

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. ULMO

**Définition. Conditions d'existence et construction
d'intervalles de confiance pour un paramètre de la
distribution d'une variable aléatoire**

Revue de statistique appliquée, tome 9, n° 4 (1961), p. 13-52

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_4_13_0

© Société française de statistique, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉFINITION — CONDITIONS D'EXISTENCE ET CONSTRUCTION D'INTERVALLES DE CONFIANCE POUR UN PARAMÈTRE DE LA DISTRIBUTION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

J. ULMO

Chef du Service
Statistique à l'I.R.S.I.D.

L'estimation d'un paramètre caractéristique d'une loi de probabilité de type connu (loi binomiale, loi normale, loi de Poisson, etc.) conduit à rechercher pour la vraie valeur inconnue de ce paramètre un intervalle appelé "intervalle de confiance".

Ceci correspond à une notion qui paraît intuitivement assez simple : il s'agit de déterminer pour le paramètre inconnu ϑ un intervalle $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tel qu'il soit vraisemblable de penser que l'on n'a que peu de chances de se tromper en disant que ϑ est compris entre ϑ_1 et ϑ_2 , ou encore tel qu'il soit peu probable que l'hypothèse que ϑ soit extérieur à $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ soit compatible avec les observations faites.

Cette notion doit cependant être précisée notamment par la fixation des degrés de vraisemblance ou de probabilité auxquels il a été fait allusion ci-dessus. Mais cette précision ne suffit pas à rendre immédiate la construction des intervalles de confiance et certains lecteurs de cette revue se sont certainement trouvés embarrassés par la définition et plus encore par la construction d'intervalles de confiance à un niveau donné pour la proportion de défectueux d'un lot ou plus généralement pour le paramètre d'une distribution binomiale ou de Poisson.

Nous nous sommes efforcés de faire une mise au point aussi complète que possible sur la question, en nous limitant au cas où l'on ne considère qu'un seul paramètre à la fois. Nous espérons que l'exposé systématique qui suit, dont la lecture exige une certaine attention, satisfera l'esprit de rigueur et la curiosité de ceux des lecteurs de cette revue qui se sont posé des questions sur le sujet traité, et qu'une meilleure connaissance des notions de base leur permettra de manier avec une plus grande maîtrise les "outils" (tables et abaquages) que la technique statistique courante met à leur disposition dans ce domaine.

RÉSUMÉ

Après avoir donné la définition de ce qu'on entend par intervalle de confiance à un niveau donné $P = 1 - \alpha$ pour le paramètre ϑ dont dépend la distribution de son estimateur X , on se préoccupe de construire de tels intervalles et par cela même de discuter de leur existence.

On est amené à considérer d'abord une classe particulière d'intervalles de confiance, ceux qui sont bornés par des "limites de confiance" inférieure et supérieure à des risques donnés α_1 et α_2 positifs ou nuls et tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Le chapitre III est ainsi entièrement consacré à l'étude des conditions d'existence des limites de confiance à un risque donné pour ϑ .

Après avoir indiqué que pour que la recherche même d'intervalles et de limites de confiance ait un sens, il faut que la fonction de répartition de X , $F(x, \vartheta)$ soit pour toute valeur possible de X une fonction monotone de ϑ que l'on supposera non croissante, on montre que pour qu'il existe une limite inférieure (ou supérieure) de confiance pour ϑ à un risque α donné, il est nécessaire qu'il existe pour toute valeur possible de ϑ une limite supérieure (ou inférieure) de probabilité pour X au même risque.

On en déduit qu'il n'existe pas de limites de confiance et pas non plus d'intervalles de confiance à un risque donné pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète (cf. III. B/ et VI. A/).

Les limites et les intervalles de confiance que l'on a l'habitude d'utiliser pour de tels paramètres et notamment pour la proportion de défectueux d'un lot correspondent à des risques variables avec la valeur du paramètre inconnu et seulement inférieurs ou égaux aux risques nominaux indiqués.

L'étude des conditions d'existence et la détermination de telles limites et intervalles de confiance font l'objet du chapitre VII tandis que dans le chapitre IV on étudie l'existence et la construction des limites inférieure et supérieure de confiance à un risque donné pour ϑ , quand son estimateur X est une variate absolument continue, la méthode employée permettant d'étudier aisément le cas où X serait continue mais non absolument continue.

On montre que la limite inférieure (ou supérieure) de confiance au risque α_1 (ou α_2) pour ϑ ne peut être que la fonction inverse de la limite supérieure (ou inférieure) de probabilité au même risque pour X , pour toute valeur de X pour laquelle cette fonction inverse se trouve définie (cf. IV. A/).

On discute alors systématiquement l'existence des limites de confiance à un risque donné pour ϑ en considérant tous les cas possibles. On en conclut (cf. IV. E/) que pour qu'il existe des limites inférieure (ou supérieure) de confiance de type (N) à un risque donné quelconque pour ϑ il faut et suffit que la fonction de répartition de X soit pour toute valeur de X une fonction de ϑ continue à droite (ou à gauche) et que les limites supérieures (ou inférieures) de probabilité pour X à un risque donné quelconque ne soient pas bornées supérieurement (ou inférieurement) par autre chose que la borne supérieure (ou inférieure) de l'intervalle de variation de X . Ceci ne peut être réalisé que si ϑ n'atteint pas sa borne supérieure (ou inférieure).

Cette étude approfondie de l'existence et de la construction des limites de confiance à un risque donné pour ϑ est suivie par la définition des limites fiducielles inférieure et supérieure à un risque donné pour ϑ et l'étude de leurs conditions d'existence et de leur construction (cf. chapitre V). Cette étude sera utilisée au chapitre VII pour la construction de limites et d'intervalles de confiance approchés par défaut à des risques donnés pour le paramètre de la distribution d'une variable discrète.

On montre que pour que l'on puisse associer à une valeur x de X une limite fiducielle inférieure (ou supérieure) à un risque donné pour ϑ il faut et suffit qu'il existe une valeur ϑ telle que cette valeur x soit limite supérieure (ou inférieure) de probabilité de type (F) au même risque pour X . Les conditions d'existence pour toute valeur de X des limites fiducielles à un risque donné pour ϑ sont alors différentes des conditions d'existence des limites de confiance correspondantes.

C'est ainsi que rien ne s'oppose à l'existence de limites fiducielles à un risque donné pour le paramètre de la distribution d'une variable discrète. De façon plus précise pour que l'on puisse associer à toute valeur x de X une limite fiducielle inférieure (ou supérieure) à un risque donné quelconque pour ϑ il faut et suffit :

1/ Que l'intervalle de variation de ϑ soit illimité ou ouvert et que la fonction de répartition de X soit, pour toute valeur possible de X distincte de sa borne supérieure éventuelle x_s , une fonction continue de ϑ dont le domaine de variation comprenne l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

2/ Si X est une variable discrète que son intervalle de variation soit illimité à gauche (ou à droite). Les limites fiducielles inférieures ne sont en effet pas définies pour la borne inférieure x_i de X , tandis que les limites fiducielles supérieures ne sont pas définies pour la borne supérieure x_s de X .

Si X est une variable absolument continue les limites fiducielles sont alors confondues avec les limites de confiance de type (F) correspondantes dont les conditions 1/ assurent l'existence, tandis que si X est une variable discrète la limite fiducielle inférieure au risque α_1 associée à x_j est la plus grande valeur de ϑ telle que x_{j-1} soit quantile d'ordre $1 - \alpha_1$ et la limite fiducielle supérieure au risque α_2 est la plus petite valeur de ϑ telle que x_j soit quantile d'ordre α_2 .

On aborde ensuite au chapitre VI la recherche d'intervalles de confiance à un niveau $P = 1 - \alpha$ donné pour ϑ dont les bornes ne soient pas des limites de confiance à des risques fixés α_1 et α_2 pour ϑ . On montre qu'une condition nécessaire d'existence d'intervalles de confiance au risque α pour ϑ est l'existence pour toute valeur possible de ϑ d'une limite supérieure et d'une limite inférieure de probabilité pour X à des risques $\alpha_1(\vartheta) > 0$ et $\alpha_2(\vartheta) > 0$ tels que $\alpha_1(\vartheta) + \alpha_2(\vartheta) = \alpha$.

On donne des indications relatives à la construction de ces intervalles de confiance et on en conclut qu'il n'est pas possible de définir des intervalles de confiance à un risque fixé pour le paramètre de la distribution d'une variable discrète.

La dernière partie de l'exposé (chapitre VII) est consacrée à la construction d'intervalles de confiance à un risque au plus égal à α fixé pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable discrète.

On montre que, si la fonction de répartition de X est pour toute valeur de X sauf sa borne supérieure éventuelle x_s une fonction continue et non

croissante du paramètre ϑ dont l'intervalle de variation contient l'intervalle ouvert $]0, 1[$, ce qui implique que l'intervalle de variation de ϑ soit ouvert ou illimité à gauche et à droite, il existe des limites inférieure et supérieure de confiance de type (N) pour ϑ à des risques, au plus égaux à des valeurs α_1 et α_2 fixées quelconque.

Les mieux approchées de ces limites sont pour toute valeur de X à l'exception de x_i pour la limite inférieure et de x_s pour la limite supérieure, confondues avec les limites fiducielles aux risques α_1 et α_2 correspondantes. Pour $X = x_i$, la limite inférieure approchée est la borne inférieure des valeurs de ϑ . De même pour $X = x_s$, la limite supérieure approchée est la borne supérieure des valeurs de ϑ .

On termine en indiquant comment les graphes de limites de confiance approchées pour ϑ peuvent être utilisés pour déterminer des limites de probabilité approchées pour X .

