

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

LIBOR KUBAT

Modèle d'un système simple réglé selon les paramètres statistiques

Revue de statistique appliquée, tome 13, n° 3 (1965), p. 93-102

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_3_93_0

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLE D'UN SYSTÈME SIMPLE RÉGLÉ SELON LES PARAMÈTRES STATISTIQUES (1)

Libor KUBAT

Accadémie Tchécoslovaque des Sciences
Institut de Théorie de l'Information et automaton

Ce travail présente un modèle de régulation d'un système simple caractérisé uniquement par un retard fixé de transport. Dans le système on suppose la présence d'une perturbation stationnaire et ergodique à fonction de corrélation exponentielle.

Deux types de régulateur sont considérés: le régulateur proportionnel et le prédicteur linéaire. Ces régulateurs sont optimisés par la minimisation de la valeur moyenne des carrés des erreurs de sortie.

On définit le coefficient d'amélioration de la régulation et l'efficacité de la régulation, qui donnent la possibilité de comparer la qualité de régulation soit pour divers régulateurs, soit pour différentes fonctions de corrélation de la perturbation.

Dans les circuits de régulation, les grandeurs d'entrée ainsi que les perturbations ont un caractère aléatoire, qui possède d'habitude des qualités statistiques stables, ou au moins peu variables dans le temps. Ces qualités peuvent être exploitées dans des projets de régulateurs.

Cette contribution traite le cas d'un circuit simple de régulation, en exploitant les qualités statistiques de la perturbation.

Le problème est traité dans le temps discret, ce qui rend plus faciles les calculs numériques de trajectoires dans le modèle de régulation. Toutes les grandeurs changent discrètement en fonction du temps; on note la suite respective des valeurs par des indices $n = 1, 2, 3, \dots$

1 - DESCRIPTION DU MODELE

La figure 1 représente le schéma du circuit de régulation. Le système est caractérisé par un simple retard de transport de k pas (k est un nombre entier positif).

(1) Ce travail a été inspiré par M. A. Špaček, membre de l'Académie Tchécoslovaque des Sciences et vice-directeur de l'Institut de théorie de l'information et d'automaton, mort le 24 Octobre 1961.

SYSTEME REGLE

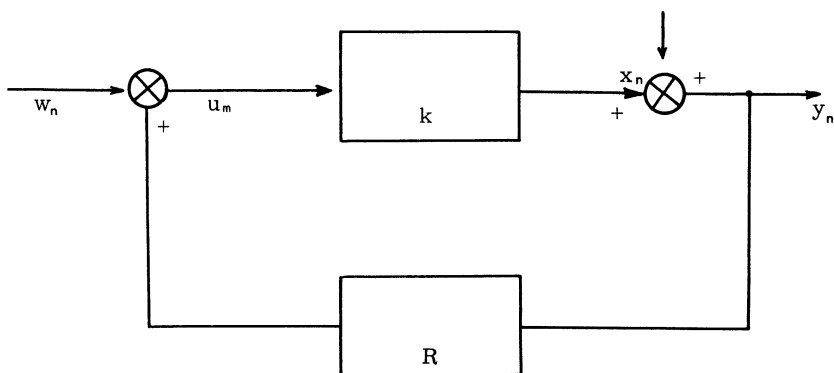


Figure 1

Circuit de régulation avec retard de temps de k pas.

Soit x_n la perturbation. La sortie du système est donnée par

$$y_n = x_n + u_{n-k} \quad (1)$$

Dans le système entre le signal d'entrée,

$$u_n = w_n + R(y_{n-k}, y_{n-(k+1)}, \dots), \quad (2)$$

où w_n est l'entrée dans le circuit de régulation et $R(y_{n-k}, y_{n-(k+1)}, \dots)$ est la sortie du régulateur.

Supposons que le régulateur conserve dans sa mémoire toutes les valeurs passées de sortie y_m , ($m \leq n-k$), qui sont nécessaires pour calculer la valeur u_n .

Pour simplifier, nous supposons :

$$w_n = 0 \quad (3)$$

pour tous les n . Cette hypothèse couvre également un cas très fréquent dans la pratique, celui où

$$w_n = \text{const.}$$

Ce cas se ramène au cas étudié en soustrayant cette constante de la sortie y_n .

