément possible.
- 1 élément et un relais - réparation simultanée des 2 éléments possible
- " - réparation d'un seul élément possible.

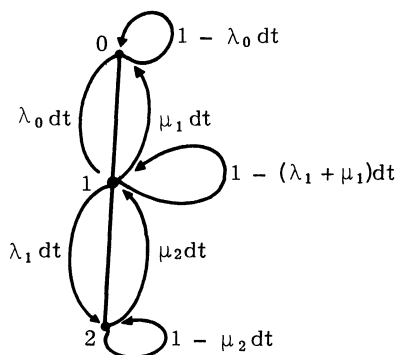


Fig. 1

## 2.2 - Disponibilité instantanée et disponibilité limite

Le graphe de la figure 1 permet de calculer les probabilités d'être dans un état donné à l'instant  $t + dt$ , en fonction des probabilités d'être dans un état quelconque à l'instant  $t$ . En négligeant les probabilités de réalisation du second ordre en  $(dt)^2$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} p_0(t + dt) &= p_0(t) [1 - \lambda_0 dt] + p_1(t) \mu_1 dt \\ p_1(t + dt) &= p_0(t) \lambda_0 dt + p_1(t) [1 - (\lambda_1 + \mu_1) dt] + p_2(t) \mu_2 dt \\ p_2(t + dt) &= p_1(t) \lambda_1 dt + p_2(t) [1 - \mu_2 dt] \end{aligned} \right\} (5)$$

Divisant par  $dt$  et faisant tendre  $dt$  vers zéro, on obtient

$$\left. \begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t) &= \lambda_0 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p_2'(t) &= \lambda_1 p_1(t) - \mu_2 p_2(t) \end{aligned} \right\} (6)$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles - et en particulier pour obtenir  $p_2(t)$  d'où l'on déduira  $D_s(t) = 1 - p_2(t)$ , on utilise la transformée de Laplace-Carson

$$\int_0^{\infty} p(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(s) \quad (7)$$

qui possède en particulier les propriétés suivantes, aisément vérifiables :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(s) &= \frac{a}{s} & \supset & p(t) = a \\ \mathcal{L}(s) &= \frac{a}{s - s_1} & \supset & p(t) = a e^{s_1 t} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$[\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}_1(s) + \mathcal{L}_2(s)] \supset [p(t) = p_1(t) + p_2(t)]$$

On a aussi, en intégrant (7) par parties :

$$\int_0^{\infty} p'(t) e^{-st} dt = s \mathcal{L}(s) - p(0) \quad (9)$$

Multipliant les équations (6) par  $e^{-st}$  et intégrant de 0 à  $\infty$ , on obtient, compte-tenu de  $p_0(0) = 1$  ;  $p_1(0) = p_2(0) = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} s \mathcal{L}_0(s) - 1 &= -\lambda_0 \mathcal{L}_0(s) + \mu_1 \mathcal{L}_1(s) \\ s \mathcal{L}_1(s) &= \lambda_0 \mathcal{L}_0(s) - (\lambda_1 + \mu_1) \mathcal{L}_1(s) + \mu_2 \mathcal{L}_2(s) \\ s \mathcal{L}_2(s) &= \lambda_1 \mathcal{L}_1(s) - \mu_2 \mathcal{L}_2(s) \end{aligned} \right\}$$

D'où les trois équations linéaires en  $\mathcal{L}_0(s)$ ,  $\mathcal{L}_1(s)$ ,  $\mathcal{L}_2(s)$  - correspondant respectivement à  $p_0(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  -

$$\left. \begin{aligned} (s + \lambda_0) \mathcal{L}_0(s) - \mu_1 \mathcal{L}_1(s) &= 1 \\ -\lambda_0 \mathcal{L}_0(s) + (s + \lambda_1 + \mu_1) \mathcal{L}_1(s) - \mu_2 \mathcal{L}_2(s) &= 0 \\ -\lambda_1 \mathcal{L}_1(s) + (s + \mu_2) \mathcal{L}_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On en déduit aisément, après avoir posé :

$$\varphi(s) = s^2 + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) s + \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_0(s) &= \frac{s^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) s + \mu_1 \mu_2}{s \varphi(s)} \\ \mathcal{L}_1(s) &= \frac{\lambda_0 (s + \mu_2)}{s \varphi(s)} \\ \mathcal{L}_2(s) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{s \varphi(s)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

On considère tout d'abord  $\mathcal{L}_2(s)$  afin d'en déduire  $p_2(t)$ , puis la disponibilité  $D_s(t)$

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les deux racines supposées distinctes de l'équation  $\varphi(s) = 0$ , (le cas où elles sont confondues doit être étudié à part), on a  $s_1 + s_2 < 0$  et  $s_1 s_2 > 0$ . Les racines sont donc soit réelles, soit imaginaires conjuguées. Nous les supposons réelles, donc toutes deux négatives. On a :

$$\varphi(s) = (s - s_1) (s - s_2)$$

Appliquant au cas  $n = 2$  la relation générale A.3 figurant en annexe, on a :

$$\mathcal{L}_2(s) = \lambda_0 \lambda_1 \left[ \frac{1}{s_1 s_2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1 (s_1 - s_2)} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 (s_2 - s_1)} \cdot \frac{1}{s - s_2} \right]$$