SOMMAIRE

	Pages
I - INTRODUCTION DE QUELQUES NOTIONS GENERALES A PARTIR D'UN EXEMPLE SIMPLE	18
II - DEFINITION D'UN INTERVALLE DE CONFIANCE AU NIVEAU $P = 1 - \alpha$ (OU AU RISQUE α) ET DES LIMITES INFERIEURE ET SUPERIEURE DE CONFIANCE AUX RISQUES α_1 ET α_2 POUR LE PARAMETRE ϑ DONT DEPEND LA DISTRIBUTION DE SON ESTIMATEUR X	20
II.A/ Définition d'un intervalle de confiance au niveau $P = 1 - \alpha$ pour ϑ	20
II.B/ Définition des limites inférieure et supérieure de confiance à un risque donné pour ϑ	21
III - CONDITIONS D'EXISTENCE DES LIMITES DE CONFIANCE A DES RISQUES DONNES POUR ϑ	22
III.A/ Conditions pour que le problème ait un sens	22
III.B/ Nécessité de l'existence de limites de probabilité pour X pour toute valeur possible de ϑ	23
IV - CONSTRUCTION DES LIMITES DE CONFIANCE POUR ϑ DANS LE CAS OU SON ESTIMATEUR X EST UNE VARIABLE ALEATOIRE ABSOLUMENT CONTINUE	25
IV.A/ Cas où la fonction de répartition de X est pour toute valeur de X, une fonction décroissante et continue de ϑ	25
IV.B/ Cas où la fonction de répartition de X est pour toute valeur de X une fonction non croissante et continue de ϑ	28
IV.C/ Cas où la fonction de répartition de X est une fonction décroissante mais non continue de ϑ	30
IV.D/ Examen des cas où les intervalles de variation de ϑ ou X sont limités	32
IV.E/ Conclusions du chapitre IV	39
V - LIMITES FIDUCIELLES A UN RISQUE DONNE POUR ϑ	40
V.A/ Définition des limites fiducielles inférieure et supérieure à un risque donné pour le paramètre ϑ	40
V.B/ Conditions d'existence des limites fiducielles	42
VI - RECHERCHES D'INTERVALLES DE CONFIANCE AU NIVEAU $P = 1 - \alpha$ POUR ϑ DONT LES BORNES NE SOIENT PAS DES LIMITES DE CONFIANCE A DES RISQUES FIXES α_1 ET α_2 POUR ϑ	45
VI.A/ Condition nécessaire d'existence d'intervalles de confiance au risque α pour ϑ	45
VI.B/ Construction d'intervalles de confiance fermés à un risque α fixé pour le paramètre de la distribution d'une variable continue	46

	Pages
VII - CONSTRUCTION D'INTERVALLES DE CONFIANCE A UN RIS- QUE AU PLUS EGAL A α POUR LE PARAMETRE DE LA LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE DISCRETE	47
VII.A/ Principe	47
VII.B/ Construction de limites de confiance inférieure et su- périeure de type (N) à des risques au plus égaux à des valeurs fixées α_1 et α_2 , à partir des limites fiduciel- les correspondant à ces risques	48
VII.C/ Utilisation des graphes de limites de confiance appro- chées pour ϑ pour déterminer des limites de probabi- lité approchées pour X	52

I - INTRODUCTION DE QUELQUES NOTIONS GENERALES A PARTIR D'UN EXEMPLE SIMPLE -

Nous rappellerons que l'estimation du paramètre inconnu ϑ d'une distribution s'obtient à partir d'une certaine fonction des observations appelée estimateur de ce paramètre.

On sait que l'estimateur le plus généralement utilisé pour la moyenne d'une distribution est la moyenne $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ de l'échantillon, et que la proportion de défectueux observée dans l'échantillon est un estimateur du paramètre d'une distribution binomiale. (C'est encore la moyenne de l'échantillon si on affecte la valeur 0 aux pièces bonnes et la valeur 1 aux pièces défectueuses).

La première chose à faire pour déterminer un intervalle de confiance à un niveau donné pour ϑ consiste à choisir un estimateur convenable pour ce paramètre. Il n'entre pas dans l'objet de cet article de discuter du choix du meilleur estimateur.

Nous supposerons ce choix effectué et nous désignerons par X l'estimateur choisi pour ϑ . X étant une fonction des observations est une variable aléatoire dont la loi de probabilité dépend du paramètre inconnu ϑ et de l'effectif n de l'échantillon considéré. Nous supposerons que ϑ est le seul paramètre inconnu dont dépend la distribution de son estimateur X.

C'est ainsi que si on considère des échantillons issus d'une distribution normale de moyenne m inconnue, mais d'écart-type σ connu, on sait que l'estimateur $\bar{x}$ de m a une distribution normale de moyenne m, d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

On sait alors qu'on a par exemple une probabilité égale à 95% d'avoir :

$$m - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

On peut dire inversement que l'intervalle aléatoire :

$$\left[\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \quad \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

a une probabilité égale à 95% de contenir le paramètre inconnu m .

Cet intervalle est donc un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha = 95\%$ ou si on préfère au risque $\alpha = 5\%$ pour le paramètre inconnu m .

Mais même quand $\bar{x}$ et α sont donnés, l'intervalle de confiance pour m n'est pas unique. Nous avons en effet choisi pour $\bar{x}$ un intervalle de probabilité au risque α symétrique par rapport à m , ce qui nous a donné pour m un intervalle de confiance symétrique par rapport à $\bar{x}$. Ce choix qui paraît logique étant donné la symétrie de la distribution de $\bar{x}$ autour de m n'est cependant nullement obligatoire.

Il nous suffit de choisir deux valeurs t_1 et t_2 de la variable normale réduite t telles que l'on ait :

$$\begin{cases} \Pr\left(\bar{x} > m + t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha_1 \\ \Pr\left(\bar{x} < m - t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha_2^{(1)} \end{cases}$$

avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

pour avoir :

$$\Pr\left(m - t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m + t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ce qui permet de dire que l'intervalle aléatoire $\left[\bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ a une probabilité égale à $1 - \alpha$ de contenir le paramètre inconnu m . De façon plus précise on a :

$$\Pr\left(m < \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \Pr\left(m > \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha_2$$

L'intervalle symétrique autour de $\bar{x}$ correspond au cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Nous dirons que $m_1 = \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ qui est telle que $\Pr(m < m_1) = \alpha_1$ est la limite inférieure de confiance au risque α_1 pour m correspondant à la valeur observée $\bar{x}$ tandis que $m_2 = \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ qui est telle que $\Pr(m > m_2) = \alpha_2$ est la limite supérieure de confiance au risque α_2 pour m correspondant à la même valeur observée $\bar{x}$. Ce qui précède montre qu'à tout couple de limites de confiance m_1 et m_2 associées à $\bar{x}$ et telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ correspond un intervalle de confiance $[m_1, m_2]$ au risque α pour m .

(1) t_1 et t_2 sont telles que l'on ait $\Pr(|t| > t_1) = 2\alpha_1$ et $\Pr(|t| > t_2) = 2\alpha_2$.

L'étude des intervalles de confiance à un risque donné α se ramène donc à l'étude des limites de confiance inférieure et supérieure à des risques α_1 et α_2 donnés tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Dans le cas présent on voit en outre que la donnée de α_1 et α_2 définit sans ambiguïté pour m l'intervalle de confiance au risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ associé à la valeur observée $\bar{x}$.

Nous allons voir qu'il n'en est pas toujours ainsi parce qu'on ne peut pas toujours associer à toute valeur observée de l'estimateur X des limites inférieure et supérieure de confiance à des risques donnés α_1 et α_2 pour le paramètre inconnu θ , soit parce que l'une ou l'autre de ces limites n'est pas définie de façon unique, soit parce qu'elles n'existent pas.

II - DEFINITION D'UN INTERVALLE DE CONFIANCE AU NIVEAU $P = 1 - \alpha$ (OU AU RISQUE α), ET DES LIMITES INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE DE CONFIANCE AUX RISQUES α_1 ET α_2 POUR LE PARAMÈTRE θ DONT DÉPEND LA DISTRIBUTION DE SON ESTIMATEUR X -

II.A/ Définition d'un intervalle de confiance au niveau $P = 1 - \alpha$ pour θ .

1/ Forme axiomatique.

C'est un intervalle aléatoire (θ_1, θ_2) limité par les fonctions $\theta_1 = f_1(X)$ et $\theta_2 = f_2(X)$ de l'estimateur X adopté pour le paramètre θ , ayant la probabilité P de contenir le paramètre inconnu θ .

Ceci revient à dire que si chaque fois que l'on obtient une valeur x pour un estimateur X on affirme que le paramètre θ dont dépend la distribution de X est contenu dans l'intervalle $[\theta_1(x), \theta_2(x)]$, on a une probabilité égale à $\alpha = 1 - P$ de se tromper.

2/ Forme fréquentiste.

C'est un intervalle (θ_1, θ_2) attaché à la valeur observée x de la variable aléatoire X qui doit jouir de la propriété suivante :

Si chaque fois qu'on observe une valeur x d'une variable aléatoire X , on affirme que le paramètre θ dont dépend la distribution de X est contenu dans l'intervalle $[\theta_1(x), \theta_2(x)]$, au bout d'un très grand nombre d'épreuves on se sera trompé en moyenne dans la proportion $\alpha = 1 - P$.

On voit que la forme fréquentiste de la définition est obtenue en définissant de façon fréquentiste la probabilité que l'intervalle aléatoire $[\theta_1(X), \theta_2(X)]$ contienne θ .

Remarque importante - Nous n'avons pas précisé dans la définition si les limites de l'intervalle (θ_1, θ_2) faisaient ou non partie de l'intervalle.

Sauf mention expresse du contraire nous considérerons que les limites θ_1 et θ_2 font partie de l'intervalle (θ_1, θ_2). Nous rappelons qu'un intervalle qui contient ses limites est dit fermé et noté $[\theta_1, \theta_2]$ tandis qu'un intervalle qui ne les contient pas est dit ouvert et noté $] \theta_1, \theta_2 [$. On peut également concevoir les intervalles mixtes $[\theta_1, \theta_2[$ et $] \theta_1, \theta_2]$ (le premier est fermé à gauche, ouvert à droite; le deuxième est ouvert à gauche, fermé à droite).

Les intervalles de confiance fermés sont parfois appelés intervalles de type (N) (ou de Neyman) par opposition aux intervalles ouverts ou de type (F) étudiés par Fisher.

On remarquera que dans l'exemple traité en I il n'est pas nécessaire de préciser si l'on considère des intervalles ouverts ou des intervalles fermés puisque la distribution de $\bar{x}$ est absolument continue.

II. B/ Définition des limites inférieure et supérieure de confiance à un risque donné pour ϑ .

Les variables aléatoires $\vartheta_1(X)$ et $\vartheta_2(X)$ doivent être telles que l'on ait :

$$\mathfrak{P} [\vartheta_1(X) \leq \vartheta \leq \vartheta_2(X)] = P$$

et par suite

$$\mathfrak{P} [\vartheta < \vartheta_1(X) \text{ ou } \vartheta > \vartheta_2(X)] = 1 - P = \alpha$$

Comme les deux événements $\vartheta_1(X) > \vartheta$ et $\vartheta_2(X) < \vartheta$ s'excluent mutuellement puisque $\vartheta_1(X) < \vartheta_2(X)$, il vient :

$$\mathfrak{P} [\vartheta_1(X) > \vartheta] + \mathfrak{P} [\vartheta_2(X) < \vartheta] = \alpha \quad (1)$$

Tout couple de variables aléatoires $\vartheta_1(X)$, $\vartheta_2(X)$ tel que $\vartheta_1(X) < \vartheta_2(X)$ satisfaisant à la relation (1) définit un intervalle de confiance fermé au risque α pour ϑ .

On voit immédiatement que la condition (1) ne suffit pas à définir les fonctions $\vartheta_1(X)$ et $\vartheta_2(X)$. Il faut préciser la valeur que l'on désire attribuer à l'une des deux probabilités figurant au premier membre de (1).