Supposons que la perturbation x_n produite dans le circuit réglé ait des caractéristiques connues (notamment la valeur moyenne et la fonction de corrélation) ; supposons également que la perturbation soit stationnaire et ergodique ; supposons enfin, pour simplifier les calculs suivants, que la valeur moyenne $E(x_n)$ soit nulle. Ces hypothèses sont en principe correctes pour presque tous les cas qui se présentent dans la pratique.

Le signal d'entrée du système réglé devient maintenant

$$u_n = R(y_{n-k}, y_{n-(k+1)}, y_{n-(k+2)}, \dots). \quad (4)$$

Comme critère de régulation, on utilisera la valeur moyenne des carrés de sortie y_n , c'est-à-dire que l'on cherchera les valeurs des paramètres du régulateur, pour lesquelles

$$E(y_n^2) = \min. \quad (5)$$

A partir de cette condition, nous déterminerons la fonction R.

Un examen plus détaillé du modèle simple cité sera effectué pour le cas suivant de perturbation :

$$x_n = z_n + \gamma x_{n-1}, \quad (6)$$

où $0 < \gamma < 1$ et $\{z_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, qui acquièrent deux valeurs $+1$ ou -1 , avec une probabilité $1/2$. La valeur moyenne de la variable aléatoire z_n est alors nulle, et la dispersion $\sigma^2(z_n) = 1$.

Pour la perturbation x_n on trouve facilement la valeur moyenne :

$$E(x_n) = 0, \quad (7)$$

la dispersion :

$$\sigma^2(x_n) = E(x_n^2) = \frac{1}{1 - \gamma^2} \quad (8)$$

et la covariance :

$$E(x_n x_{n-r}) = \frac{\gamma^{|r|}}{1 - \gamma^2} \quad ; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

La fonction de corrélation normalisée est donnée par :

$$B(r) = \frac{E(x_n x_{n+r})}{\sigma^2(x_n)} = \gamma^{|r|} \quad ; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

La fonction de corrélation de la perturbation considérée est alors exponentielle, car

$$\gamma^{|r|} = e^{|r| \log \gamma}. \quad (11)$$

2 - REGULATEUR PROPORTIONNEL

Comme premier cas, considérons un régulateur proportionnel dont le schéma est donné dans la figure 2. L'équation (2) devient :

$$u_n = \alpha y_n \quad (12)$$

et l'équation pour sortie y_n prend la forme

$$y_n = x_n + \alpha y_{n-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_{n-ik}. \quad (13)$$

Pour une perturbation x_n avec valeur moyenne nulle, on a en outre pour la valeur moyenne de sortie

$$E(y) = 0. \quad (14)$$

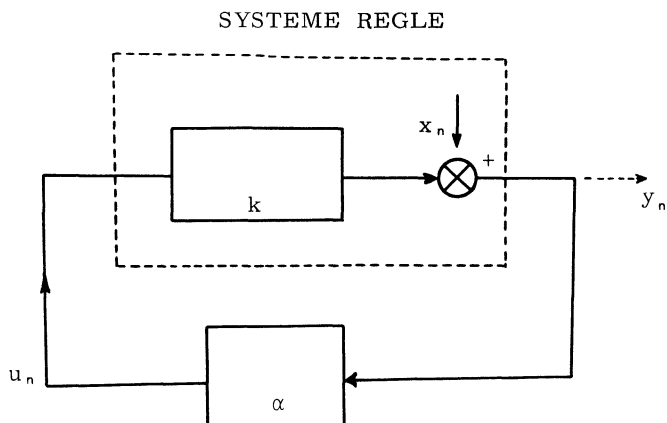


Figure 2 - Régulation proportionnel.

Pour le cas de perturbation de forme (6), la dispersion de la sortie est

$$E(y_n^2) = \frac{1 + \alpha \gamma^k}{(1 - \gamma)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha \gamma^k)} \quad (15)$$

La condition de minimisation de la sortie (5) s'écrit pour un régulateur proportionnel

$$\frac{\partial E(y_n^2)}{\partial \alpha} = 0, \quad (16)$$

d'où il résulte que α est une racine de l'équation cubique

$$\alpha^3 + \frac{\alpha^2}{\gamma^k} - \frac{\alpha}{\gamma^{2k}} - \frac{1}{\gamma^k} = 0. \quad (17)$$

Une seule racine de l'équation remplit la condition naturelle de stabilité

$$|\alpha| < 1 \quad (18)$$

et cette racine statisfait aussi à l'exigence évidente

$$\alpha \leq 0. \quad (19)$$

Pour déterminer le coefficient permettant un réglage optimum du régulateur proportionnel, un nomogramme a été construit (fig. 3).

