

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. TIAGO DE OLIVEIRA
SEBASTIAN B. LITTAUER

Techniques pour une utilisation économique des cartes de contrôle

Revue de statistique appliquée, tome 14, n° 3 (1966), p. 43-53

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_3_43_0

© Société française de statistique, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TECHNIQUES POUR UNE UTILISATION ÉCONOMIQUE DES CARTES DE CONTROLE

J. TIAGO DE OLIVEIRA

Université de Lisbonne et Université Columbia

et Sébastien B. LITTAUER

Université Columbia

1 - INTRODUCTION

Dans un précédent article [8], nous avons présenté les propriétés statistiques fondamentales de deux formes de cartes de contrôle qui peuvent être utilisées dans la surveillance des processus de production qui ont déjà atteint l'état de stabilité statistique. Les principes fondamentaux des cartes de contrôle ont été exposés dans Shewart [6], [7] et Western Electric [9]. L'usage des deux méthodes étudiées précédemment (dans l'hypothèse considérée) peut être résumé comme suit :

Pour les cartes de contrôle à doubles limites, on choisit deux constantes (w , a), $0 < w \leq a$ qui déterminent, pour les valeurs données de la moyenne μ_0 et de l'écart-type σ_0 des distributions normales sous-jacentes, les limites de contrôle ou d'action (LC) et de surveillance (LS), supérieures (s) et inférieures (i).

$$\begin{aligned} \mu_0 \pm a \sigma_0 / \sqrt{n} & \quad (LC_s, LC_i) \\ \mu_0 \pm w \sigma_0 / \sqrt{n} & \quad (LS_s, LS_i) \end{aligned}$$

Si une des moyennes d'échantillon (échantillon d'effectif n) tombe en dehors de l'intervalle (LC_i , LC_s) ou si deux moyennes successives tombent entre (LC_i , LS_i) ou entre (LS_s , LC_s), on doit passer à l'action et rechercher les causes possibles de variation.

Pour les cartes de contrôle à séquences, on fait aussi le choix de deux constantes (C , R), $C > 0$ et $R > 1$ (entier) qui déterminent, à partir de μ_0 et σ_0 , les deux limites de contrôle.

Si une des moyennes d'échantillon tombe en dehors de l'intervalle (LC_i , LC_s) ou si une séquence de R de ces moyennes se placent toutes au-dessus ou au-dessous de μ_0 bien que restant dans l'intervalle (LC_i , LC_s), on devra passer à l'action pour la recherche des causes possibles de variation.

Le choix de ces paires de paramètres a été fait en général sur une base empiriquement économique, Shewart [6] et l'usage du critère I de

Cette étude a été subventionnée par l'Office of Naval Research, Contrat ONR 266(04). Elle peut être reproduite totalement ou en partie, à la libre disposition du Gouvernement des Etats-Unis.

Shewart, utilisant seulement les limites de contrôle $\mu_0 \pm 3 \sigma_0/\sqrt{n}$ pour les cartes habituelles de contrôle, (Shewart [7], p. 29), auxquelles se réduisent les cartes de contrôle à doubles limites pour $a = w$ et les cartes de contrôle à séquence pour $R = \infty$, a donné de bons résultats.

Toutefois, des efforts ont été faits pour établir, de façon rationnelle, les critères utilisés dans les cartes de contrôle (par exemple, Aroian and Levene [1]), aussi bien que pour établir des procédés de sélection des paramètres, qui minimiseraient le coût de l'utilisation des cartes de contrôle. Duncan [3] a obtenu les paramètres pour le critère I, de façon à minimiser le coût dans certaines conditions d'emploi. Plus tard, Duncan [4], (p. 574) a donné quelques règles-guide pour le choix des paramètres des cartes de contrôle.

La justification formelle des techniques de sélection économique des paramètres de cartes de contrôle n'est pas, toutefois, complètement satisfaisante.

Dans ce mémoire, nous essayons de donner une justification formelle du choix d'un système d'inspection dans une base mieux définie, avec une grande flexibilité pour le choix. Des tables, avec un large domaine d'applications, seront publiées ultérieurement par nous, ce qui simplifiera le calcul pour les deux cartes (à doubles limites et à séquences).