On pourrait envisager de faire dépendre cette valeur de X mais ceci semble peu logique dans la mesure où on s'intéresse à chacun des deux événements $\vartheta < \vartheta_1(X)$ et $\vartheta > \vartheta_2(X)$ considérés individuellement et non seulement dans leur ensemble. Dans ce cas (le seul que nous considérerons pour le moment) on fait choix pour les deux probabilités figurant dans (1) de deux valeurs α_1 et α_2 indépendantes de x et telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

$\vartheta_1(X)$ et $\vartheta_2(X)$ doivent alors satisfaire aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P} [\vartheta_1(X) > \vartheta] = \alpha_1 \\ \mathfrak{P} [\vartheta_2(X) < \vartheta] = \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \end{array} \right. \quad (2)$$

Les fonctions $\vartheta_1(X)$ et $\vartheta_2(X)$ sont ainsi définies indépendamment l'une de l'autre. $\vartheta_1(X)$ est la limite inférieure de confiance au risque α_1 et $\vartheta_2(X)$ est la limite supérieure de confiance au risque α_2 .

Définitions - Une limite inférieure de confiance au risque α_1 donné pour ϑ associée à l'estimateur X de ϑ est une fonction aléatoire $\vartheta_1(X)$ ayant la probabilité α_1 de dépasser la valeur inconnue ϑ .

De même une limite supérieure de confiance au risque α_2 donné pour ϑ associée à l'estimateur X est une fonction aléatoire $\vartheta_2(X)$ ayant la probabilité α_2 d'être inférieure à la valeur inconnue ϑ .

Quand les intervalles de confiance au risque α que nous considérerons seront limités par des limites de confiances à des risques fixés α_1 et α_2 nous indiquerons ces deux risques en disant que $[\vartheta_1(X), \vartheta_2(X)]$ est un intervalle de confiance au risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ pour ϑ .

On peut notamment choisir $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = \alpha$ ce qui revient à prendre pour $\vartheta_1(X)$ la borne inférieure des valeurs possibles pour ϑ , c'est-à-dire

à ne pas limiter inférieurement l'intervalle de confiance pour ϑ . On dit qu'on a un intervalle de confiance unilatéral, à droite : il est limité supérieurement par $\vartheta_2(X)$ telle que :

$$\mathfrak{P} [\vartheta_2(X) < \vartheta] = \alpha$$

De même à $\alpha_2 = 0$ $\alpha_1 = \alpha$ correspond un intervalle de confiance unilatéral à gauche, limité inférieurement par $\vartheta_1(X)$ telle que :

$$\mathfrak{P} [\vartheta_1(X) > \vartheta] = P = 1 - \alpha$$

Dans l'exemple traité en I, la limite inférieure de confiance au risque α_1 pour m associée à x est la fonction $\vartheta_1(\bar{x}) = \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ où t_1 est définie par $\Pr(|t| > t_1) = 2\alpha_1$ tandis que la limite supérieure de confiance est la fonction $\vartheta_2(\bar{x}) = \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ où t_2 est définie par $\Pr(|t| > t_2) = 2\alpha_2$ et l'intervalle de confiance pour m , unilatéral à droite au risque α est l'intervalle $(-\infty, \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ où t_α est définie par $\Pr(|t| > t_\alpha) = 2\alpha$. Ces limites de confiance sont définies de façon unique pour toute valeur de α_1 ou α_2 inférieure à 0,5 (pour $\alpha_1 = 0$ on a $\vartheta_1(\bar{x}) = -\infty$ et pour $\alpha_2 = 0$ on a $\vartheta_2(\bar{x}) = +\infty$).

III - CONDITIONS D'EXISTENCE DES LIMITES DE CONFIANCE A DES RISQUES DONNES POUR ϑ -

III.A/ Conditions pour que le problème ait un sens.

Il importe de remarquer que les notions d'intervalle et de limites de confiance n'ont de sens que dans la mesure où la connaissance de la valeur x prise par X est susceptible de nous renseigner effectivement sur la valeur de ϑ .

Il faut donc que la loi de probabilité de X soit telle que l'on puisse penser que plus la valeur observée pour X est élevée, plus ϑ a de chances d'être élevé (ou au contraire faible).

De façon plus précise il faut que la fonction de répartition de X , $F(x, \vartheta)$ soit une fonction monotone non croissante (ou non décroissante de ϑ), afin que la probabilité d'observer une valeur de X inférieure à x_0 diminue, ou tout au moins n'augmente pas, quand ϑ augmente. (cf. figure III.A).

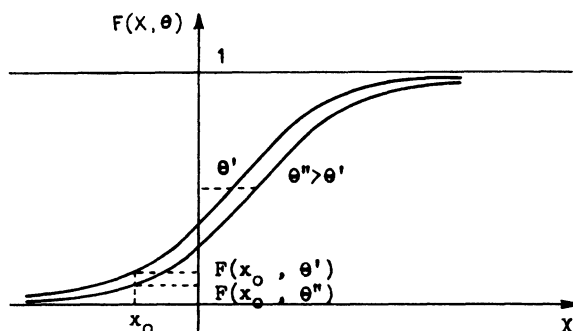


Figure III.A

Nous supposons donc dans tout ce qui suit que la fonction de répartition de $\bar{X}$ est une fonction monotone non croissante de $\vartheta(1)$. Il résulte des considérations qui précèdent que les fonctions $\vartheta_1(x)$ et $\vartheta_2(x)$ doivent être des fonctions non décroissantes de x .

La fonction de répartition $F(\bar{x}, m)$ de la moyenne $\bar{x}$ d'un échantillon de n observations issues d'une même population normale d'écart-type fixé σ est bien pour toute valeur $\bar{x}$ finie une fonction monotone décroissante de la moyenne inconnue m .

On a en effet $P(\bar{x} < x_0) = F(x_0, m) = G_0\left(\frac{x_0 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ en désignant par $G_0(t)$ la fonction de répartition d'une variable normale réduite.

Comme $G_0(t)$ est une fonction constamment croissante de t , $G_0\left(\frac{x_0 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ est une fonction constamment décroissante de m .

Par ailleurs les fonctions $\vartheta_1(\bar{x}) = \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et $\vartheta_2(\bar{x}) = \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ sont bien des fonctions croissantes de $\bar{x}$.

On peut également vérifier que les fonctions de répartition :

$$F(k, m) = e^{-m} \sum_{x=0}^k \frac{m^x}{x!} \quad \text{et} \quad F(k, p) = \sum_{x=0}^k C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

d'une variable de Poisson de paramètre m ou d'une variable binomiale de paramètre p sont des fonctions monotones décroissantes des paramètres m ou p pour toute valeur k possible de la variable.

III. B/ Nécessité de l'existence de limites de probabilité pour X pour toute valeur possible de ϑ .

Considérons la variable aléatoire $\vartheta_1(X)$ associée aux résultats des épreuves exécutées avec une valeur déterminée ϑ_0 du paramètre ϑ .

La loi de probabilité de $\vartheta_1(X)$ doit être telle que :

$$\mathfrak{P}[\vartheta_1(x) \leq \vartheta_0 / \vartheta = \vartheta_0] = 1 - \alpha_1 \quad (3)$$

(on doit avoir $\vartheta_1(x) > \vartheta_0$ avec une probabilité α_1). $\vartheta_1(x)$ étant une fonction non décroissante de x , il existe une valeur x_0 de X telle que :

$$\begin{cases} \vartheta_1(x) \leq \vartheta_0 & \text{si} & x \leq x_0 \\ \text{et} & \vartheta_1(x) > \vartheta_0 & \text{si} & x > x_0 \end{cases} \quad (4)$$

et la condition (3) est équivalente à : il doit exister une valeur x_0 de la variable aléatoire X telle que :

$$\mathfrak{P}[X \leq x_0 / \vartheta = \vartheta_0] = 1 - \alpha_1, \quad \text{soit} \quad \mathfrak{P}[X > x_0 / \vartheta = \vartheta_0] = \alpha_1 \quad (3')$$

En d'autres termes : la loi de probabilité de la variable aléatoire X doit être telle qu'elle admette quand $\vartheta = \vartheta_0$ un quantile d'ordre $1 - \alpha_1$ ou si on préfère une limite supérieure de probabilité au risque α_1 .

(1) Si elle était monotone non décroissante il suffirait de considérer le paramètre $\vartheta' = -\vartheta$.

Comme ceci doit être vrai pour toute valeur possible du paramètre ϑ nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 1 - Pour qu'il existe une limite inférieure de confiance au risque α_1 pour ϑ associée à X , il est nécessaire que pour toute valeur possible de ϑ il existe une limite supérieure de probabilité au risque α_1 pour X . De même pour qu'il existe une limite supérieure de confiance au risque α_2 pour ϑ il est nécessaire que pour toute valeur possible de ϑ il existe une limite inférieure de probabilité au risque α_2 pour X ⁽¹⁾.

Conséquences importantes -

1/ Il n'existe pas de limites de confiance à un risque donné pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète (prenant au plus une infinité dénombrable de valeurs).

En effet on sait que si X est une variable aléatoire discrète⁽²⁾ sa fonction de répartition est une fonction en escalier qui ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. X ne possède donc de limites de probabilité que pour les risques correspondant aux ordonnées (ou aux compléments à 1) des ordonnées de sa fonction de répartition. Comme ces ordonnées dépendent généralement en outre de ϑ , les conditions ci-dessus ne peuvent être, satisfaites⁽³⁾.

Il n'existe donc pas de limites de confiance à un risque déterminé pour le paramètre d'une distribution de Poisson ou d'une distribution binomiale et par suite pour la proportion de pièces défectueuses d'un lot.

Cette conclusion va sans doute étonner quelque peu le lecteur qui possède ou a eu entre les mains des tables ou des abaques permettant de déterminer des intervalles de confiance et même des limites de confiance à un risque donné pour ces paramètres. En fait ces intervalles et ces limites de

- (1) Les limites de probabilité dont il s'agit sont des limites incluses ou du type (N). Pour un intervalle de confiance à limites exclues ou du type (F) on voit immédiatement que la condition (3) devient :

$$\mathfrak{P}[\vartheta_1'(x) < \vartheta_0 / \vartheta = \vartheta_0] = 1 - \alpha_1 \quad (3'')$$

et que cette condition est équivalente à : il doit exister une valeur x_0 de x telle que :

$$\mathfrak{P}[X < x_0 / \vartheta = \vartheta_0] = 1 - \alpha_1 \quad \text{soit} \quad \mathfrak{P}[X \geq x_0 / \vartheta = \vartheta_0] = \alpha_1$$

On est alors conduit aux mêmes résultats mais les limites de probabilité dont il s'agit sont alors exclues ou de type (F). On notera également que x_0 est telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \vartheta_1'(x) < \vartheta_0 & \text{si } x < x_0 \\ \vartheta_1'(x) > \vartheta_0 & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (4')$$

- (2) On concevrait difficilement que X qui est une fonction de variables discrètes ne soit pas elle-même une variable discrète.
- (3) On pourrait imaginer que la distribution de X possède quel que soit ϑ certains quantiles (nécessairement au plus en infinité dénombrable). On pourrait alors envisager d'associer à ces quantiles particuliers des limites de confiance. Le problème nous semble toutefois dépourvu d'intérêt pratique parce qu'on ne voit pas bien comment justifier la discrimination nécessaire entre les risques privilégiés, qui sont au plus en infinité dénombrable rappelons-le, et les autres.

confiance correspondent non pas à des risques α , α_1 ou α_2 déterminés mais à des risques variables avec la valeur du paramètre inconnu ϑ et seulement voisins des risques nominaux indiqués. C'est du reste la raison pour laquelle les différentes tables ou abaque qui ont été publiées présentent entre elles des divergences, même une fois qu'on a précisé s'il s'agissait d'intervalles fermés ou ouverts.