Une version de la perturbation x_n pour $\gamma = 0,99$ ainsi que la sortie y_n du circuit avec un régulateur proportionnel pour un retard $k = 10$ sont présentées sur les figures 4 a et 4 b. Dans ce cas, on a $\alpha = -0,741$. Pour le calcul de y_n on a supposé que $x_n = 0$ pour $n \leq 0$.

3 - PREDICTEUR LINEAIRE

Traitions maintenant le second mode de régulation - le prédicteur linéaire d'après A.N. Kolmogoroff et N. Wiener.

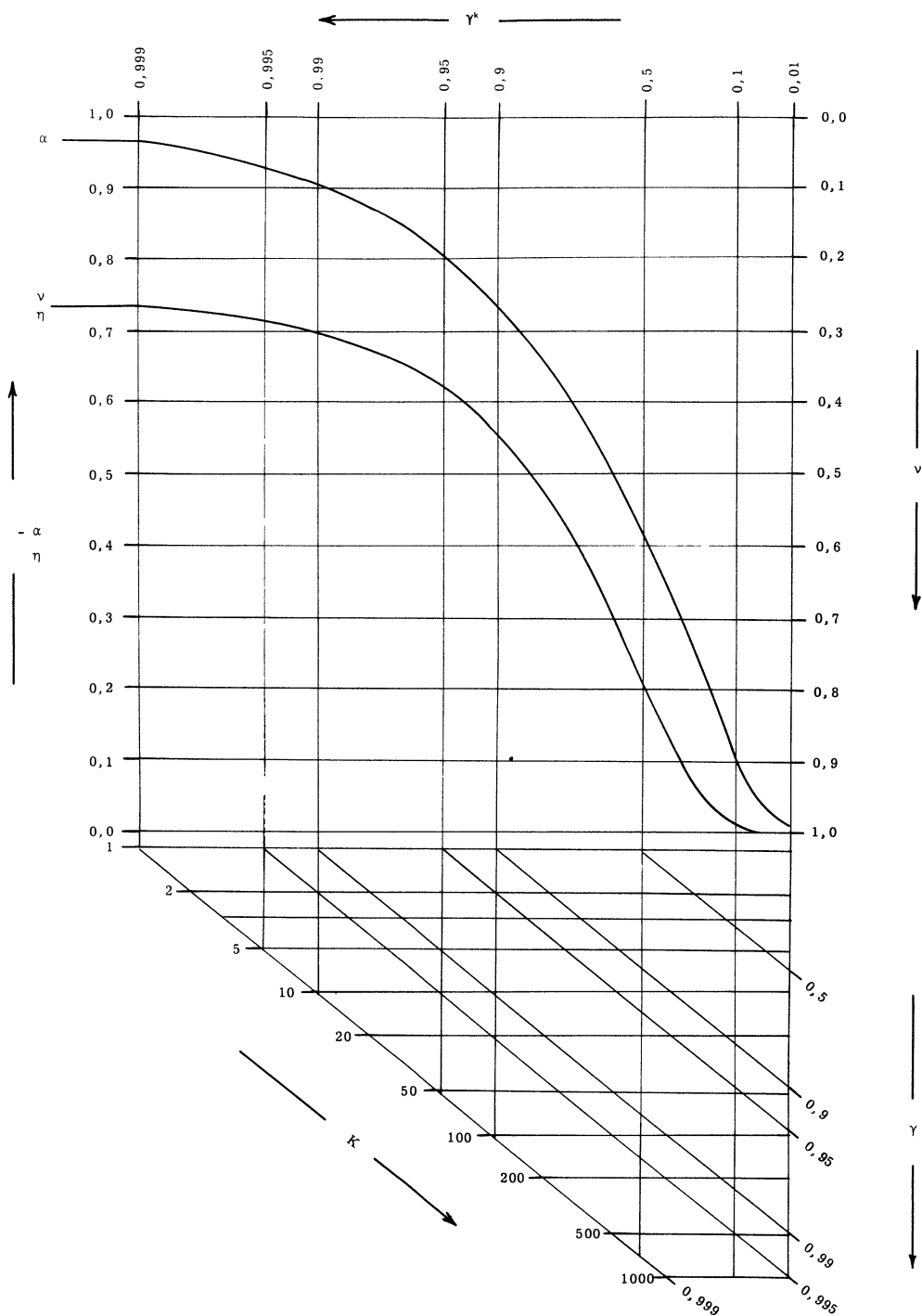


Fig. 3

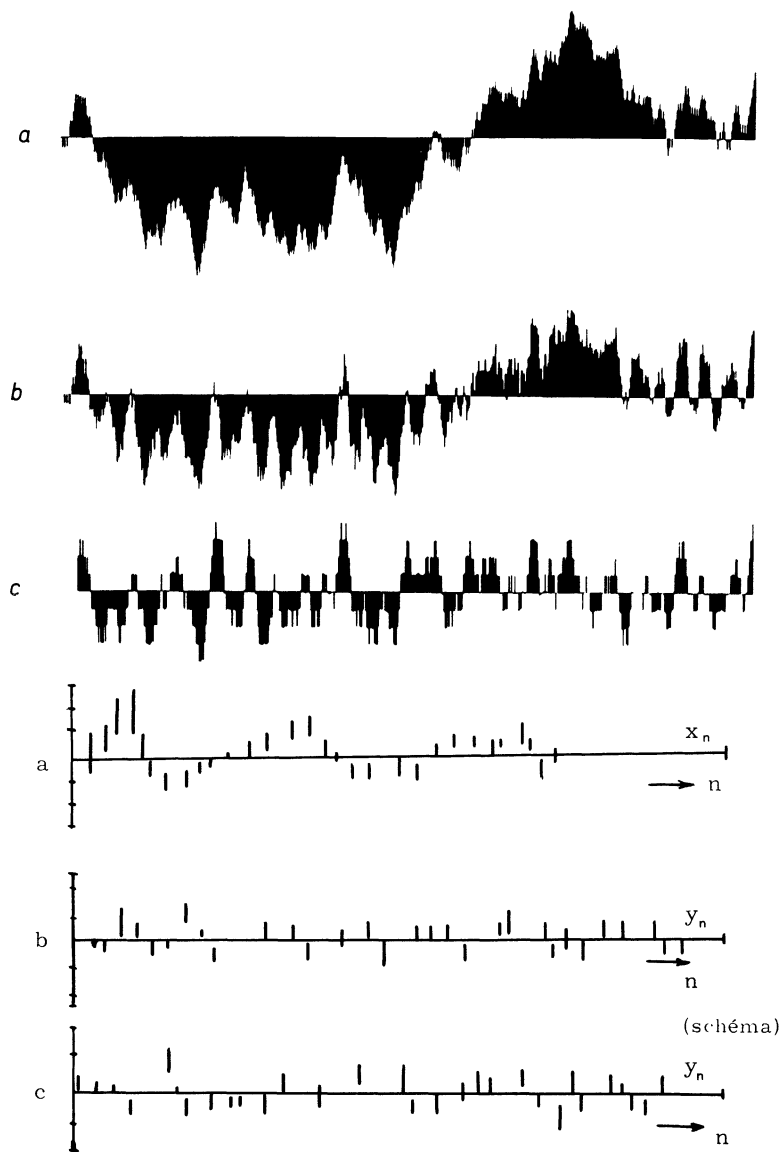


Figure 4 -

- a) perturbation x_n pour $\gamma = 0,99$
- b) sortie y_n du circuit avec un régulateur proportionnel pour un retard $k = 10$
- c) sortie y_n du circuit avec un prédictor linéaire pour un retard $k = 10$.

La prédiction linéaire suppose que l'entrée du système u_n soit une combinaison linéaire de m valeurs de la perturbation $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-(m-1)}$. La perturbation est supposée stationnaire et ergodique. La sortie du système réglé sera