Utilisant les relations (8), on en déduit :

$$p_2(t) = \lambda_0 \lambda_1 \left[ \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 (s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2 (s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \right]$$

et pour la disponibilité immédiate  $D_s(t) = 1 - p_2(t)$  :

$$D_s(t) = \frac{s_1 s_2 - \lambda_0 \lambda_1}{s_1 s_2} - \lambda_0 \lambda_1 \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} \quad (13)$$

( $s_1$  et  $s_2$  racines de :

$$\varphi(s) = s + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) s + \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 = 0)$$

expression que l'on peut simplifier, en tenant compte de :

$$s_1 s_2 = \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2$$

Par le même procédé, et tenant compte des relations  $A_2$  et  $A_3$  (annexe), on peut calculer  $p_1(t)$  et  $p_0(t)$  à partir de  $\mathcal{L}_1(s)$  et  $\mathcal{L}_0(s)$ .

On a finalement :

$$\left. \begin{aligned} p_2(t) &= \lambda_0 \lambda_1 \left[ \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 (s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2 (s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \right] \\ p_1(t) &= \lambda_0 \left[ \frac{\mu_2}{s_1 s_2} + \frac{s_1 + \mu_2}{s_1 (s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{s_2 + \mu_2}{s_2 (s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \right] \\ p_0(t) &= \frac{\mu_1 \mu_2}{s_1 s_2} + \frac{s_1^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) s_1 + \mu_1 \mu_2}{s_1 (s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{s_2^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) s_2 + \mu_1 \mu_2}{s_2 (s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La disponibilité limite, obtenue en faisant  $t = \infty$  dans l'expression (13) est :

$$D = \frac{\lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2} \quad (15)$$

Cas particulier. Lorsque  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont nuls (pas de réparations), on a :

$$\varphi(s) = s^2 + (\lambda_0 + \lambda_1) s + \lambda_0 \lambda_1$$

dont les racines sont :

$$s_1 = -\lambda_0 \quad s_2 = -\lambda_1$$

On a alors :

$$D(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_0 t} - \lambda_0 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

$D_s(t)$  se confond avec la fiabilité  $R_s(t)$ . Naturellement, pour  $t = \infty$ , on a  $D_s = 0$ .

On remarque que  $D_s(t)$  prend une forme indéterminée si  $\lambda_1 = \lambda_0$ , ce qui est le cas d'un élément suivi d'un relai ( $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda$ , taux de défaillance de chaque élément).

En posant  $\lambda_0 = \lambda$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0 + \varepsilon$ , et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on trouve l'expression classique :

$$D_s(t) = R_s(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$$

On a d'autre part :

$$\left. \begin{aligned} p_2(t) &= 1 - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_0 t} - \lambda_0 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_0} = [1 - e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) \quad \text{si } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda] \\ p_1(t) &= \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} (e^{\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}) = [\lambda t e^{-\lambda t} \quad \text{si } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda] \\ p_0(t) &= e^{-\lambda_0 t} \end{aligned} \right\}$$

### 2.3 - Probabilité de survie - MTBF

La probabilité de survie (fiabilité) de 0 à t est la probabilité de fonctionnement du système sans interruption de 0 à t, c'est-à-dire sans qu'à aucun moment les deux éléments se soient trouvés défectueux.

On adoptera les mêmes notations que précédemment. Cependant, la définition des probabilités  $p_i(t)$  sera différente :  $p_0(t)$  et  $p_1(t)$  désigneront les probabilités, pour le système, d'être à l'instant t dans l'état "0 défectueux" ou "1 défectueux", le système n'ayant jamais cessé de fonctionner de 0 à t (c'est-à-dire qu'à aucun moment les deux éléments ne se sont trouvés simultanément défectueux).

$p_2(t)$  - défini de la même façon est évidemment nul.

$p_2(t + dt)$  est la probabilité, pour le système, d'être, à l'instant t + dt, dans l'état "2 défectueux", alors qu'il n'a pas été défectueux entre 0 et t ; c'est-à-dire d'être défectueux - pour la première fois - dans l'intervalle (t, t + dt). On désignera cette probabilité élémentaire par  $f_s(t) dt$ .

$$p_2(t + dt) = f_s(t) dt$$

La probabilité de défaillance du système entre 0 et t est

$$F_s(t) = \int_0^t f_s(t) dt$$

et la probabilité de survie de 0 à t est :

$$R_s(t) = 1 - F_s(t)$$

Le graphe de la figure (2) - à comparer à celui de la figure 1 permet d'établir le système :