Cette question de la détermination de limites et d'intervalles de confiance à un risque au plus égal au risque fixé, pour le paramètre de la distribution d'une variable discrète est l'objet de la dernière partie de notre exposé.

2/ Un raisonnement analogue montre que dans le cas où X est une variable non absolument continue⁽¹⁾ il se peut que pour certains risques il ne soit pas possible de déterminer des limites de confiance pour ϑ (on se trouvera dans ce cas si les ordonnées α_2 ou $1 - \alpha_1$ correspondent à des zones de discontinuité de la fonction de répartition de X).

IV - CONSTRUCTION DES LIMITES DE CONFIANCE POUR ϑ DANS LE CAS OU SON ESTIMATEUR X EST UNE VARIABLE ALEATOIRE ABSOLUMENT CONTINUE⁽²⁾ -

On a vu en III.B/ que si x_0 est la limite supérieure de probabilité au risque α_1 pour X quand $\vartheta = \vartheta_0$, la fonction $\vartheta_1(x)$ doit être telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vartheta_1(x) \leq \vartheta_0 & \text{pour } x \leq x_0 \quad [\text{ce qui implique que } \vartheta_1(x_0) \leq \vartheta_0] \\ \text{et } \vartheta_1(x) > \vartheta_0 & \text{pour } x > x_0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Si $\vartheta_1(x)$ est une fonction continue de x on doit avoir $\vartheta_1(x_0) = \vartheta_0$ pour toute valeur ϑ_0 possible pour ϑ .

La fonction $\vartheta_1(x)$ est donc étroitement liée à la fonction $x = \varphi_1(\vartheta)$ représentant les variations en fonction de ϑ de la limite supérieure de probabilité de X au risque α_1 ; nous allons voir qu'elle en est l'inverse pour toute valeur de X pour laquelle cette inverse est définie. Aussi allons-nous distinguer plusieurs cas suivant la nature de la fonction $x = \varphi_1(\vartheta)$ (continue et croissante, continue et non décroissante, discontinue, etc.) et par suite suivant la nature de la fonction de répartition de X , $F(x, \vartheta)$ considérée comme fonction de ϑ . Nous avons voulu considérer l'ensemble des cas possibles sans nous préoccuper de savoir s'ils avaient un intérêt pratique quelconque, afin de n'avoir plus à y revenir.

IV.A/ Cas où la fonction de répartition de X est pour toute valeur de cette variée une fonction décroissante et continue de ϑ .

Dans ce cas les courbes de répartition de X correspondant à des va-

(1) On rappelle qu'une variable aléatoire est dite absolument continue si sa fonction de répartition est continue ce qui revient à dire que la probabilité pour qu'elle appartienne à un intervalle infiniment petit est elle-même infiniment petite.

Au contraire une variable aléatoire continue est non absolument continue si sa fonction de répartition possède des points de discontinuité ou sauts (en infinité dénombrable), c'est-à-dire si elle a une probabilité finie, de prendre une ou plusieurs valeurs particulières.

(2) Il est facile d'étendre les résultats obtenus au cas d'une variable qui n'est pas absolument continue mais dont la distribution possède pour tout ϑ des limites de probabilité supérieure au risque α_1 et inférieure au risque α_2 .

leurs croissantes de ϑ sont situées les unes au-dessous des autres conformément à la figure IV.A. 1. Ces courbes ne peuvent pas se rencontrer car s'il existait une valeur y de X pour laquelle $F(y, \vartheta) = F(y, \vartheta')$ avec $\vartheta \neq \vartheta'$, $F(x, \vartheta)$ ne serait plus une fonction strictement décroissante de ϑ pour la valeur $x = y$.

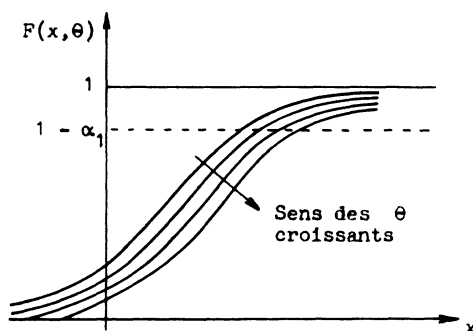


Figure IV.A. 1

Il est par contre toujours possible en raison de la continuité de $F(x, \vartheta)$ par rapport à ϑ de trouver des courbes de répartition aussi voisines que l'on veut d'une courbe donnée et situées à volonté au-dessus, ou au-dessous de cette courbe.

Les limites de probabilité sont alors des fonctions croissantes et continues de ϑ . Elles possèdent donc des fonctions inverses qui sont des fonctions croissantes et continues de x .

D'après ce qu'on vient de dire si on impose à la fonction $\vartheta_1(x)$ d'être une fonction continue de x ce ne peut être que la fonction $\vartheta = f_1(x)$ inverse de la fonction $x = \varphi_1(\vartheta)$.

C'est bien ce qu'on constate dans l'exemple traité en I où la limite supérieure de probabilité au risque α_1 pour $\bar{x}$ est la fonction $\bar{x} = m + t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dont l'inverse $m_1 = \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est on l'a vu la limite inférieure de confiance au risque α_1 pour m .

Nous allons montrer que la fonction $\vartheta = f_1(x)$ convient et que c'est la seule.

1/ La fonction $\vartheta = f_1(x)$ convient.

Il suffit de considérer à nouveau les résultats d'épreuves exécutées avec une valeur déterminée ϑ_0 de ϑ . Soit $x_0 = \varphi_1(\vartheta_0)$ la limite inférieure de probabilité au risque α_1 correspondante pour X .

La limite $\vartheta_1(x_s) = f_1(x_s)$ associée à une valeur x_s de X supérieure à x_0 sera supérieure à ϑ_0 et en affirmant que l'on a $\vartheta_1(x_s) \leq \vartheta_0$ on se trompera (cf. figure IV.A.2).

Au contraire la limite $\vartheta_1(x_1) = f_1(x_1)$ associée à une valeur x_1 de X au plus égale à x_0 sera au plus égale à ϑ_0 et en affirmant que $\vartheta_1(x_1) < \vartheta_0$ on ne se trompera pas.

La probabilité de se tromper c'est-à-dire d'avoir $\vartheta_1(X) > \vartheta_0$ est donc égale à la probabilité d'avoir $X > x_0$, soit α_1 d'après la définition même de x_0 . Comme ce raisonnement est valable pour toute valeur ϑ_0 du paramètre inconnu ϑ , la fonction $\vartheta = f_1(x)$ convient bien.

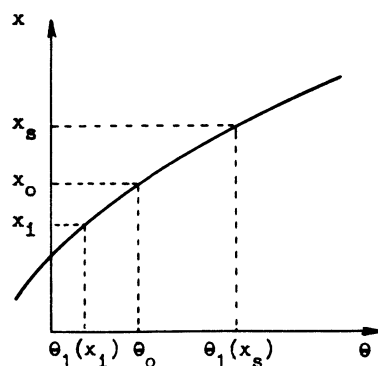


Figure IV. A. 2

2/ La fonction $\vartheta = f_1(x)$ est la seule qui convienne.

Soit $\vartheta = g(x)$ une limite inférieure de confiance au risque α_1 . Nous allons montrer que quand $f_1(x)$ est définie on a $g(x) = f_1(x)$.

Soit y une valeur particulière de X (que l'on peut choisir telle que l'on ait des raisons de penser que $g(y)$ diffère de $f_1(y)$). Posons $\vartheta'_y = g(y)$ et soit $z = \varphi_1(\vartheta'_y)$ la limite supérieure de probabilité de X au risque α_1 quand $\vartheta = \vartheta'_y$. (cf. figure IV. A. 3).

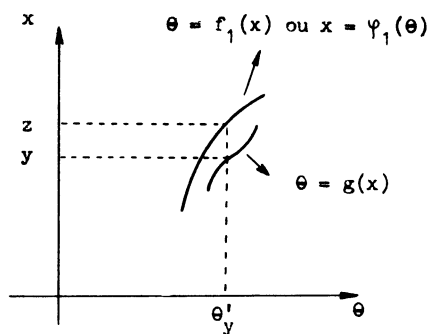


Figure IV. A. 3

Considérons alors les épreuves exécutées avec la valeur ϑ'_y de ϑ .

Le raisonnement fait en III. B/ montre que la fonction $g(x)$ doit être telle que :

$$\begin{cases} g(x) \leq \vartheta'_y = g(y) & \text{si } x \leq z \\ g(x) > \vartheta'_y = g(y) & \text{si } x > z \end{cases}$$

Mais $g(x)$ étant par hypothèse une fonction non décroissante de x on ne peut avoir $g(x) \leq g(y)$ que si $x \leq y$ et $g(x) > g(y)$ que si $x > y$. z doit donc être tel que :

$$\begin{aligned} x \leq z & \quad \text{entraîne} \quad x \leq y \\ \text{et } x > z & \quad \text{entraîne} \quad x > y \end{aligned}$$

La première condition implique que l'on ait $z \leq y$ et la deuxième que l'on ait $z \geq y$. On a donc $z = y$ et puisque par définition $\vartheta'_y = g(y)$ et $\vartheta'_y = f_1(z)$ si f_1 est définie pour $X = z$, $f_1(y) = g(y)$. La fonction $g(x)$ coïncide donc avec la fonction $f_1(x)$.

On notera que cette démonstration ne fait intervenir aucune hypothèse sur la nature de la fonction de répartition de X .

Nous énoncerons donc la :

Proposition II - La limite inférieure (ou supérieure) de confiance au risque α_1 (ou α_2) pour ϑ associée à l'estimateur X ne peut être que la fonction inverse de la limite supérieure (ou inférieure) de probabilité au risque α_1 (ou α_2) pour X , pour toute valeur de X pour laquelle cette fonction inverse se trouve définie.

Un raisonnement analogue montre que la fonction $\vartheta_2(x)$ donnant la limite supérieure de confiance au risque α_2 pour ϑ est bien la fonction inverse de la fonction $x = \varphi_2(\vartheta)$ donnant en fonction de ϑ la limite inférieure de probabilité au risque α_2 pour X .

On voit immédiatement que la recherche de limites de confiance exclues ou de type (F) conduit aux mêmes fonctions.

IV. B/ Cas où la fonction de répartition de X est pour toute valeur de ϑ une fonction non croissante et continue de ϑ .

Le raisonnement fait en IV. A/ montre que les fonctions de répartition correspondant à des valeurs croissantes de ϑ sont situées les unes en-dessous des autres mais peuvent cette fois se rencontrer conformément à la figure IV. B.1 où pour la valeur y de la variate X on a $F(y, \vartheta) = \text{cte} = 1 - \alpha_1$ pour $\tau_1 \leq \vartheta \leq \tau_2$.