$$y_n = x_n + \beta_1 x_{n-k} + \beta_2 x_{n-(k+1)} + \dots + \beta_m x_{n-(k+m-1)}. \quad (20)$$

Pour la perturbation définie en (6), et pour la condition de minimisation (5), on obtient après des calculs simples :

$$\beta_i = 0, \quad 2 \leq i \leq m, \quad (21)$$

$$\beta_1 = -\gamma^k.$$

Dans le cas de perturbation exponentielle, la prédiction linéaire est très simple. En comparant les expressions (21) et (10), on voit que :

$$\beta = \beta_1 = -B(k). \quad (22)$$

Par substitution dans (20), on obtient l'équation du prédicteur linéaire :

$$y_n = x_n + \beta x_{n-k} = x_n - B(k) x_{n-k}. \quad (23)$$

• Le schéma du prédicteur linéaire est indiqué sur la figure 5, d'où l'on obtient les relations suivantes :

$$u_n = \beta x_n, \quad (24)$$

$$y_n - u_{n-k} = x_n + \beta x_{n-k} - \beta x_{n-k} = x_n. \quad (25)$$

La figure 4 c montre la sortie y_n du système réglé par un prédicteur linéaire pour la même version de perturbation x_n que dans le cas du régulateur proportionnel et pour la même valeur de retard $k = 10$. Ici on a $\gamma = 0,99$ et $B(10) = 0,99^{10} = 0,904$.