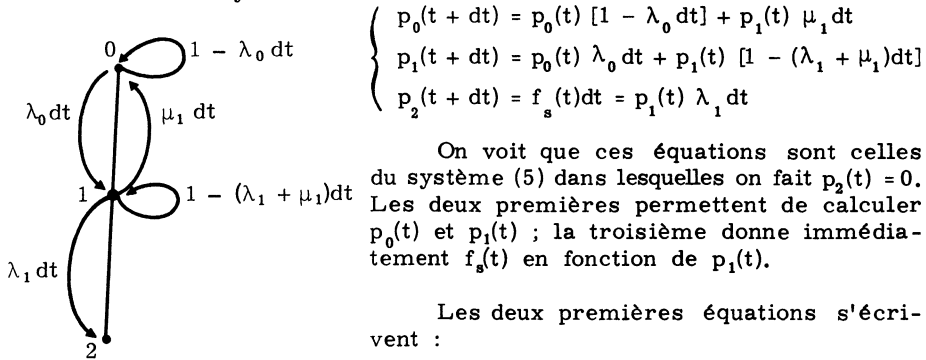


Fig. 2

$$\left\{ \begin{aligned} p_0(t + dt) &= p_0(t) [1 - \lambda_0 dt] + p_1(t) \mu_1 dt \\ p_1(t + dt) &= p_0(t) \lambda_0 dt + p_1(t) [1 - (\lambda_1 + \mu_1) dt] \\ p_2(t + dt) &= f_s(t) dt = p_1(t) \lambda_1 dt \end{aligned} \right.$$

On voit que ces équations sont celles du système (5) dans lesquelles on fait  $p_2(t) = 0$ . Les deux premières permettent de calculer  $p_0(t)$  et  $p_1(t)$  ; la troisième donne immédiatement  $f_s(t)$  en fonction de  $p_1(t)$ .

Les deux premières équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t) &= \lambda_0 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) \end{aligned} \right.$$



Ce sont les deux premières équations du système (6) dans lesquelles on fait  $\mu_2 = 0$ . On en déduit que les transformées de Laplace-Carson  $\mathcal{L}_0(s)$  et  $\mathcal{L}_1(s)$  de  $p_0(t)$  et  $p_1(t)$  satisfont aux deux premières équations du système (10) dans lesquelles on fait  $\mu_2 = 0$ , soit

$$\begin{cases} (s + \lambda_0) \mathcal{L}_0(s) - \mu_1 \mathcal{L}_1(s) = 1 \\ -\lambda_0 \mathcal{L}_0(s) + (s + \lambda_1 + \mu_1) \mathcal{L}_1(s) = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\mathcal{L}_1(s) = \frac{\lambda_0}{\psi(s)}$$

$$\psi(s) = s^2 + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1) s + \lambda_0 \lambda_1 \quad (16)$$

( $\psi(s)$  n'est autre que  $\varphi(s)$  (formule 11) dans laquelle on fait  $\mu_2 = 0$ .)

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les deux racines (réelles et négatives) de l'équation  $\psi(s) = 0$ . Elles sont distinctes si l'on n'a pas à la fois  $\mu_1 = 0$  et  $\lambda_0 = \lambda_1$ , ce que nous supposons. On a (cf. Annexe, formule A.2) :

$$\mathcal{L}_1(s) = \lambda_0 \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{s - s_2} \right]$$

d'où l'on déduit (cf. Formules 8) :

$$p_1(t) = \frac{\lambda_0}{s_1 - s_2} [e^{s_1 t} - e^{s_2 t}]$$

$$f_2(t) = \lambda_1 p_1(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{s_1 - s_2} [e^{s_1 t} - e^{s_2 t}]$$

La probabilité de défaillance de 0 à  $t$  est :

$$F_s(t) = \int_0^t f_s(t) dt = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right]_0^t$$

Compte-tenu de  $s_1 s_2 = \lambda_0 \lambda_1$ , on a :

$$F_s(t) = 1 - \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2}$$

d'où, pour la probabilité de survie  $R_s(t) = 1 - F_s(t)$

$$\boxed{R_s(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (s_1 \text{ et } s_2 \text{ racines de } \psi(s) = s^2 + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1)s + \lambda_0 \lambda_1 = 0)} \quad (17)$$

Le MTBF s'obtient par :

$$m_s = \int_0^\infty R_s(t) dt = - \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}$$

soit, compte tenu de  $s_1 + s_2 = -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1)$   $s_1 s_2 = \lambda_0 \lambda_1$

$$m_s = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1}{\lambda_0 \lambda_1} \quad (18)$$

Cas particuliers. Si  $\mu_1 = 0$  (pas de réparation), on a  $s_1 = -\lambda_0$ ,  $s_2 = -\lambda_1$ ,

$$R_s(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_0 t} - \lambda_0 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

Lorsque  $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda$  (un élément suivi d'un relais), on a, comme il a été montré précédemment :

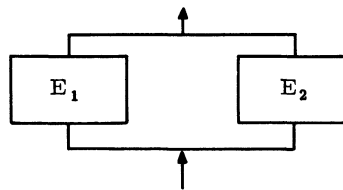
$$R_s(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$$

Pour le MTBF, on trouve :

$$m_s = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}$$

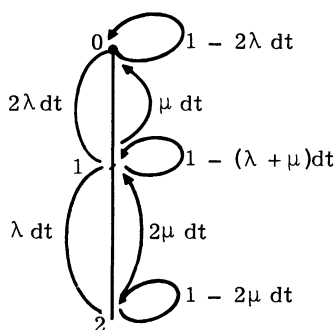
## 2.4 - Applications

### 2.4.1 - Deux éléments en parallèle



#### 2.4.1.1 - Réparations simultanées possibles

On a (cf. graphe de la figure 3)



$$\begin{array}{ll} \lambda_0 = 2\lambda & \mu_1 = \mu \\ \lambda_1 = \lambda & \mu_2 = 2\mu \end{array}$$