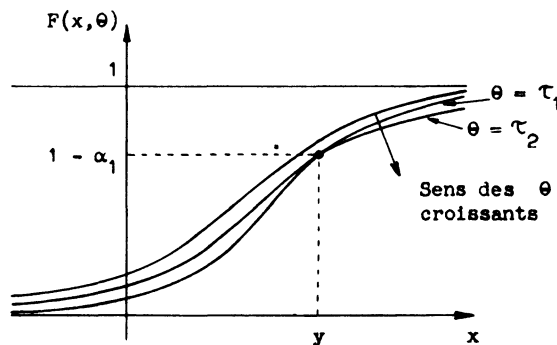


Figure IV. B. 1

Les limites de probabilité sont encore des fonctions continues de ϑ mais on peut seulement affirmer que ce sont des fonctions non décroissantes de ϑ , puisqu'à la figure IV. B.1 correspond une limite supérieure de probabilité au risque α_1 , $x = \varphi_1(\vartheta)$ qui prend la valeur y pour toute valeur ϑ comprise entre τ_1 et τ_2 (cf. figure IV. B. 2).

La fonction inverse de $\varphi_1(\vartheta)$ n'est alors pas définie pour les valeurs y de x correspondant à des paliers de $\varphi_1(\vartheta)$.

On a vu (cf. IV. A. 2) que la fonction $\vartheta_1(x)$ ne pouvait être que la fonction inverse de $x = \varphi_1(\vartheta)$ pour les valeurs de x pour lesquelles celle-ci est

définie. Pour que $\vartheta_1(x)$ soit définie pour toute valeur de x , il faut définir la valeur de $\vartheta_1(y)$.

$\vartheta_1(x)$ devant être une fonction non décroissante de x , $\vartheta_1(y)$ doit appartenir à l'intervalle (τ_1, τ_2) des valeurs de ϑ pour lesquelles y est limite de probabilité.

Les conditions (4) appliquées à ϑ_0 compris dans l'intervalle (τ_1, τ_2) et par suite $x_0 = y$, s'écrivent :

$$\begin{array}{lll} \vartheta_1(x) \leq \vartheta_0 & \text{pour} & x \leq y \\ \vartheta_1(x) > \vartheta_0 & \text{pour} & x > y \end{array} \quad \text{et notamment} \quad \vartheta_1(y) \leq \vartheta_0$$

La condition $\vartheta_1(y) \leq \vartheta_0$ ne peut être satisfaite pour toute valeur ϑ_0 de l'intervalle (τ_1, τ_2) que si on a $\vartheta_1(y) = \tau_1$. (Si on choisit $\vartheta_1(y) = \tau' > \tau_1$ pour toute valeur de ϑ_0 comprise entre τ_1 et τ' on aura $\vartheta_1(y) > \vartheta_0$). On est donc conduit à adopter pour limite inférieure de confiance la fonction $\vartheta = f_1(x)$ qui associe à x la plus petite valeur de ϑ telle que $x = \varphi_1(\vartheta)$. On remarquera que la fonction $\vartheta = f_1(x)$ est croissante mais peut être discontinue, ses points de discontinuité correspondant aux paliers de $x = \varphi_1(\vartheta)$.

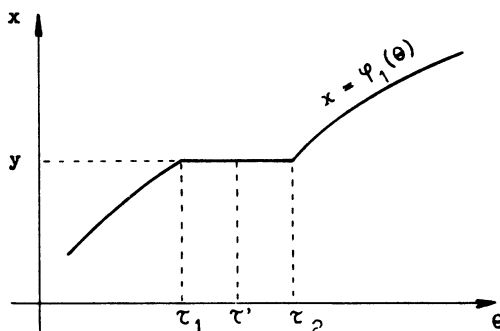


Figure IV.B.2

On peut montrer par un raisonnement identique à celui fait en IV.A.1/ que la fonction $f_1(x)$ convient.

Pour la détermination des limites de confiance exclues on montre de façon analogue à partir des conditions (4') que l'on doit prendre $\vartheta'_1(y) = \tau_2$.

On peut donc énoncer les résultats suivants :

La limite inférieure de confiance incluse au risque α_1 pour ϑ est la fonction $\vartheta_1 = f_1(x)$ qui associe à x la plus petite valeur de ϑ telle que x soit limite supérieure de probabilité au risque α_1 .

La limite exclue s'obtient en associant à x la plus grande valeur de ϑ telle que x soit limite supérieure de probabilité au risque α_1 .

La limite supérieure de confiance incluse au risque α_2 pour ϑ est la fonction $\vartheta = f_2(x)$ qui associe à x la plus grande valeur de ϑ telle que x soit limite inférieure de probabilité au risque α_2 . La limite exclue s'obtient en associant à x la plus petite valeur de ϑ telle que x soit limite inférieure de probabilité au risque α_2 .

IV.C/ Cas où la fonction de répartition de X est une fonction décroissante mais non continue de ϑ .

Les courbes de répartition correspondant à des valeurs croissantes de ϑ sont comme en IV.A/ situées les unes au-dessous des autres et ne peuvent pas se rencontrer. Les limites de probabilité sont donc des fonctions croissantes de ϑ .

Soit τ une valeur de ϑ pour laquelle $F(x, \vartheta)$ n'est pas continue en ϑ quand $x = y$.

$F(y, \vartheta)$ étant une fonction décroissante de ϑ on sait que quand ϑ tend vers τ par valeurs inférieures $F(y, \vartheta)$ tend vers une limite que l'on désigne par $F(y, \tau - 0)$. De même quand ϑ tend vers τ par valeurs supérieures à τ , $F(y, \vartheta)$ tend vers une limite qu'on désigne par $F(y, \tau + 0)$. On a naturellement $F(y, \tau - 0) > F(y, \tau) > F(y, \tau + 0)$ (cf. figure IV.C.1).

Si $F(y, \tau - 0) = F(y, \tau)$, on dit que $F(y, \vartheta)$ est continue à gauche pour $\vartheta = \tau$. De même si $F(y, \tau + 0) = F(y, \tau)$, $F(y, \vartheta)$ est continue à droite pour $\vartheta = \tau$. $F(y, \vartheta)$ est alors continue pour $\vartheta = \tau$ si elle est à la fois continue à gauche et à droite. Il suffit pour cela que l'on ait : $F(y, \tau - 0) = F(y, \tau + 0)$.

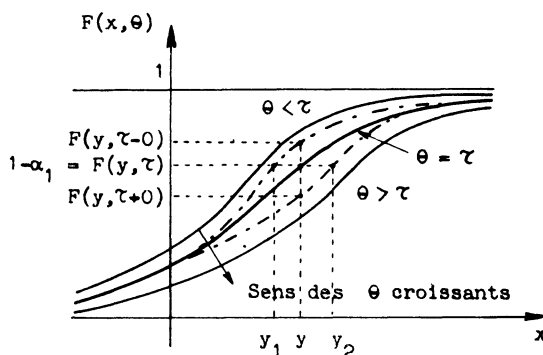


Figure IV.C.1

Supposons pour fixer les idées que $F(y, \vartheta)$ ne soit pas continue à gauche pour $\vartheta = \tau$ et soit y_1 telle que $F(y_1, \tau - 0) = F(y, \tau) = 1 - \alpha_1$ (cf. figure IV.C.1).

Par suite de la décroissance en ϑ de $F(x, \vartheta)$ on a $y_1 < y$. Pour tout z tel que $y_1 < z < y$, on a donc pour tout $\vartheta < \tau$:

$$F(z, \vartheta) > F(y_1, \vartheta) > F(y_1, \tau - 0) = 1 - \alpha_1$$

Comme par ailleurs si $\vartheta > \tau$ on a $F(z, \vartheta) < F(z, \tau) < F(y, \tau) = 1 - \alpha_1$ on voit que z ne peut être limite supérieure de probabilité au risque α_1 pour X . La limite supérieure de probabilité $\varphi_1(\vartheta)$ au risque α_1 pour X est donc discontinue à gauche puisqu'elle passe d'une valeur inférieure à y_1 correspondant à $\vartheta < \tau^{(1)}$ à $y = \varphi_1(\tau)$. De façon plus précise on voit que l'on a $y_1 = \varphi_1(\tau - 0)$ (cf. figure IV.C.2).

(1) Par définition de y_1 on a $F(y_1, \vartheta) > 1 - \alpha_1$ pour $\vartheta < \tau$. Etant donné une valeur $\vartheta < \tau$, il existe donc une valeur $x < y_1$ telle que $F(x, \vartheta) = 1 - \alpha_1$ puisque $F(x, \vartheta)$ est fonction continue et croissante de x .

On montrerait de manière analogue que si $F(y, \vartheta)$ n'est pas continue à droite pour $\vartheta = \tau$, la fonction $\varphi_1(\vartheta)$ n'est pas continue à droite puisqu'elle passe de la valeur $y = \varphi_1(\tau)$ à une valeur supérieure à y_2 telle que $F(y_2, \tau + 0) = 1 - \alpha_1$ pour $\vartheta > \tau$, et que l'on a $y_2 = \varphi_2(\tau + 0)$.

Les limites de probabilité sont donc des fonctions croissantes mais non nécessairement continues de ϑ .

Si $\vartheta = \tau$ est un point de discontinuité à gauche ou à droite de $F(x, \vartheta)$ ce peut être un point de discontinuité à gauche ou à droite pour les limites de probabilité (ce le sera pour les risques α_1 correspondant à des valeurs de $1 - F(x, \tau)$ ou $F(x, \tau)$ pour lesquelles $F(x, \vartheta)$ n'est pas continue pour $\vartheta = \tau$).

Quand la fonction $\varphi_1(\vartheta)$ n'est pas continue pour la valeur $\vartheta = \tau$ sa fonction inverse n'est pas définie pour les valeurs de x de l'intervalle $[\varphi_1(\tau - 0), \varphi_1(\tau + 0)]$ à l'exception de $\varphi_1(\tau)$ (cf. figure IV.C.2).

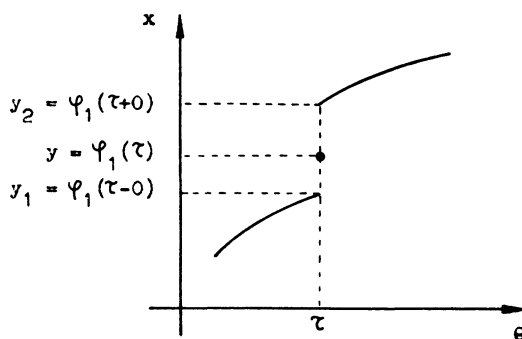


Figure IV.C.2

Puisque la limite inférieure de confiance $f_1(x)$ au risque α_1 , doit coïncider avec la fonction inverse de $\varphi_1(\vartheta)$ pour toute valeur de x pour laquelle cette dernière se trouve définie (cf. IV.A.2/) et doit par ailleurs être une fonction non décroissante de x , on ne peut que poser $f_1(x) = \tau$ pour toute valeur de x de l'intervalle $[\varphi_1(\tau - 0), \varphi_1(\tau + 0)]$. On constate alors que la fonction $f_1(x)$ ainsi définie ne satisfait pas aux conditions (4) pour la valeur particulière $\vartheta_0 = \tau$. En effet pour les valeurs x comprises entre $\varphi_1(\tau)$ exclu et $\varphi_1(\tau + 0)$ inclus, donc supérieures à $x_0 = \varphi_1(\tau)$ on a $f_1(x) = \tau = \vartheta_0$ et non $f_1(x) > \vartheta_0$.