2 - SURVEILLANCE DANS DES CONDITIONS DE STABILITE

Pour éviter des confusions, indiquons brièvement les bases du raisonnement : les hypothèses statistiques et les conditions d'opération. En premier lieu, si le processus de production a atteint la stabilité statistique relativement à la moyenne (d'un caractère mesurable quelconque), on supposera que les observations de cette caractéristique sont identiquement distribuées avec une moyenne μ_0 et un écart-type σ_0 .

En général, l'écart-type du processus est plus stable que la moyenne et, en effet, il est de règle (Western Electric [9], p. 12, 153) de stabiliser σ_0 . On pourra donc supposer que l'écart-type $\sigma = \sigma_0$ est stable, bien que la moyenne du processus puisse changer. De plus, les moyennes d'échantillons étant étudiées pour montrer le changement de la moyenne du processus, nous allons supposer, sans nous éloigner des conditions réelles, que ces moyennes \bar{X} sont distribuées normalement, avec une moyenne μ_0 et un écart-type σ_0/\sqrt{n} .

L'opération de contrôle statistique est utilisée comme méthode de diagnostic ou de recherche des causes de variation afin de les éliminer. Ceci doit être fait seulement si on a des raisons de croire que le processus a atteint l'état de stabilité statistique, ses résultats satisfaisant les spécifications de production (moyenne et tolérance) : en effet, il n'y aurait pas de sens pratique à ajuster les paramètres du processus tant que ses résultats, en phase erratique, désordonnée, instable, ne sont pas conformes aux spécifications. Il est donc raisonnable de limiter les considérations à des processus en état de stabilité statistique avec moyenne μ_0 et écart-type σ_0 pour la caractéristique en étude, μ_0 étant la valeur de la spécification, les limites de tolérance contenant les résultats avec haute probabilité.

La surveillance sera réalisée en prenant des échantillons de n observations successives, les échantillons successifs étant prélevés à intervalles I mesurés en nombre de pièces produites entre deux échantillons

successifs ; ce couple (n, I) sera appelé système d'inspection. Si le critère de contrôle n'est pas satisfait, on suppose qu'il y a un certain coût A, pour la recherche des causes de variation et leur correction. D'autres éléments seront indiqués plus loin.

Dans l'opération en conditions de stabilité, quelques moyennes d'échantillon ne satisferont pas le critère de contrôle ; mais on veut que ceci se produise aussi peu souvent que possible. D'autre part, dès que la moyenne du processus a changé, le signal d'action doit se présenter aussi rapidement que possible. Donc, les paramètres du critère de contrôle comme l'effectif de l'échantillon n et l'intervalle d'échantillonnage I doivent être choisis de façon que le coût de manutention du processus en état de stabilité statistique ne dépasse pas une certaine valeur fixée C_0 . Les propriétés de temps moyen d'action seront utilisées pour développer un procédé de choix économique des paramètres de contrôle et analyser le coût de l'opération.

3 - LE TEMPS MOYEN D'ACTION

Développons brièvement le rôle du temps moyen d'action ; les détails sont donnés dans Tiago de Oliveira et Littauer [8]. Pour un état donné de stabilité statistique avec paramètres μ_0 et σ_0 , on décidera, de temps en temps, l'action de correction : le nombre d'échantillons entre deux actions successives (en incluant l'échantillon qui conduit à décider l'action) est appelé temps d'action. Dans le cours du processus ce temps d'action a une valeur moyenne ou temps moyen d'action.

La même chose se produit si les paramètres sont devenus :

$$\mu_0 \pm \lambda \sigma_0, \delta \sigma_0 ;$$

on notera par $T(\lambda, \delta)$ le temps moyen d'action. $T(\lambda, \delta)$ est évidemment symétrique en λ ($T(\lambda, \delta) = T(-\lambda, \delta)$). Etant donnée la stabilité admise de σ_0 , on s'intéressera seulement à $T(\lambda, 1)$; $T(\lambda, 1)$ est évidemment décroissant quand $\lambda (> 0)$ croît. Si $\mu_0 \pm \lambda_1 \sigma_0$ est un changement indésirable du processus qu'on veut remarquer aussi vite que possible, on voit que les valeurs de $T_0 = T(0, 1)$ et $T_1 = T(\lambda_1, 1)$ doivent être respectivement aussi grandes et aussi petites que possible, T_0 et T_1 peuvent être considérés comme jouant un rôle analogue aux risques (ou erreurs) conventionnels de 1ère et 2ème espèce, qui ne peuvent être utilisés ici car bien qu'on puisse supposer les échantillons indépendants, la décision dépend un peu de l'histoire de l'échantillonnage comme dans les deux cartes étudiées par nous.