4 - EFFICACITE DE REGULATION

En comparant les sorties du circuit réglé, d'une part, par un régulateur proportionnel (fig. 4b) et, d'autre part, par le prédicteur linéaire (fig. 4c), on voit que le prédicteur linéaire donne de meilleurs résultats. Pour une comparaison objective, nous introduisons la mesure suivante d'amélioration de la régulation

$$\nu = \frac{E(y_n^2)}{E(x_n^2)}, \quad (26)$$

que nous appellerons coefficient d'amélioration et dont la valeur indique de combien diminue la valeur moyenne des carrés de la sortie du système réglé en comparaison avec celle d'un système non réglé. Pour une régulation idéale, $\nu = 0$.

De façon semblable, nous définissons l'efficacité de la régulation

$$\eta = \frac{E(x_n^2) - E(y_n^2)}{E(x_n^2)} = 1 - \nu \quad (27)$$

Dans le cas idéal $\eta = 1$. Pour une qualité inférieure de régulation, η diminue et atteint la valeur zéro lorsqu'il n'y a pas de régulation. Cette définition correspond à la conception usuelle d'efficacité.

Dans le cas d'une perturbation ayant la forme indiquée en (6), on obtient pour le régulateur proportionnel les expressions

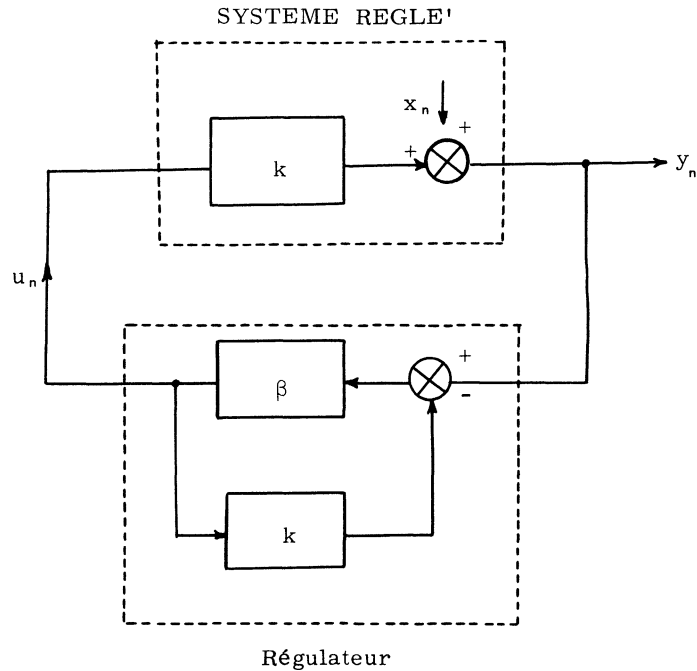


Figure 5 - Prédiction linéaire.

$$v_{R.P.} = \frac{1 + \alpha \gamma^k}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha \gamma^k)}, \quad (28)$$

$$\eta_{R.P.} = 1 - \frac{1 + \alpha \gamma^k}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha \gamma^k)} \quad (29)$$

et pour le prédicteur linéaire

$$v_{P.L.} = 1 - \gamma^{2k}. \quad (30)$$

$$v_{P.L.} = \gamma^{2k}. \quad (31)$$

Pour le régulateur proportionnel, on peut lire les valeurs du coefficient d'amélioration $v_{R.P.}$ et de l'efficacité de la régulation $\eta_{R.P.}$ sur le nomogramme (fig. 3), où les valeurs sont données en fonction des paramètres γ et k .