La fonction $f_1(x)$ ainsi définie ne peut donc être limite inférieure de confiance au risque α_1 que si $\varphi_1(\tau + 0) = \varphi_1(\tau)$.

Ce n'est donc que si la fonction $F(x, \vartheta)$ est pour toute valeur de x une fonction de ϑ continue à droite qu'on peut toujours définir une limite inférieure incluse de confiance pour ϑ . De même pour pouvoir toujours définir une limite supérieure de confiance incluse pour ϑ il faut et suffit que la fonction $F(x, \vartheta)$ soit pour toute valeur de x une fonction de ϑ continue à gauche.

Un raisonnement analogue montre qu'en ce qui concerne les limites de confiance exclues il faut que $F(x, \vartheta)$ soit continue à gauche en ϑ pour que la limite inférieure existe toujours et que $F(x, \vartheta)$ soit continue à droite en ϑ , pour que la limite supérieure existe toujours.

Une variable aléatoire dont la fonction de répartition n'est pas continue en ϑ ne peut donc avoir d'intervalle de confiance de type (N) ou de type (F) pour le paramètre ϑ dont dépend sa distribution pour tout risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Par contre si sa fonction de répartition est continue à droite en ϑ on peut définir pour tout risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ un intervalle de confiance de type mixte (N, F) c'est-à-dire tel que $\vartheta_1(x) \leq \vartheta < \vartheta_2(x)$. De même si elle est continue à gauche en ϑ , on peut définir pour tout risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ un intervalle de confiance de type mixte (F, N) c'est-à-dire tel que $\vartheta_1(x) < \vartheta \leq \vartheta_2(x)$.

De façon générale l'existence d'une limite incluse inférieure (ou supérieure) de confiance est liée à la continuité à droite (ou à gauche)⁽¹⁾ en ϑ de la limite supérieure (ou inférieure) de probabilité au même risque.

On obtient la représentation graphique d'une telle limite de confiance en complétant le graphique représentatif de la limite de probabilité correspondante en ses points de discontinuité par des segments parallèles à l'axe des x.

Remarque - Il est facile d'examiner à la lumière de ce qui précède le cas d'une variable aléatoire dont la fonction de répartition est fonction non croissante et non continue de ϑ . Les limites de probabilité peuvent alors présenter à la fois les caractéristiques indiquées en IV.B/ et en IV.C/ c'est-à-dire des paliers horizontaux et des discontinuités.

IV.D/ Examen des cas où les intervalles de variation de ϑ ou de X sont limités.

Jusqu'ici on a supposé qu'en dehors des valeurs de x comprises entre $\varphi_1(\vartheta - 0)$ et $\varphi_1(\vartheta + 0)$ il était toujours possible d'associer à une valeur donnée x_0 de X, une ou plusieurs valeurs de $\varphi_1(\vartheta)$ telles que $\varphi_1(\vartheta) = x_0$. Ceci revient à dire qu'on a supposé que les bornes de $\varphi_1(\vartheta)$ étaient celles de la variable aléatoire X et notamment que $\varphi_1(\vartheta)$ n'était pas bornée quand X ne l'est pas.

Nous allons voir qu'il n'en est pas toujours ainsi, notamment quand l'intervalle de variation de ϑ est borné.

IV.D.1/ L'intervalle de variation de ϑ est borné tandis que X peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Soit $(\vartheta_1, \vartheta_s)$ l'intervalle de variation de ϑ . Les courbes de répartition $F(x, \vartheta)$ ont l'allure représentée sur la figure IV.D.1,1, si ϑ atteint effectivement ses bornes, c'est-à-dire si son intervalle de variation est l'intervalle fermé $[\vartheta_1, \vartheta_s]$. Elles sont comprises dans la bande limitée par les fonctions $F(x, \vartheta_1)$ et $F(x, \vartheta_s)$.

Si ϑ n'atteint pas ses bornes c'est-à-dire si son intervalle de variation est l'intervalle ouvert $]\vartheta_1, \vartheta_s[$, elles sont limitées par les fonctions :

$$F(x, \vartheta_1 + 0) = \lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_1} F(x, \vartheta) \quad \text{et} \quad F(x, \vartheta_s - 0) = \lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} F(x, \vartheta).$$

Nous supposons en effet que pour toute valeur de X $F(x, \vartheta)$ est une fonction continue de ϑ afin que les limites de probabilité pour X existent pour toutes les valeurs possibles pour ϑ . Dans ces conditions pour chaque valeur de X, $F(x, \vartheta)$ est une fonction continue et non croissante de ϑ comprise entre 0 et 1. Elle admet donc des limites quand ϑ tend vers ϑ_1 par

(1) Pour les limites exclues ces termes doivent être intervertis.

valeurs supérieures ou vers ϑ_s par valeurs inférieures. Il convient toutefois de noter que l'on peut avoir $F(x, \vartheta_1 + 0) \equiv 1$ et $F(x, \vartheta_s - 0) \equiv 0$ (cf. figure IV.D.1,2).

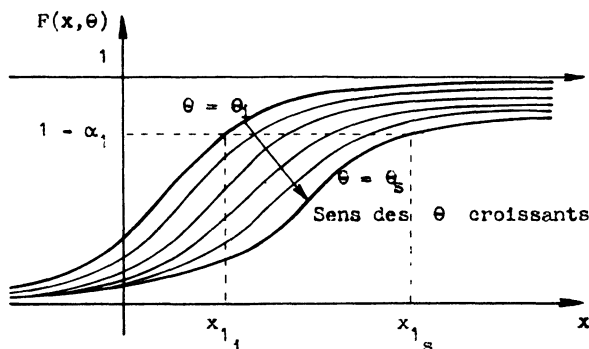


Figure IV.D.1,1 - Cas où ϑ atteint effectivement ses bornes.

a) Cas où ϑ atteint effectivement ses bornes. Soit $x_{11} = \varphi_1(\vartheta_1)$ et $x_{1s} = \varphi_1(\vartheta_s)$ (cf. figure IV.D.1,1).

Puisque $\varphi_1(\vartheta)$ est fonction non décroissante de ϑ elle est bornée inférieurement et supérieurement par x_{11} et x_{1s} .

Cette fonction qui est représentée par une courbe du type de celle de la figure IV.D.1,3 ne permet pas d'associer une limite inférieure de confiance aux valeurs de X extérieures à l'intervalle $[x_{11}, x_{1s}]$.

Si on veut définir $\vartheta_1(x)$ pour ces valeurs, il est nécessaire, puisque ce doit être une fonction non décroissante de x , d'avoir $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_1$ pour $x < x_{11}$ et $\vartheta_1(x) \geq \vartheta_s$ pour $x > x_{1s}$, soit puisque ϑ ne peut varier qu'entre ϑ_1 et ϑ_s : $\vartheta_1(x) = \vartheta_1$ pour $x \leq x_{11}$ et $\vartheta_1(x) = \vartheta_s$ pour $x \geq x_{1s}$.

Pour voir si les valeurs proposées sont acceptables nous allons considérer comme en IV.A.1 les épreuves correspondant à une valeur ϑ_0 déterminée de ϑ .

Soit $x_0 = \varphi_1(\vartheta_0)$. Si on obtient pour X une valeur $x \leq x_0$ on aura $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_0$ et par suite on ne se trompera pas en affirmant que $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_0$.

Si maintenant on obtient pour X une valeur $x > x_0$ on aura $\vartheta_1(x) > \vartheta_0$ si $\vartheta_0 \neq \vartheta_s$ mais $\vartheta_1(x) = \vartheta_0$ si $\vartheta_0 = \vartheta_s$.

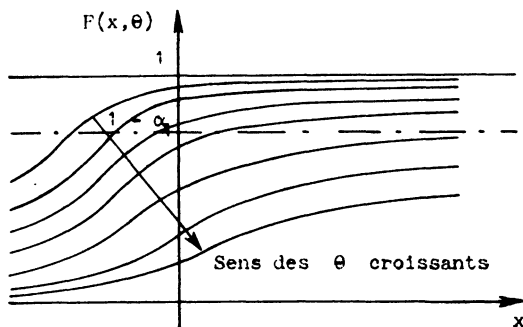


Figure IV.D.1,2 - Cas où ϑ n'atteint pas ses bornes.

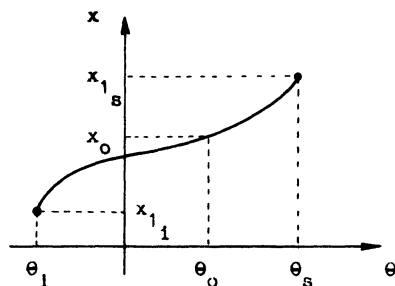


Figure IV.D.1,3

On voit donc que si $\vartheta_0 \neq \vartheta_s$ les cas où l'on se trompera en affirmant que $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_0$ sont ceux où l'on a $x > x_0 = \varphi_1(\vartheta_0)$. Leur probabilité est bien α_1 . Mais si $\vartheta_0 = \vartheta_s$ comme on aura toujours $\vartheta_1(x) < \vartheta_s$ on ne se trompera jamais en affirmant que $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_0$. La valeur $\vartheta_1(x) = \vartheta_s$ pour $x \geq x_{1s}$ la seule possible ne convient donc pas.

Nous pouvons donc dire que quand ϑ est borné supérieurement et atteint effectivement sa borne tandis que X ne l'est pas, il n'existe pas de limites inférieures de confiance de type (N) pour ce paramètre. L'existence de ces limites est indépendante de l'existence d'une borne inférieure pour ϑ ou pour $X^{(1)}$.

De même quand ϑ est borné inférieurement et atteint effectivement sa borne, tandis que X ne l'est pas, il n'existe pas de limites supérieures de confiance de type (N) pour ce paramètre. L'existence de ces limites est indépendante de l'existence d'une borne supérieure pour ϑ ou pour X .

Remarque - En ce qui concerne les limites de type (F) on voit par un raisonnement analogue que si $\vartheta_0 = \vartheta_1$ on se trompera toujours en affirmant que l'on a $\vartheta_1(x) < \vartheta_1$ puisqu'on a $\vartheta_1(x) \geq \vartheta_1$.