Disponibilité. L'équation  $\varphi(s) = 0$  (formule 11) s'écrit ici :

$$\varphi(s) = s^2 + 3(\lambda + \mu)s + 2(\lambda + \mu)^2 = 0$$

Les racines sont :

$$s_1 = -2(\lambda + \mu) \quad s_2 = -(\lambda + \mu)$$

Fig. 3

On a donc pour la disponibilité instantanée (formule 13) :

$$D_s(t) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2 [e^{-2(\lambda + \mu)t} - 2e^{-(\lambda + \mu)t}] \quad (19)$$

et pour disponibilité limite :

$$D_s = 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 \quad (20)$$

Probabilité de survie. L'équation  $\phi(s) = 0$  (formule 16) s'écrit :

$$\phi(s) = s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2} [3\lambda + \mu - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}] \\ s_2 = -\frac{1}{2} [3\lambda + \mu + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}] \end{cases}$$

La probabilité de survie (formule 17) est :

$$R_s(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (21)$$

( $s_1$  et  $s_2$  ayant les valeurs ci-dessus)

Le MTBF (formule 18) est :

$$m = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} \quad (22)$$

Le MTBF de chaque élément étant  $m_e = \frac{1}{\lambda}$ , on peut écrire, en posant  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$m_s = m_e \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2\rho} \right] \quad (23)$$

Cette valeur peut être comparée au MTBF d'un système composé de  $n$  éléments en parallèle sans réparation ; celui-ci est :

$$m'_s = m_e \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

On a  $m_s = m'_s$ , si :

$$\frac{1}{\rho} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

condition qui est approximativement réalisée pour  $\rho = \frac{1}{2}$  ( $\lambda = \mu/2$ ) et  $n = 6$ .

#### 2.4.1.2 - Réparations simultanées impossibles

On a (cf. graphe de la figure 4) :

$$\begin{array}{ll} \lambda_0 = 2\lambda & \mu_1 = \mu \\ \lambda_1 = \lambda & \mu_2 = \mu \end{array}$$

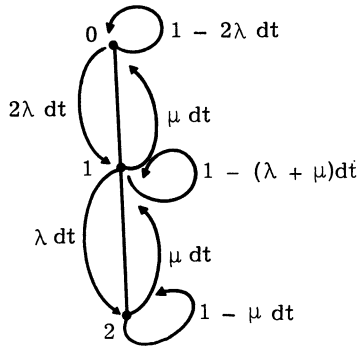


Fig. 4

Disponibilité. L'équation  $\varphi(s) = 0$  (formule 11) s'écrit :

$$s^2 + [3\lambda + 2\mu] s + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2} [3\lambda + 2\mu - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\mu}] \\ s_2 = -\frac{1}{2} [3\lambda + 2\mu + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\mu}] \end{cases}$$

d'où la disponibilité instantanée (formule 13)

$$D_s(t) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2} - 2\lambda^2 \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} \quad (24)$$

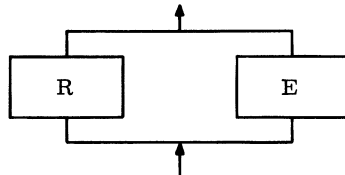
( $s_1$  et  $s_2$  ayant les valeurs ci-dessus)

La disponibilité limite est :

$$D_s = 1 - \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \quad (25)$$

La probabilité de survie et le MTBF sont les mêmes qu'au § 2.4.1.1 (formules 21 et 22) puisque la valeur de  $\mu_2$ , qui seule distingue les deux cas, n'intervient pas dans leurs expressions.

2.4.2 - Un élément et un relais



2.4.2.1 - Réparations simultanées possibles.

On a (cf. graphe de la figure 5)

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda & \mu_1 = \mu \\ \lambda_1 = \lambda & \mu_2 = 2\mu \end{cases}$$

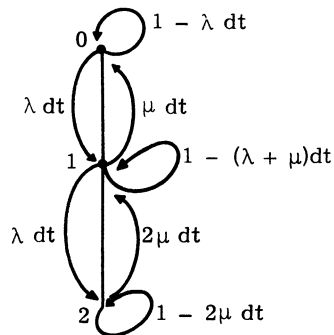


Fig. 5

Disponibilité. L'équation  $\varphi(s) = 0$  (formule 21) s'écrit :

$$\varphi(s) = s^2 + (2\lambda + 3\mu) s + \lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2 = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2} [2\lambda + 3\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}] \\ s_2 = -\frac{1}{2} [2\lambda + 3\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}] \end{cases}$$

D'où, pour la disponibilité instantanée (formule 13) :

$$D_s(t) = \frac{2\mu^2 + 2\lambda\mu}{2\mu^2 + 2\lambda\mu + 2} - \lambda^2 \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} \quad (26)$$

( $s_1$  et  $s_2$  ayant les valeurs ci-dessus)

et pour la disponibilité limite :

$$D_s = 1 - \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2} \quad (27)$$

Probabilité de survie. L'équation  $\phi(s) = 0$  (formule 16) s'écrit :

$$\phi(s) = s^2 + (2\lambda + \mu)s + \lambda^2 = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{2} [2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}] \\ s_2 = \frac{1}{2} [2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}] \end{cases}$$

La probabilité de survie (formule 17) est :

$$R_s(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (28)$$

( $s_1$  et  $s_2$  ayant les valeurs ci-dessus)

Le MTBF est (formule 18)

$$m_s = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2} \quad (29)$$

$m_e = \frac{1}{\lambda}$  étant le MTBF de chaque élément, en posant comme précédemment  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , on a :

$$m_s = m_e \left( 2 + \frac{1}{\rho} \right) \quad (30)$$

(expression à comparer à l'expression (23)).