Ces valeurs de T_0 et T_1 seront utilisées pour le choix rationnel des paramètres (n, I) pour la surveillance économique des processus dans les conditions de stabilité statistique ; n, T_0, T_1 et λ_1 serviront, après, pour la détermination des paramètres de la carte de contrôle choisie.

Illustrons ces concepts par un exemple bien simple : supposons que, pour une certaine valeur de n , nous désirions pour des raisons pratiques $T_0 = 500$ et $T_1 = 3(\lambda_1 = 1)$. Ceci veut dire qu'on ne veut pas décider l'action plus fréquemment qu'une fois en moyenne, en 500 échantillons, si la moyenne n'a pas varié, mais que si la moyenne du processus varie d'un écart-type, nous voulons passer à l'action en moyenne une fois en 3 échantillons.

Les couples (a, w) ou (c, R) qui donnent ce résultat ont été étudiés dans notre mémoire [8]. De plus, dans ces conditions, on peut choisir n et I (en fonction des coûts de l'opération) de façon que le coût moyen de la surveillance avec protection contre un changement de la moyenne de λ_1 écarts-types ne dépasse pas une valeur pré-établie L_1 . Dans ce qui suit, nous allons étudier les facteurs du coût tels que pour les valeurs (T_0, T_1) , n et I puissent être choisis de façon à satisfaire à ces considérations économiques valables.

4 - FACTEURS DE COUT

Bien que les objectifs de l'industrie soient multiples, un objectif de quelque processus de production est bien la maximisation du profit qui peut être obtenu de la réalisation du processus. Un des facteurs les plus importants du profit est le coût global d'une unité depuis la recherche de la matière première jusqu'à la production finale, prête pour la distribution. Une part significative de ce coût est conséquence du désir d'assurer que le produit vérifie les spécifications imposées.

Dans ce cas, si on tourne l'attention vers la phase du contrôle statistique de la production, on peut justifier l'étude des considérations de coût en considérant que ces coûts sont des pénalités. Car, en supposant que le processus a atteint l'état désiré de stabilité statistique, on pourrait penser (quoique ceci soit très peu raisonnable) que le processus continuera indéfiniment à se maintenir dans cet état. Si cela était le cas, il ne faudrait pas surveiller. Mais, en réalité, la surveillance est (presque) toujours nécessaire et deux questions se posent naturellement :

- 1/ Quels sont les coûts impliqués par la surveillance ?
- 2/ Quel est le coût minimum de surveillance ?

Ces questions sont très vagues et nous allons les préciser maintenant.

Le prix de cette précision entraîne, bien sûr, certaines hypothèses, qui, bien qu'un peu restrictives, n'en sont pas moins réalistes. La question du coût minimum étant la plus difficile, nous ne l'étudierons pas ici ; nous allons d'abord examiner la nature des coûts de surveillance et, le moment venu, mettre en lumière d'autres coûts significatifs.

Dans ce but, nous introduisons l'hypothèse qu'il est désirable d'utiliser le processus dans l'état idéal de stabilité statistique, c'est-à-dire que la variabilité naturelle du processus est en accord exact avec les spécifications : celles-ci étant que la caractéristique mesurable \underline{X} doit être égale à m unités et qu'elle ne doit dévier de m de plus de $\pm s$ unités ; donc la moyenne de X doit être prise égale à m ($\mu_0 = m$) et si X a la distribution normale, on doit avoir $3\sigma_0 = s$ dans les conditions idéales. Le nombre des unités non satisfaisantes dans ces conditions, doit être si petit qu'il peut être négligé dans les considérations de coût. Nous pouvons maintenant nous demander plus précisément quel est le coût de surveillance si $\mu = \mu_0$ et $\sigma = \sigma_0$?

Les implications de cette question ne sont pas encore tout à fait claires. Par exemple, supposons le critère de contrôle suivant : pour un échantillon de $n = 3$ pièces, pris avec un intervalle de $I = 5000$ pièces, considérons le couple de limites d'action $\mu_0 \pm 5\sigma_0$, en passant à l'action si $|\bar{X}_j - \mu_0| \geq 5\sigma_0$. Ce critère peut être catastrophique ..., toutefois, le coût effectif de surveillance est très petit, quel que soit le jugement. D'autre part, pour $n = 14$, $I = 200$, le coût de surveillance sera plus

grand, bien que d'autres coûts (à spécifier) puissent être plus petits que dans le critère antérieur.