Par ailleurs il ne semble pas possible de donner à $\vartheta_1(x)$ la valeur ϑ_s puisque l'on doit avoir : $\vartheta_1(x) < \vartheta$.

b) Cas où ϑ n'atteint pas ses bornes. Si quand ϑ tend vers ϑ_s , $\varphi_1(\vartheta)$ tend vers une limite finie x_{1s} , c'est une borne supérieure pour $\varphi_1(\vartheta)$. Il faut alors définir $\vartheta_1(x)$ pour les valeurs de X supérieures ou égales à x_{1s} et la seule valeur possible est encore ϑ_s . Mais comme on a $\vartheta_s > \vartheta$ cette valeur n'est pas acceptable pour $\vartheta_1(x)$ et il n'y a pas de limite inférieure de confiance au niveau considéré.

Si par contre quand ϑ tend vers ϑ_s , $\varphi_1(\vartheta)$ augmente indéfiniment, il n'y a pas de difficulté.

Si quand $\vartheta \rightarrow \vartheta_1$, $\varphi_1(\vartheta)$ tend vers une limite finie x_{11} , on peut comme en a) poser $\vartheta_1(x) = \vartheta_1$ pour $x \leq x_{11}$.

Pour qu'il existe des limites inférieures de confiance pour ϑ à un niveau α_1 quelconque il faut donc qu'on ait pour toute valeur $\alpha_1 \neq 0$, $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} \varphi_1(\vartheta) = +\infty$; ceci revient à dire que l'on doit avoir pour toute valeur finie de X , $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} F(x, \vartheta) = 0$ (cf. figure IV.D.1,2).

(1) On a vu en effet qu'il n'y a de difficultés que pour $\vartheta_0 = \vartheta_s$ et $X > x_s$.

Remarque 1 - En ce qui concerne les limites de type (F) on voit qu'on rencontre la même difficulté pour les valeurs $x \geq x_{1s}$.

Par contre la difficulté signalée en a) pour les valeurs $x \leq x_{1i}$ n'existe plus puisque ϑ ne peut pas prendre la valeur ϑ_1 .

En résumé quand ϑ est borné, sans que X le soit il n'existe de limites inférieures de confiance de type (N) pour ϑ que si on a pour toute valeur finie de X $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} F(x, \vartheta) = 0$, c'est-à-dire si les limites supérieures de probabilité pour X ne sont pas bornées supérieurement. Ceci implique que ϑ n'atteigne pas sa borne supérieure.

L'existence de ces limites de confiance ne dépend pas de l'existence d'une borne inférieure pour ϑ ou pour X .

De même il n'existe de limites supérieures de confiance de type (N) pour ϑ que si on a $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_i} F(x, \vartheta) = 1$, c'est-à-dire si les limites inférieures de probabilité pour X ne sont pas bornées inférieurement. Ceci implique que ϑ n'atteigne pas sa borne inférieure.

Il n'existe de limite inférieure de confiance de type (F) pour ϑ que si en outre, ϑ n'atteint pas sa borne inférieure.

Remarque 2 - On peut imaginer que l'intervalle de variation de ϑ soit illimité mais que la fonction $\varphi_1(\vartheta)$ soit néanmoins bornée par des valeurs x_{1i} et x_{1s} , ce qui revient à dire que les valeurs de X extérieures à l'intervalle (x_{1i}, x_{1s}) ne peuvent être quantiles d'ordre $1 - \alpha_1$.

Ceci revient à dire que pour toute valeur de X , $F(x, \vartheta)$ tend vers une limite différente de 0 ou de 1 quand ϑ tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$ (cf. figure IV.D.1,4).

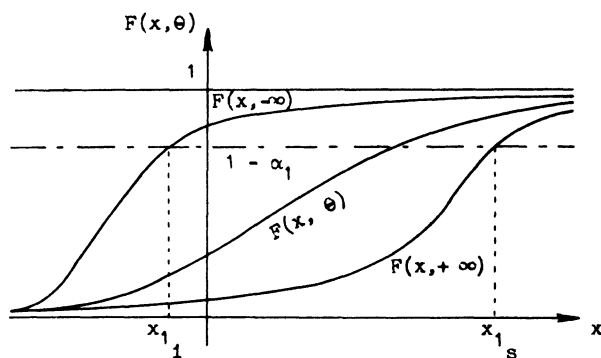


Figure IV.D.1,4

Les fonctions $F(x, \vartheta_i + 0)$ et $F(x, \vartheta_s - 0)$ sont alors remplacées par les fonctions $F(x, -\infty) = \lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} F(x, \vartheta)$ et $F(x, +\infty) = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} F(x, \vartheta)$ et la fonction $\varphi_1(\vartheta)$ est représentée par une courbe du type de celle de la figure IVD.1,5.

Le raisonnement qui précède montre que l'existence de bornes supérieures finies pour les limites supérieures de probabilité s'oppose à la définition des limites inférieures de confiance pour ϑ puisqu'à $x \geq x_{1s}$ on devrait associer $\vartheta_1(x) = +\infty$ ce qui n'est pas concevable.

On peut donc dire de façon générale que pour qu'il existe des limites inférieures de confiance de type (N) il faut et suffit que les limites supérieures de probabilité ne soient pas bornées supérieurement, ce qui revient à dire que les fonctions de répartition doivent pour toute valeur de X tendre vers 0 quand ϑ tend vers $+\infty$ ou vers sa borne supérieure. De même pour qu'il existe des limites supérieures de confiance de type (N) il faut et suffit que les limites inférieures de probabilité ne soient pas bornées inférieurement ce qui revient à dire que les fonctions de répartition doivent pour toute valeur de X tendre vers 1 quand ϑ tend vers $-\infty$ ou vers sa borne inférieure.

L'existence des limites inférieures de confiance de type (F) est en outre liée au fait que ϑ n'atteigne pas sa borne inférieure.

On notera qu'avec les fonctions de répartition considérées en I, c'est-à-dire celles de lois normales d'écart-type donné mais de moyenne variable on a bien des limites de probabilité illimitées à droite et à gauche.

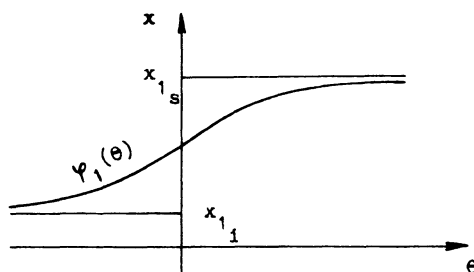


Figure IV.D.1, 5

IV.D.2/ Les intervalles de variation de ϑ et de X sont bornés. Soit $]x_i, x_s[$ l'intervalle de variation de $X^{(1)}$. Les courbes de répartition $F(x, \vartheta)$ ont dans le cas où ϑ atteint effectivement ses bornes, l'allure représentée sur la figure IV.D.2, 1.

Comme X est une variable aléatoire absolument continue, x_s ne peut

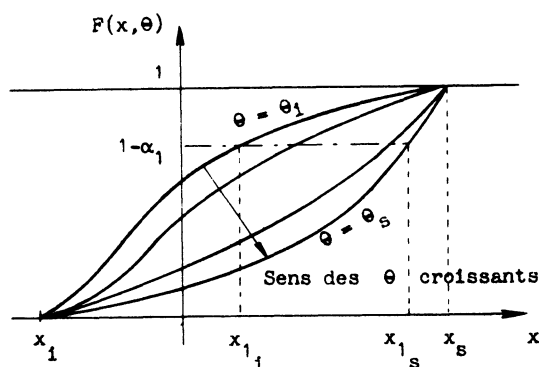


Figure IV.D.2, 1 - Cas où ϑ atteint effectivement ses bornes.

(1) Il convient de noter que puisque la variable X est absolument continue, on a $P(X < x_i) = 0$ et $P(X \geq x_s) = 0$ soit $P(x_i < X < x_s) = 1$, ce qui revient à dire que l'intervalle effectif de variation de X est l'intervalle ouvert $]x_i, x_s[$.

être quantile d'ordre $1 - \alpha_1$ avec $\alpha_1 \neq 0$. De même x_1 ne peut être quantile d'ordre non nul.

On a donc pour toute valeur possible de ϑ : $x_1 < \varphi_1(\vartheta) < x_s$.

a) Cas où ϑ atteint effectivement ses bornes. Dans ce cas $\varphi_1(\vartheta)$ est définie pour les valeurs ϑ_1 et ϑ_s et on a $\varphi_1(\vartheta_1) \leq \varphi_1(\vartheta) \leq \varphi_1(\vartheta_s)$ avec $x_1 < \varphi_1(\vartheta_1) \leq \varphi_1(\vartheta_s) < x_s$.

La variable aléatoire X peut donc prendre des valeurs extérieures à l'intervalle $[x_1, x_s]$ de variation de $\varphi_1(\vartheta)$. Le raisonnement fait en IV.D.1.a), montre que puisqu'on a $x_s > x_1$, il n'est pas possible de définir des limites inférieures de confiance de type (N) pour ϑ .

De même le fait que l'on ait $x_1 < x_1$ ne permet pas de définir des limites supérieures de confiance de type (N) pour ϑ .

b) Cas où ϑ n'atteint pas ses bornes. $\varphi_1(\vartheta)$ étant limitée par x_1 et x_s , et fonction non décroissante de ϑ admet une limite quand $\vartheta \rightarrow \vartheta_1$ et quand $\vartheta \rightarrow \vartheta_s$.

$$\text{Soit } x_{1l} = \lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_1} \varphi_1(\vartheta) \quad \text{et} \quad x_{1s} = \lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} \varphi_1(\vartheta).$$

On a : $x_1 \leq x_{1l} \leq x_{1s} \leq x_s$.

Si $x_{1s} < x_s$, la variable X peut prendre des valeurs supérieures ou égales à x_{1s} et le raisonnement fait en IV.D.1/ montre qu'il n'y a pas de limite inférieure de confiance pour ϑ au risque considéré.

Si par contre on a $x_{1s} = x_s$ (cf. figure IV.D.2,2) on a toujours $X < x_{1s}$ et le raisonnement fait en IV.D.1/ montre qu'on peut définir une limite inférieure de confiance pour ϑ au risque considéré.

Pour que l'on ait $x_{1s} = x_s$ pour toute valeur de $\alpha_1 \neq 0$ il faut et suffit que pour toute valeur de x différente de x_s , on ait $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_s} F(x, \vartheta) = 0$ ce qui revient à dire que $F(x, \vartheta_s - 0) = 0$ si $x < x_s$;
 $= 1$ si $x = x_s$.

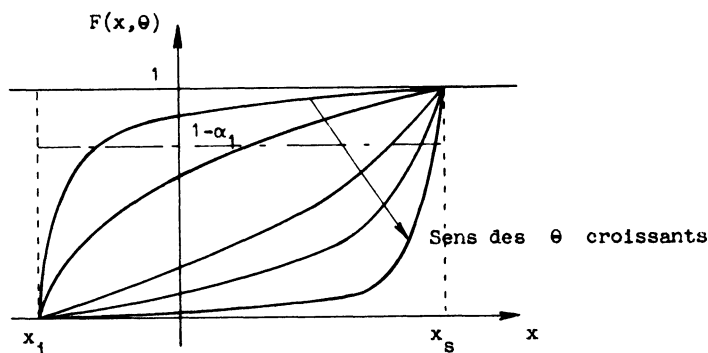


Figure IV.D.2,2 - Cas où ϑ n'atteint pas ses bornes.