#### 2.4.2.2 - Réparations simultanées impossibles

On a (cf. Graphe de la figure 6) :

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda \\ \mu_0 = \mu_1 = \mu \end{cases}$$

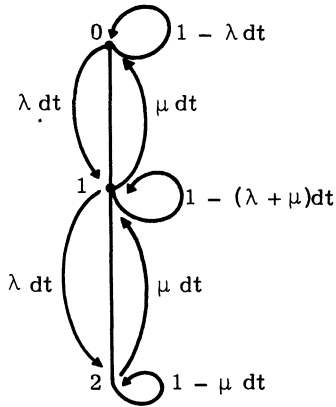


Fig. 6

Disponibilité. L'équation  $\varphi(s) = 0$  (formule 11) s'écrit :

$$s^2 + 2(\lambda + \mu)s + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0$$

Ses racines sont :

$$\begin{cases} s_1 = -(\lambda + \mu) - \sqrt{\lambda\mu} \\ s_2 = -(\lambda + \mu) + \sqrt{\lambda\mu} \end{cases}$$

D'où pour la disponibilité instantanée (formule 13) :

$$D_s(t) = \frac{\mu^2 + \lambda\mu}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2} - \lambda^2 \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (31)$$

( $s_1$  et  $s_2$  ayant les valeurs ci-dessus)

et pour la disponibilité limite :

$$D_s = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}$$

La probabilité de survie et le MTBF sont les mêmes qu'au §2.4.2.1 (formules 28 et 29).

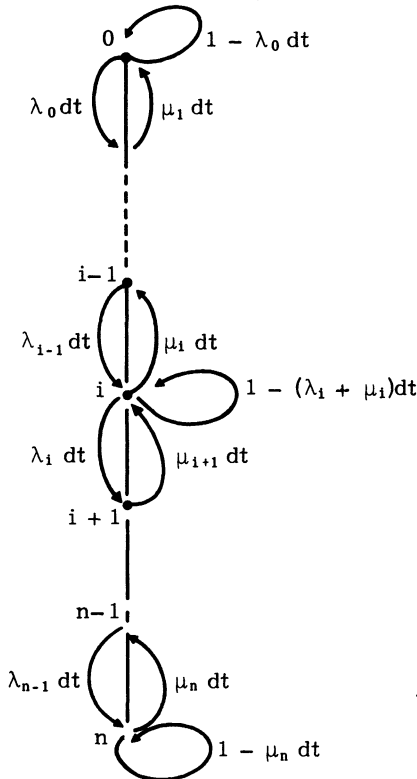


Fig. 7

### 3 - CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ELEMENTS

#### 3.1 - Généralités

Lorsque le système comprend  $n$  éléments, il peut être à un instant  $t$ , dans un des  $(n + 1)$  états caractérisés par  $i = 0, 1, \dots, n$  éléments défectueux. Soit  $p_i(t)$  la probabilité d'être dans l'état " $i$  défectueux".

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1 \quad p_0(0) = 1 \quad p_{i \neq 0}(0) = 0$$

On appelle, comme dans le cas de 2 éléments  $\lambda_i dt$  la probabilité dans un intervalle  $dt$  de passer de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  (défaillance)  $\mu_i dt$  la probabilité dans un intervalle  $dt$  de passer de l'état  $i$  à l'état  $i - 1$  (réparation).

#### 3.2 - Disponibilité instantanée et disponibilité limite

A partir du graphe de la figure 7 (qui généralise celui de la figure 1), on établit immédiatement, en raisonnant comme dans le cas de 2 éléments, le

système des  $(n + 1)$  équations linéaires auxquelles satisfont les transformées de Laplace-Carson  $\mathcal{L}_i(s)$  des probabilités  $p_i(t)$  - système qui généralise le système d'équations (10).

$$k = 1, 2, \dots, (n - 1) \left\{ \begin{array}{l} (s + \lambda_0) \mathcal{L}_0(s) - \mu_1 \mathcal{L}_1(s) \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \dots\dots\dots \\ - \lambda_{k-1} \mathcal{L}_{k-1}(s) + (s + \lambda_k + \mu_k) \mathcal{L}_k(s) - \mu_{k+1} \mathcal{L}_{k+1}(s) = 0 \quad (33) \\ \dots\dots\dots \\ - \lambda_{n-1} \mathcal{L}_{n-1}(s) + (s + \mu_n) \mathcal{L}_n(s) \qquad \qquad \qquad = 0 \end{array} \right.$$

Le premier membre de chaque équation comprend 3 termes, sauf pour la première et la dernière, où il n'y en a que deux.