De plus, il est évident, si les limites d'action sont $\mu_0 \pm 2 \sigma_0 / \sqrt{n}$, que le coût de surveillance peut croître beaucoup. On voit que de nombreux facteurs interviennent dans l'estimation du coût ; il est désirable de pouvoir formuler, de manière réaliste, une fonction de coût global tenant compte des facteurs significatifs de ce coût. Dans ce but, une fonction (unitaire) de coût de surveillance $C(\lambda)$, coût de surveillance par pièce dans l'état $\mu = \mu_0 + \lambda \sigma_0$, est d'abord introduite.

Il est visible maintenant qu'on peut choisir les paramètres de la carte de contrôle (quel que soit le critère) ; l'effectif de l'échantillon n et l'intervalle entre échantillon I .

Si $\lambda = 0$, le processus est dans les conditions idéales ; si $\lambda \neq 0$ (> 0) le processus est dans des conditions moins favorables (avec une fraction non négligeable de pièces défectueuses dans la production) et pour les mêmes paramètres des cartes de contrôle et les mêmes conditions d'inspection, on passera plus fréquemment à l'action ; en conséquence, le coût de surveillance sera plus élevé.

Nous allons simplifier le problème et restreindre l'usage du coût de surveillance au cas, où après une variation de $\lambda = 0$ à une valeur $\lambda \neq 0$, le processus se maintient dans ce nouvel état λ , ($C(\lambda)$ étant symétrique en λ , on considèrera seulement le cas $\lambda \geq 0$).

Introduisons maintenant les notations à utiliser pour établir $C(\lambda)$ sans ambiguïté :

n : effectif de l'échantillon

I : Intervalle d'échantillonnage ; le nombre fixé de pièces produites entre deux échantillons successifs, en y incluant l'échantillon terminal ; en général on a $I > n$, le taux d'inspection n/I étant petit.

λ : l'écart-réduit de la moyenne du processus, l'écart réel étant $\lambda \sigma_0$.

σ_0 : l'écart-type stabilisé.

A : le coût de passer à l'action.

α, β : deux constantes telles que $\alpha n + \beta$ pièces sont produites pendant la durée d'échantillonnage, d'inspection, de calcul et représentation de \bar{X} et le temps de passage à l'action s'il y a lieu.

$\varpi(\lambda)$: la probabilité qu'une pièce tombe en dehors des spécifications dans l'état caractérisé par une variation $\lambda \sigma_0$ de la moyenne.

Π : la pénalité par pièce défectueuse ; cette pénalité comprenant tout ce qui résulte d'une pièce défectueuse non-observée ; on peut y inclure le coût de remplacement de ces pièces et même, s'il le faut, une indemnité au consommateur.

Soit $T(j|\lambda)$ la variable aléatoire mesurant la longueur du $j^{\text{ème}}$ "segment de temps d'action dans l'état λ ", c'est-à-dire, si le processus fonctionne avec la moyenne stable $\mu_0 + \lambda \sigma_0$ et si on commence à énumérer les actions à partir d'un certain moment, $T(j|\lambda)$ est le nombre d'intervalles d'échantillonnage entre la $(j - 1)^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ action, période de production appelée le $j^{\text{ème}}$ segment d'action. Cette variable aléatoire a été étudiée dans Tiago de Oliveira et Littauer [8] ; sa valeur moyenne (ou espérance mathématique) $T(\lambda)$, a été notée $T(\lambda|1)$ dans ce mémoire. Les tables en cours de calcul donneront cette valeur pour les cartes de contrôle à doubles limites et à séquences.

Le coût de surveillance unitaire peut, maintenant, être formulé. Le nombre total de pièces produites dans l'état λ pendant le $j^{\text{ème}}$ segment d'action est :

$$I T(j|\lambda) + \alpha n + \beta$$

Le coût de surveillance (qui n'inclut pas les pénalités possibles) dans l'état λ , pour le $j^{\text{ème}}$ segment d'action, est :

$$n \gamma T(j|\lambda) + A$$

Donc le coût moyen unitaire de surveillance dans l'état λ , pour une carte de contrôle quelconque est :

$$C(\lambda) = \lim \frac{\frac{1}{\bar{k}} \sum_{j=1}^k [n \gamma T(j|\lambda) + A]}{\frac{1}{\bar{k}} \sum_{j=1}^k [I T(j|\lambda) + \alpha n + \beta]} \quad (1)$$

où le numérateur est le coût moyen de surveillance et le dénominateur est le nombre moyen de pièces, pour les k premiers segments d'action, produites dans cette période pour l'état λ .