Pour le cas correspondant à la figure 4, c'est-à-dire pour $\gamma = 0,99$ et $k = 10$, on obtient pour le régulateur proportionnel

$$v_{R.P.} = 0,439,$$

$$\eta_{R.P.} = 0,561$$

et pour le prédicteur linéaire

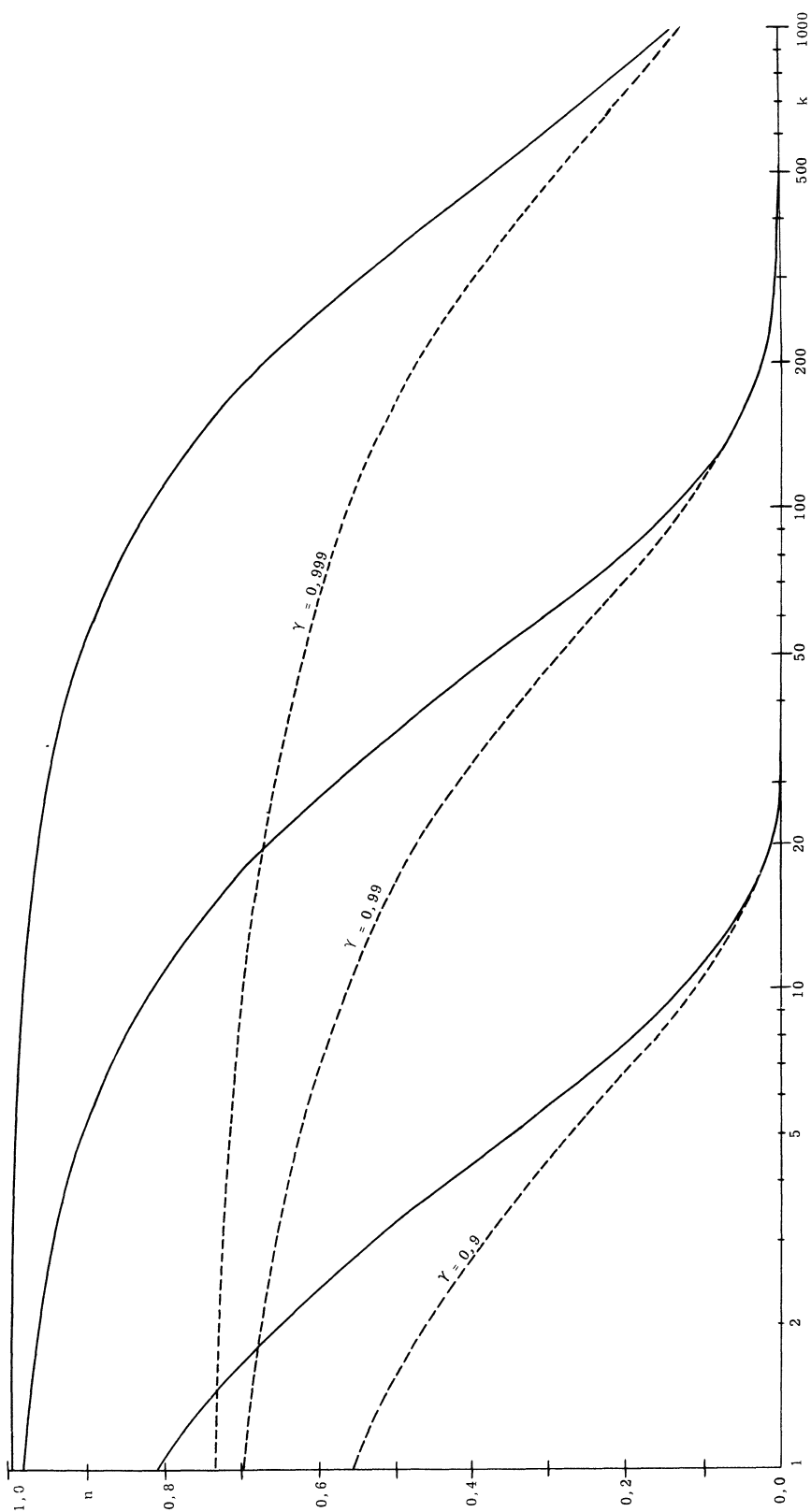


Figure 6.

— prédicteur linéaire
 - - - - - régulateur proportionnel

$$v_{p.l.} = 0,182,$$

$$\eta_{p.l.} = 0,818.$$

La régulation par un prédicteur linéaire apparaît donc comme essentiellement meilleure.

La figure 6 montre la variation de l'efficacité de régulation η en fonction de k pour différentes valeurs du paramètre γ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WIENER N. - Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New-York, 1949.
- [2] ULLRICH M. - Electronic generators of random signals of simulation of fluctuations in automatic control. ISA Proceedings 1959, 14, 2, 106-59-1.