Pour obtenir la disponibilité instantanée, il faut calculer  $\mathcal{L}_n(s)$ , en déduire  $p_n(t)$ , puis :

$$D_s(t) = 1 - p_n(t)$$

$\mathcal{L}_n(s)$  se présente sous la forme du quotient de deux déterminants

$$\mathcal{L}_n(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$\mathcal{L}_n(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \left| \begin{array}{cccc|cc} s + \lambda_0 & -\mu_1 & -0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & s + \lambda_1 + \mu_1 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & s + \lambda_2 + \mu_2 & -\mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & s + \lambda_{n-2} + \mu_{n-2} & -\mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-2} & s + \lambda_{n-1} + \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 \\ \hline s + \lambda_0 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_0 & s + \lambda_1 + \mu_1 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & s + \lambda_2 + \mu_2 & -\mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & s + \lambda_{n-2} + \mu_{n-2} & -\mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-2} & s + \lambda_{n-1} + \mu_{n-1} & -\mu_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-1} & s + \mu_n \end{array} \right| \quad (34)$$

On voit immédiatement que  $A(s)$  - développé par rapport à la dernière colonne est égal à  $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$

Lorsque dans  $B(s)$  on ajoute aux éléments de la 1 ère ligne la somme des éléments de toutes les autres lignes, cette première ligne devient :

$$s \quad s \quad \dots \quad s \quad s$$

$B(s)$  contient donc  $s$  en facteur, et l'on peut écrire :

$$\mathcal{L}_n(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{s \varphi(s)}$$

$\varphi_n(s)$  étant un polynôme de degré  $n$  en  $s$ .

Soient  $s_1, s_2, \dots, s_1, \dots, s_j, \dots, s_n$  les racines supposées distinctes de  $\varphi_n(s) = 0$

$$\varphi_n(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

Utilisant l'identité A.3 de l'Annexe et raisonnant comme dans le cas de deux éléments, on trouve :

$$D_s(t) = 1 - (-1)^n \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{s_1 s_2 \dots s_n} - \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i t} \quad (35)$$

avec

$$a_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \quad s_1 \dots s_j \text{ racines de } \varphi_n(s) = 0$$

La disponibilité limite ( $t = \infty$ ) est :

$$D_s = 1 - (-1)^n \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{s_1 s_2 \dots s_n} \quad (36)$$

Il est possible de mettre cette expression sous une forme qui ne dépende que des  $\lambda_i$  et des  $\mu_i$ , en calculant le produit  $s_1 s_2 \dots s_n$  des racines de  $\varphi_n(s) = 0$ .

En effet  $\varphi_n(0) = (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n$ . D'autre part, en se reportant à l'expression de  $B(s)$  - formule 34 - et après avoir ajouté (de façon à mettre  $s$  en facteur) à chaque élément de la première ligne la somme des éléments correspondants de toutes les autres lignes, on voit que  $\varphi_n(0)$  se met sous la forme du déterminant (37) .

Développant ce déterminant suivant la 1 ère ligne et appelant  $d_k$  le mineur correspondant à l'élément situé ligne 1, colonne  $k$ , on a :

$$\varphi_n(0) = d_0 - d_1 + d_2 \dots + (-1)^k d_k + \dots + (-1)^n d_n$$

Pour calculer le déterminant  $d_k$ , on commence par ajouter à la ligne numérotée  $(k + 1)$  toutes les lignes situées en dessous. Cette ligne ne contient plus alors que des 0, sauf dans la colonne  $k + 1$  où l'on trouve  $\mu_{k+1}$ . On ajoute ensuite à la ligne  $k + 2$  toutes les lignes situées en-dessous : cette ligne ne contient plus alors que des 0 ; sauf dans la colonne  $k + 2$  où l'on trouve  $\mu_{k+2}$ . En continuant de la même façon, on voit que le déterminant  $d$  n'a plus, en définitive, que des 0 au-dessous de sa diagonale principale. Il est égal au produit des éléments de cette diagonale principale, soit :

$$d_k = (-1)^k \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \mu_{k+1} \mu_{k+2} \dots \mu_n$$

On a donc finalement :



$$\begin{aligned}
\varphi_n(0) &= (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \\
&\quad + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \lambda_{n-2} \mu_n \\
&\quad + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \mu_{n-1} \mu_n \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\quad + \lambda_0 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_{n-2} \mu_{n-1} \mu_n \\
&\quad + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_{n-2} \mu_{n-1} \mu_n
\end{aligned}$$

D'où

$$(-1)^n \frac{s_1 s_2 \dots s_n}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} = 1 + \frac{\mu_n}{\lambda_{n-1}} + \frac{\mu_n}{\lambda_{n-1}} \cdot \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-2}} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^n \left( \prod_{i=n-k+1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} \right)$$

L'expression (36) donnant la disponibilité limite  $D_s$  peut donc s'écrire :

$$\boxed{\frac{1}{1 - D_s} = 1 + \sum_{k=1}^n \left( \prod_{i=n-k+1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} \right)} \quad (38)$$

### 3.3 - Probabilité de survie MTBF

Ici  $p_1(t)$  désigne la probabilité pour le système d'être à l'instant  $t$  dans l'état "i défailtants", sans qu'à un instant quelconque entre 0 et  $t$  les  $n$  éléments aient été à la fois défailtants, - c'est-à-dire sans que le système lui-même ait été défailtant.