La limite (1) est le quotient des valeurs moyennes du numérateur et du dénominateur, en conséquence de la loi forte des grands nombres (Loève [5] ; Derman et Sacks [2]), car les $T(j|\lambda)$ sont indépendamment et identiquement distribués ; nous avons donc :

$$C(\lambda) = \frac{n \gamma T(\lambda) + A}{I T(\lambda) + \alpha n + \beta} \quad (2)$$

La valeur $C(\lambda)$, ainsi définie n'est pas encore tout-à-fait utilisable car on a besoin des deux quantités \underline{n} et \underline{I} pour déterminer le système d'inspection, ce qui donne, comme nous avons eu, une base rationnelle pour le choix des paramètres de la carte de contrôle dès que celle-ci est choisie par des raisons techniques, on peut même, si cela paraît utile, faire la comparaison des coûts des critères de cartes de contrôle et choisir celle de coût minimum.

Tout cela ne peut être fait seulement avec $C(\lambda)$, comme il a déjà été dit. En pratique, on peut concevoir que la continuation de la fabrication avec $\lambda > 0$ peut être tout de même acceptée si les pénalités dues à la production de pièces défectueuses sont faibles par rapport aux coûts de corrections fréquentes apportées au processus. Donc $C(\lambda)$ sera, essentiellement, utilisé pour $\lambda = 0$; pour $\lambda > 0$ on devra déterminer le coût de protection envers cet état.

Une façon utile et simple de choisir \underline{n} et \underline{I} peut être établie en considérant le cas où la moyenne du processus a un saut instantané de $\lambda \sigma_0$. Dans ce cas, dès qu'on veut s'apercevoir rapidement du changement de μ_0 à $\mu_0 + \lambda \sigma_0$, on spécifiera $T(\lambda)$ égal à un entier petit.

Le coût unitaire de protection envers l'écart λ pourrait se déterminer en connaissant la distribution de λ . Toutefois, nous n'allons pas envisager ce cas, mais, au contraire, donner un procédé pratique pour choisir \underline{n} et \underline{I} en accord avec la spécification de coût de l'entreprise. A cet effet, le coût moyen de protection à l'égard d'un saut λ est donnée par :

$$L(\lambda) = A + n \gamma T(\lambda) + \varpi(\lambda) [I T(\lambda) + \alpha n + \beta] \Pi, \quad (3)$$

le second terme étant le coût moyen d'inspection et le troisième la pénalité, conséquence de la fraction de pièces défectueuses dans celles non inspectées pendant l'état λ , en y incluant le nombre $\alpha n + \beta$ de pièces produites entre l'obtention de l'échantillon menant à l'action et la décision de passer à l'action.

La fraction $\varpi(\lambda)$ de pièces défectueuses obtenue dans l'hypothèse que l'intervalle de tolérance est $6\sigma_0$ est :

$$\varpi(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \int_{\mu_0 - 3\sigma_0}^{\mu_0 + 3\sigma_0} \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma_0} \right)^2 dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3-\lambda}^{3-\lambda} e^{-t^2/2} dt \quad (4)$$

$L(\lambda)$, le coût de protection envers un saut instantané pour l'état $\lambda (> 0)$; comprend donc : le coût d'action A relatif à la recherche des causes de variation, le coût d'inspection de $T(\lambda)$ échantillons (en moyenne) jusqu'à la détection du changement ; et la perte due aux pièces défectueuses produites dans l'état λ .

5 - DETERMINATION DU SYSTEME D'INSPECTION

Dans l'utilisation du processus de fabrication, on peut supposer que l'expérience de l'entreprise donne une estimation raisonnable de A pour certaines conditions de production. De même, on peut admettre comme valeur maximum du coût unitaire de surveillance celui qui correspond aux conditions idéales de stabilité statistique car $T(\lambda)$ est minimum pour $\lambda = 0$, (T_0) et on a en général $A I > n \gamma (\alpha n + \beta)$. En notant par C_0 ce maximum, on a :

$$C_0 = \frac{n \gamma T_0 + A}{I T_0 + \alpha n + \beta}, \quad (5)$$

n et I étant les paramètres à déterminer, T_0 étant le temps moyen d'action pour $\lambda = 0$.