On a  $p_n(t) = 0$  et  $p_n(t + dt) = p_{n-1}(t) \lambda_{n-1} dt$ , soit, pour la probabilité élémentaire de défaillance du système entre  $t$  et  $t + dt$

$$f_s(t)dt = p_n(t + dt) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t)dt$$

Il suffit donc de connaître  $p_{n-1}(t)$  pour pouvoir calculer la probabilité de survie à l'instant  $t$  :

$$R_s(t) = 1 - \int_0^t f_s(t)dt = 1 - \int_0^t \lambda_{n-1} p_{n-1}(t)dt$$

Raisonnant comme dans le cas de deux éléments, on remarque que les transformées de Laplace-Carson  $\mathcal{L}_k(s)$  des probabilités  $p_k(t)$

$$- k = 0, 1, \dots, n - 1 -$$

satisfont à  $n$  équations linéaires :

les  $(n - 1)$  premières sont les  $(n - 1)$  premières équations (33)

la  $n^e$  se déduit de la  $n^e$  équation (33) par suppression du terme  $\mu_n \mathcal{L}_n(s)$  : soit

$$- \lambda_{n-2} \mathcal{L}_{n-2}(s) + (s + \lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) \mathcal{L}_{n-1}(s) = 0.$$

L'expression de  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$  se déduit ainsi de la formule (34) en supprimant dans les déterminants  $A(s)$  et  $B(s)$  la dernière ligne et la dernière colonne. On a donc :

$$\mathcal{L}_{n-1}(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2}}{\psi_n(s)}$$

Déterminant  $\varphi_n(0)$  - d'ordre  $n+1$  - égal à  $(-1)^n s_1 s_2 \dots s_n$   
 Déterminant  $d_k$ , d'ordre  $n$  = ligne 0 et colonne  $k$  supprimées.

Colonnes Lignes:	0	1	2	3	$k-2$	$k-1$	$k$	$k+1$	$k+2$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	$n$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$-\lambda_0$	$\lambda_1 + \mu_1$	$-\mu_2$										
2	$-\lambda_1$	$\lambda_2 + \mu_2$	$-\mu_3$										
3		$-\lambda_2$	$\lambda_3 + \mu_3$										
$k-2$					$\lambda_{k-2} + \mu_{k-2}$	$-\mu_{k-1}$							
$k-1$					$-\lambda_{k-2}$	$\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}$	$-\mu_k$						
$k$						$-\lambda_{k-1}$	$\lambda_k + \mu_k$	$-\mu_{k+1}$					
$k+1$							$-\lambda_k$	$\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}$	$-\mu_{k+2}$				
$k+2$								$-\lambda_{k+1}$	$\lambda_{k+2} + \mu_{k+2}$				
$n-3$										$\lambda_{n-3} + \mu_{n-3}$	$-\mu_{n-2}$		
$n-2$										$-\lambda_{n-3}$	$\lambda_{n-2} + \mu_{n-2}$	$-\mu_{n-1}$	
$n-1$											$-\lambda_{n-2}$	$\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}$	$-\mu_n$
$n$												$-\lambda_{n-1}$	$\mu_n$

$\phi_n(s)$  étant un polynome de degré  $n$  en  $s$ , de terme constant non nul.

Désignant par  $s_1, s_2, \dots, s_n$  les racines de  $\phi_n(s) = 0$

$(\phi_n(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i))$ , et utilisant l'identité A2 de l'Annexe, on en déduit

$$p_{n-1}(t) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t}}{\prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}$$

Intégrant  $\lambda_{n-1} p_{n-1}(t)$  de 0 à  $t$  pour obtenir  $F_s(t)$ , on trouve

$$\begin{aligned} F_s(t) &= \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \right]_0^t \\ &= \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{e^{s_i t}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} - \frac{1}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \right) \right] \end{aligned}$$

Compte-tenu de l'identité A4 de l'Annexe :

$$F_s(t) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} + (-1)^n \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{s_1 s_2 \dots s_n}$$

On va montrer que le 2ème terme du 2ème membre est égal à 1.

En faisant  $s = 0$  dans le déterminant  $\phi_n(s)$ , on obtient  $(-1)^n s_1 s_2 \dots s_n$ . Le déterminant  $\phi_n(0)$  - déterminant d'ordre  $n$  - se déduit du déterminant  $\varphi_n(0)$  de la formule (37) de la façon suivante :

- on supprime la dernière ligne et la dernière colonne
- on multiplie la première ligne

$$\begin{array}{cccccc} \text{par} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & \lambda_0 & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

En ajoutant toutes ces lignes à la première, celle-ci devient :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \lambda_{n-1}$$

Le déterminant  $\phi_n(0)$  est donc égal au produit de  $(-1)^{n-1} \lambda_{n-1}$  par un déterminant d'ordre  $(n-1)$  dont tous les éléments au-dessous de la diagonale principale sont nuls, et dont les éléments de la diagonale principale sont  $-\lambda_0, -\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1}$ .