De façon analogue la valeur L_1 pour $L(\lambda_1)$, choisie aussi par des raisons techniques, est donnée par la relation :

$$L_1 = A + n \gamma T_1 + \varpi(\lambda_1) [I T_1 + \alpha n + \beta] \Pi \quad (6)$$

T_1 étant le temps moyen d'action pour $\lambda = \lambda_1$. Les équations (5) et (6) donnent \underline{n} et \underline{I} . Cette détermination de n et I n'entraîne pas nécessairement un coût global optimum pour assurer la qualité de production ; toutefois elle donne à la direction de l'entreprise une détermination précise de \underline{n} et \underline{I} dans des conditions de coût préalablement définies.

On peut même, déterminer des couples différents (n, I) pour des choix différents de (C_0, L_1) ; toutefois C_0, L_1 ne peuvent être choisis librement car $1 \leq n \leq I$: des valeurs incompatibles de C_0 et L_1 pouvant entraîner soit $n < 0$ soit $n > I$. De plus, quelques approximations de calcul peuvent être faites, car n et I doivent évidemment être entiers.

En principe, on doit choisir l'entier supérieur et calculer, alors, les valeurs résultantes de C_0 et L_1 , à comparer avec les décisions initiales.

Quelques essais amèneront rapidement à un couple de valeurs de \underline{n}

et I . Les résultats, rappelons-le, sont indépendants de la carte de contrôle utilisée.

L'usage des formules (5) et (6) sera montré par deux exemples simples.

Nous allons examiner le cas particulier $\alpha = \beta = 0$, car, en général, ces valeurs sont négligeables dans la pratique ; si α et β ne sont pas négligeables, les calculs sont semblables à ceux qui suivent. Les équations (5) et (6) ont, donc, la forme :

$$C_0 = \frac{A + n \gamma T_0}{I T_0} \quad (7)$$

$$L_1 = A + n \gamma T_1 + \varpi_1 \Pi I T_1$$

avec $\varpi_1 = \varpi(\lambda_1)$.

En posant, pour simplifier, $A/T_0 = a$, $(L_1 - A)/T_1 = b$ les équations pour \underline{n} et \underline{I} s'écrivent :

$$C_0 I - \gamma n = a \quad (8)$$

$$\varpi_1 \Pi I + \gamma n = b$$

et donnent :

$$n = \frac{C_0 b - \varpi_1 \Pi a}{\gamma(C_0 + \varpi_1 \Pi)}$$

$$I = \frac{a + b}{C_0 + \varpi_1 \Pi} \quad (9)$$

On voit immédiatement que si les coûts C_0 , L_1 , A , Π , γ varient proportionnellement, les valeurs de \underline{n} et \underline{I} restent invariables, ce qui montre que l'échantillonnage et l'inspection sont indépendants de la monnaie dans laquelle est faite l'évolution des coûts.

Les limitations dont on a déjà parlé, $1 \leq n \leq I$ entraînent, évidemment, des conditions de compatibilité pour (C_0, L_1) . Remarquons déjà que la seconde équation (8) entraîne $b > \gamma + \varpi_1 \Pi$, (valeur du premier membre pour $n = I = 1$). Les conditions de compatibilité sont, donc :

$$\varpi_1 \Pi(a + \gamma) < C_0(b - \gamma) \quad , \quad n \geq 1$$

$$b(C_0 - \gamma) < a(\gamma + \varpi_1 \Pi) \quad , \quad n \leq I$$

Le taux d'inspection n/I sera donc borné par $\underline{1}$.

On voit aussi que n et I décroissent avec Π - la pénalité - de même que le taux d'inspection $n/I = \frac{C_0 b - \varpi_1 \Pi a}{\gamma(a + b)}$, dès que Π satisfait aux conditions de compatibilité

$$\frac{b C_0 - (a + b) \gamma}{a \varpi_1} < \Pi < \frac{C_0(b - \gamma)}{\varpi_1(a + \gamma)}$$

Ce résultat n'est pas étonnant si on se souvient qu'il y a une liai-

son forte entre L_1 et Π (équation 6) ou encore de la relation $b \geq \gamma + \pi_1 \Pi$, déduite ci-dessus.