On a donc :

$$\phi_n(0) = (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n = (-1)^{n-1} \lambda_{n-1} (-1)^{n-1} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2}$$

ou

$$(-1)^n s_1 s_2 \dots s_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}$$

et l'expression de  $F_s(t)$  devient :

$$F_s(t) = 1 + \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}$$

La probabilité de survie est :

$$\boxed{R_s(t) = - \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \quad (39)}$$

$s, \dots, s_1, \dots, s_j, \dots$  étant les racines de  $\phi_n(s) = 0$

Le MTBF est :

$$m_s = \int_0^{\infty} R_s(t) dt = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2 \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}$$

Compte-tenu de la relation A5 de l'Annexe, on peut encore écrire :

$$\boxed{m_s = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \quad (40)}$$

$(s_i \text{ étant les racines de } \phi_n(s) = 0)$

### 3.4 - Applications

La disponibilité limite prend des formes simples dans les cas ci-après, où l'on utilise la formule (38)

$$\frac{1}{1 - D_s} = 1 + \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=n+k-1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} \right]$$

#### 3.4.1 - n éléments en parallèle

##### 3.4.1.1 - n réparations simultanées possibles

$$\begin{cases} \lambda_0 = n\lambda & \lambda_1 = (n-1)\lambda & \dots & \lambda_i = (n-i)\lambda & \dots & \lambda_{n-1} = \lambda \\ \mu_1 = \mu & \mu_2 = 2\mu & \dots & \mu_i = i\mu & \dots & \mu_n = n\mu \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} &= \frac{i}{n-i+1} \cdot \frac{\mu}{\lambda} \\ \frac{1}{1 - D_s} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k(k+1)\dots 1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{D_s = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^n} \quad (41)$$

3.4.2.2 - Impossibilité de faire simultanément plusieurs réparations

$$\begin{cases} \lambda_0 = n\lambda & \lambda_1 = (n-1)\lambda & \dots & \lambda_i = (n-i)\lambda & \dots & \lambda_{n-1} = \lambda \\ \mu_1 = \mu & \mu_2 = \mu & \dots & \mu_i = \mu & \dots & \mu_n = \mu \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} = \frac{1}{(n-i+1)} \cdot \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\frac{1}{1-D_s} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)\dots 1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ avec } x = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$D_s = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{1} + \dots + \frac{x^n}{n!}} \text{ avec } x = \frac{\mu}{\lambda} \quad (42)$$

Quand n est grand  $D_s \longrightarrow 1 - e^{-x}$

3.4.2 - 1 élément voisin de (n-1) relais

3.4.2.1 - n réparations simultanées possibles

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda & \lambda_1 = \lambda & \dots & \lambda_i = \lambda & \dots & \lambda_{n-1} = \lambda \\ \mu_1 = \mu & \mu_2 = 2\mu & \dots & \mu_i = i\mu & \dots & \mu_n = n\mu \end{cases}$$

$$\frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} = i \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\frac{1}{1-D_s} = 1 + \sum_{k=1}^n (n-k+1)\dots n \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} x^k \text{ avec } x = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$D_s = 1 - \frac{1}{n! x^n \left[ 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2! x^2} + \dots + \frac{1}{n! x^n} \right]} \quad (43)$$

3.4.2.2 - Impossibilité de faire simultanément plusieurs réparations

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda & \lambda_1 = \lambda & \dots & \lambda_i = \lambda & \dots & \lambda_{n-1} = \lambda \\ \mu_1 = \mu & \mu_2 = \mu & \dots & \mu_n = \mu & \dots & \mu_{n-1} = \mu \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-D_s} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}$$

$$D_s = 1 - \frac{1 - x}{1 - x^{n+1}} \text{ avec } x = \frac{\mu}{\lambda} \quad (44)$$

ANNEXE

Soient  $s_1, s_2, \dots, s_1 \dots s_j \dots s_n$  n nombres distincts - par exemple les racines d'une équation de degré n.

$$\varphi_n(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) \text{ (le coefficient de } s^n \text{ étant égal à l'unité)}$$

$$A1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} = 0$$

$$A2) \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - s_i) \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}$$

$$A3) \frac{1}{s \prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \frac{(-1)^n}{s \prod_{i=1}^n s_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i (s - s_i) \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}$$

$$A4) \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n s_i} \text{ (il suffit de faire } s = 0 \text{ dans la relation (A2))}.$$

$$A5) \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2 \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} = (-1)^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}}{\prod_{i=1}^n s_i}$$

Dans la relation (A3) on fait  $s = 0$ . - Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2 \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} &= \frac{1}{s \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^n s_i} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \right] \\ &= \frac{1}{s \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1)^n [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n] - \prod_{i=1}^n s_i}{\prod_{i=1}^n s_i [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n]} \right] \end{aligned}$$

Compte tenu de  $a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n s_i$ , on voit que cette quantité tend vers :

$$\frac{(-1)^n a_{n-1}}{a \prod_{i=1}^n s_i}$$

Comme  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n s_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \right)$ , il reste :

$$(-1)^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}}{\prod_{i=1}^n s_i}$$