Le taux d'inspection a la limite suivante, donnée par la première équation de (8)

$$\frac{n}{I} = \frac{C_o}{\gamma} - \frac{a}{I\gamma} < \frac{C_o}{\gamma} \quad (11)$$

Il est raisonnable, pour que le contrôle statistique soit économique que le taux n/I soit borné par un chiffre pratique ; dès que $a/I\gamma$ est très petit, on prendra comme borne C_o/γ . Prenons cette borne égale à $1/10$.

Si $n/I > 1/10$, on pourrait étudier différents cas de fréquence d'échantillonnage. Considérons seulement le contrôle "statistique", par inspection totale ($n = I$) et déterminons les cas qui entraînent cet échantillonnage. Des équations (9) on obtient (pour $n/I \approx 1$) :

$$\frac{C_o b - \overline{\pi}_1 \Pi a}{\gamma(a + b)} \approx 1, \quad (12)$$

comme condition d'inspection totale.

$n = I$ entraîne donc $C_o > \gamma$, ce qui montre que le coût unitaire de surveillance est grand comparé avec le coût d'échantillonnage de chaque pièce. Remarquons, aussi, que l'accroissement de $\frac{b}{a} = \left(\frac{L_1}{A} - 1\right) \frac{T_o}{T_1}$ entraîne l'accroissement du taux d'inspection, ce à quoi l'on pouvait s'attendre.

6 - EXEMPLES

Considérons, maintenant, deux exemples dans lesquels les coûts d'inspection et unitaire de surveillance sont petits en comparaison avec le coût d'une pièce, la pénalité étant de l'ordre de grandeur du coût de la pièce. Soient $C_o/\gamma < 1/10$, et $T_o/T_1 = 100$.

Donc pour $\gamma = 1/10$, $C_o = 1/200$, $\Pi = 1$, $T_o = 500$, $T_1 = 5$, $\overline{\pi}_1 = 1/10$, $A = 10$, $L_1 = 60$, soit $a = 1/50$, $b = 10$, les équations (9) donnent : $n \approx 5$, $I \sim 29 \rightarrow 100$, (20×5), la valeur 100 représentant I si on divise la production en groupes (échantillonnables de 5).

En augmentant la pénalité ($\Pi = 2$) nous obtenons :

$$n \approx 3$$

$$I \approx 49 \rightarrow 51(17 \times 3)$$

On voit que si les autres coûts ne sont pas modifiés, le taux d'inspection varie légèrement avec la pénalité comme nous avons vu précédemment.

Ces exemples, non définitifs, donnent une base pour la détermination plus rationnelle de n et I , au moins, pour l'évaluation des coûts associés à certains choix des paramètres.

Dans le dernier exemple, on a déterminé $n = 3$; il se peut, pour des raisons techniques, qu'on veuille utiliser $n = 4$ ou $n = 5$. A partir

de cette valeur de n choisie par avance, les équations (8) donnent lieu à deux valeurs différentes de I , ce qui entraîne la nécessité d'un compromis.

Pour $n = 4$, les valeurs de I sont 84 et 96 ; le choix peut se faire en utilisant la plus grande valeur de I car C_0 est, donc, moindre, comme on le voit sur l'expression (7) de C_0 . De même, pour $n = 5$ on choisira 105 à partir des deux valeurs calculées 95 et 100.

Une autre cause de variation provient des valeurs de T_0 et T_1 . Ce changement affecte les paramètres de la carte de contrôle, ce qui ne nous concerne pas. Si on prend $T_0 = 300$, $T_1 = 3$, $a = 1/30$, $b = 50/3$, $\Pi = 1$ pour les mêmes valeurs de γ , C_0 , ω_1 et L_1 , on obtient $n \approx 8$, $I \approx 160$ (20×8). L'accroissement de n ne change pas pratiquement le taux d'inspection ainsi qu'il a été dit précédemment, à cause de la proportionnalité des valeurs de a et b dans les deux cas.

Nous avons, précédemment, envisagé les conditions d'inspection totale, c'est-à-dire lorsque le quotient (voir 11)

$$\frac{C_0 b - \varpi_1 \Pi a}{\gamma(a + b)}$$

en général plus petit que 1, est voisin de l'unité. Par exemple pour les valeurs compatibles :

$$a = 50, b = 1200, \varpi_1 = 1/10, C_0 = 1/5, \gamma = 1/10, \Pi = 50,$$

ce quotient a la valeur 23/25, ce qui entraîne, dans la pratique, l'inspection totale.

7 - QUELQUES REMARQUES

En conclusion de ce court mémoire, livrons-nous à quelques réflexions sur le problème dont nous avons traité ici seulement une partie.

Il manque, encore, une étude d'ensemble, sur le problème général du contrôle de la production. Croyant, cependant, que les problèmes traités dans ce mémoire et dans le précédent (Tiago de Oliveira et Littauer [8]) ne sont pas trop éloignés du résultat général désirable, nous avons décomposé le problème du contrôle de la production en plusieurs parties : L'optimisation partielle dépend de quelques éléments dont certains sont à fixer un peu arbitrairement (T_0 , T_1 et, peut-être, dans certains cas, λ_1), d'autres dont on connaît, dans l'entreprise, la valeur (A , γ et peut-être Π) et d'autres enfin dont on doit fixer la valeur en accord avec la politique de l'entreprise (C_0 et L_1). Ces choix étant faits, on a des moyens de calcul direct des autres éléments de l'inspection, le choix à l'aveuglette ou, pour des raisons de simple commodité, pouvant être éliminé.

D'autre part, on a des moyens qui permettent d'évaluer les techniques établies et même d'en chercher d'autres qui, pour les mêmes coûts (C_0 , L_1) peuvent changer de façon plus utile les autres éléments (T_0 , T_1 , etc ..), compte tenu des inégalités fondamentales (10).

Une brève remarque sur la pénalité : nous l'avons définie de façon assez vague pour qu'on puisse y introduire dans le prix de la pièce défectueuse une indemnité au consommateur, celle-ci considérée en général

dans le contrôle de réception. Cette dernière possibilité est bien différente de ce qu'en fait d'habitude ; mais on peut se demander, aussi, si la méthode traditionnelle est raisonnable; quoi qu'il en soit, les résultats obtenus sont adaptés aux techniques habituelles.

Finalement, une remarque de méthode : nous avons écarté, de façon décisive, bien que nous y référant au passage, l'usage de méthodes bayésiennes qui permettraient, en utilisant la distribution (a priori, en général) des écarts, le calcul des coûts moyens de surveillance et protection liés à la distribution des écarts. Les équations qu'on obtiendrait sont, évidemment, tout à fait analogues aux équations (7) et (9) ; on pourrait le faire si on avait des raisons de connaître cette distribution des écarts. En effet, en prenant les valeurs moyennes de $C(\lambda)$ et $L(\lambda)$, données par (5), par rapport à la distribution des écarts et en notant par C' , $1/T'$, L'' , T'' et $\omega''T''$ ces moyennes de $C(\lambda)$, $1/T(\lambda)$, $L(\lambda)$, $T(\lambda)$ et $\omega(\lambda)T(\lambda)$, on obtiendrait les mêmes équations (7) en remplaçant C_0 , T_0 , L_1 , T_1 et ω_1 par C' , T' , L'' , T'' et ω'' , les mêmes conclusions, s'en suivent. Nous nous sommes, toutefois, astreints à suivre une méthode neymanienne, indépendante de la distribution des écarts, s'il y en a.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AROIAN, LEO A. & LEVENE, H. (1950) - The effectiveness of quality control charts, *Journal of the American Statistical Association*, XIV.
- [2] DERMAN, C. & SACKS, J. (1960) - Replacement of periodically inspected equipment, *Naval Research Logistics Quarterly*, 4.
- [3] DUNCAN, ACHESON J. (1950) - The economic of x charts to maintain current control of a process, *Journal of the American Statistical Association*, 51.
- [4] DUNCAN, ACHESON J. (1959) - *Quality Control and Industrial Statistics*, Irwin, Homewood, Illinois.
- [5] LOEVE M. (1960) - *Probability Theory* - D. Van Nostrand & C°, Princeton, New-Jersey.
- [6] SHEWART Walter A. (1931) - *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. Van Nostrand and C°, Princeton, New-Jersey.
- [7] SHEWART Walter A. (1939) - (W. Edward DEMING, Editor) *Statistical Method from the Viewpoint of quality control*. Graduate School, U.S. Department of Agriculture, Washington D.C.
- [8] TIAGO DE OLIVEIRA, J. & LITTAUER, S.B. (1965) - Cartes de contrôle à doubles limites et à séquences - *Revue de Statistique Appliquée*, 1965, n° 2.
- [9] WESTERN ELECTRIC COMPANY, Incorporated (1958) - *Statistical Quality Control Handbook*, New-York.