On arrive ainsi à des énoncés analogues à ceux de IV.D.1/. Les valeurs $x = +\infty$ et $x = -\infty$ doivent seulement être remplacées par les bornes x_s et x_1 de X .

Application - Existence de limites inférieure et supérieure de confiance à un risque donné quelconque pour l'écart-type d'une distribution normale.

On se sert du fait que l'estimateur $s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ de σ^2 est distribué comme $\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1}^2$.

On se trouve dans le cas où le paramètre $\vartheta = \sigma$ est borné inférieurement par 0 qu'il n'atteint pas (sinon la variable considérée ne serait plus aléatoire) et où l'estimateur $X = s'^2$ est également borné inférieurement par 0.

Quand σ varie les fonctions de répartition de $X = s'^2$ se déduisent de celles de χ_{n-1}^2 par une affinité de rapport $\frac{\sigma^2}{n-1}$, d'axe l'axe des ordonnées $F(x, \vartheta)$ (c'est-à-dire en remplaçant l'abscisse χ_{n-1}^2 correspondant à une valeur donnée de la fonction de répartition de χ_{n-1}^2 par $\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1}^2$, cf. figure IV.D.2, 3). Les limites de probabilités supérieure ou inférieure à un risque donné quelconque pour s'^2 sont donc des fonctions croissantes de σ , bornées inférieurement par 0.

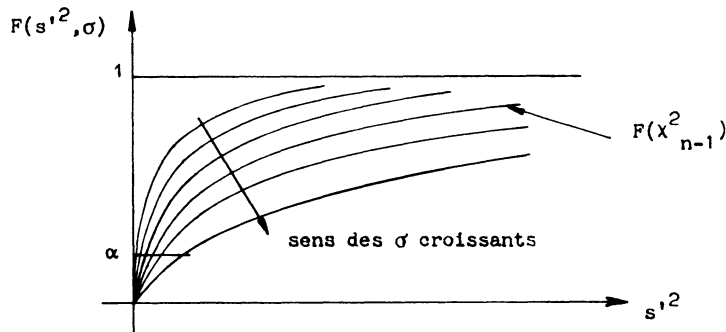


Figure IV.D.2, 3

Il existe donc des limites inférieure et supérieure de confiance de type (N) et de type (F) à un risque donné quelconque pour $\sigma^{(1)}$.

Remarque - Contrairement à ce qu'on pourrait penser a priori s'^2 ne peut pas prendre la valeur 0. En effet pour la valeur 0, la densité de probabilité de χ^2 est 0 par définition ce qui exprime que χ^2 ne peut prendre que des valeurs positives.

Du point de vue pratique ceci revient à dire qu'il n'est pas possible d'obtenir n valeurs x_i strictement identiques, si l'échantillon est réellement prélevé dans une distribution normale. Il ne faut pas oublier que les valeurs x_i effectivement relevées sont généralement arrondies ce qui peut expliquer qu'on puisse les trouver toutes égales. Dans ce cas si l'on veut estimer valablement σ il convient d'améliorer la précision des déterminations des valeurs x_i .

IV.D.3/ ϑ peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ mais l'intervalle de variation de X est borné. $\varphi_1(\vartheta)$ qui est compris entre x_1 et x_s et fonction non décroissante de ϑ admet des limites x_{1l} et x_{1s} quand ϑ tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$. (cf. figure IV.D.3,1). Le raisonnement fait en IV.D.1/ montre qu'il n'y a de limite

(1) Les limites inférieures de confiance de type (F) existent puisque ϑ n'atteint pas sa borne inférieure.

inférieure de confiance pour ϑ que si on a $x_{1s} = x_s$ et nous conduit à des énoncés analogues à ceux de IV.D.1. Les valeurs $x = +\infty$ et $x = -\infty$ doivent seulement être remplacées par les bornes x_s et x_i de X , tandis que les valeurs ϑ_i et ϑ_s doivent être remplacées par $-\infty$ et $+\infty$.

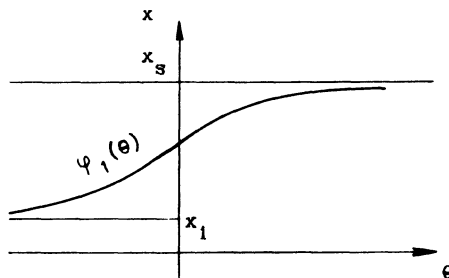


Figure IV.D.3,1 - Cas où : $x_{1i} = x_i$ $x_{1s} = x_s$.

IV.E/ Conclusions du chapitre IV.

Nous les rassemblerons dans les propositions suivantes :

Proposition III - Conditions d'existence des limites de confiance.

Pour que l'on puisse associer à la statistique absolument continue X dont la fonction de répartition est pour toute valeur de X une fonction monotone non croissante du paramètre ϑ , des limites inférieures de confiance de type (N) à un risque donné quelconque pour ϑ , il faut et il suffit que les limites supérieures de probabilité pour X à un risque donné quelconque ne soient pas limitées supérieurement par autre chose que la borne supérieure de l'intervalle de variation de X quand ϑ tend vers sa borne supérieure ϑ_s (ou vers $+\infty$).

Il revient au même de dire que l'on doit avoir $\lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x, \vartheta) = 0$ pour toute valeur de X différente de sa borne supérieure x_s . Ceci ne peut être réalisé que si ϑ ne peut pas atteindre à sa borne supérieure.

Pour qu'il existe des limites inférieures de confiance de type (F) il faut en outre que ϑ n'atteigne pas sa borne inférieure.

De même pour qu'il existe des limites supérieures de confiance de type (N) à un risque donné quelconque pour ϑ il faut et il suffit que les limites inférieures de probabilité pour X à un risque donné quelconque ne soient pas limitées inférieurement par autre chose que la borne inférieure de l'intervalle de variation de X quand ϑ tend vers sa borne inférieure ϑ_i (ou vers $-\infty$). Il revient au même de dire que l'on doit avoir $\lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_i \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x, \vartheta) = 1$ pour toute valeur de X différente de sa borne inférieure x_i . Ceci ne peut être réalisé que si ϑ ne peut pas atteindre sa borne inférieure.

Pour qu'il existe des limites supérieures de confiance de type (F) il faut en outre que ϑ n'atteigne pas sa borne supérieure.

Proposition IV* - Construction des limites de confiance.

La limite inférieure de confiance de type (N) au risque α_1 , pour ϑ se déduit de la fonction continue et non décroissante $x = \varphi_1(\vartheta)$ donnant la limite supérieure de probabilité au risque α_1 pour X en fonction de ϑ , en associant à

toute valeur x_0 de X comprise entre les bornes inférieure x_{11} et supérieure x_{1s} de $\varphi_1(\vartheta)$, la plus petite valeur de ϑ telle que $x_0 = \varphi_1(\vartheta)$ ⁽¹⁾.

A toute valeur $x_0 < x_{11}$ on fait correspondre la borne inférieure $-\infty$ ou ϑ_1 de l'intervalle de variation de ϑ .

La limite supérieure de confiance de type (N) au risque α_2 pour ϑ se déduit de la fonction continue et non décroissante $x = \varphi_2(\vartheta)$ donnant la limite inférieure de probabilité au risque α_2 pour X en fonction de ϑ , en associant à toute valeur x_0 de X comprise entre les bornes inférieure x_{21} et supérieure x_{2s} de $\varphi_2(\vartheta)$, la plus grande valeur de ϑ telle que $x_0 = \varphi_2(\vartheta)$.

A toute valeur $x_0 \geq x_{2s}$ on fait correspondre la borne supérieure $+\infty$ ou ϑ_s de l'intervalle de variation de ϑ .

Les limites inférieures (ou supérieures) de confiance pour ϑ sont donc les fonctions inverses des limites supérieures (ou inférieures) de probabilité correspondantes pour X , pour toute valeur de x pour laquelle ces fonctions inverses sont définies.

Proposition III' - A toute statistique absolument continue X dont la fonction de répartition dépend d'un paramètre ϑ dont elle est pour toute valeur de X une fonction monotone non croissante et continue à droite (ou à gauche) on peut associer des limites inférieures de type (N) [ou de type (F)] et supérieures de type (F) [ou de type (N)] de confiance à un risque donné quelconque si les conditions énoncées dans la proposition IV sont satisfaites.

On obtient les limites de confiance par les procédés déjà indiqués en complétant en ses points de discontinuité le graphique représentatif des limites de probabilité correspondantes par des segments parallèles à l'axe des x .

V - LIMITES FIDUCIELLES A UN RISQUE DONNE POUR ϑ -

V.A/ Définition des limites fiducielles inférieure et supérieure à un risque donné pour le paramètre ϑ dont dépend la distribution de son estimateur X .

La limite fiducielle inférieure au risque α_1 pour ϑ correspondant à la valeur observée x de X est la plus grande valeur $\tau_1(x)$ de ϑ telle que :

$$\mathcal{P}(X \geq x_{|\vartheta=\tau_1}) = \alpha_1 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}(X < x_{|\vartheta=\tau_1}) = 1 - \alpha_1 \quad (5')$$

En d'autres termes la limite fiducielle inférieure au risque α_1 pour ϑ correspondant à la valeur observée x est la plus grande valeur τ_1 du paramètre ϑ telle que x soit limite supérieure de probabilité de type (F) (c'est-à-dire exclue) au risque α_1 .

De même la limite fiducielle supérieure au risque α_2 pour ϑ correspondant à la valeur observée x de X est la plus petite valeur $\tau_2(x)$ de ϑ telle que :

$$\mathcal{P}(X \leq x_{|\vartheta=\tau_2}) = \alpha_2 \quad (6')$$

C'est donc la plus petite valeur τ_2 du paramètre ϑ telle que x soit limite inférieure de probabilité de type (F) (c'est-à-dire exclue) au risque α_2 .

(1) Pour la limite de type (F) on doit prendre la plus petite valeur de ϑ telle que $x_0 = \varphi_2(\vartheta)$.

Nous supposerons encore et pour les mêmes raisons que dans ce qui précède (cf. III. A/) que la fonction de répartition de X est une fonction monotone non croissante de ϑ .

Les limites fiducielles sont alors des fonctions monotones non décroissantes de x .

La notion d'intervalle et de limites de confiance est due à Neyman tandis que la notion de limite fiducielle est due à Fisher. La notion de limite fiducielle est directement liée à la notion de vraisemblance et même plus précisément de test.

En effet, si à partir de l'estimateur X on désire tester l'hypothèse d'une valeur donnée ϑ_0 pour ϑ , τ_1 est la plus grande valeur de ϑ_0 que l'on sera conduit à rejeter dans un test unilatéral à gauche au risque α_1 , si on a observé la valeur x .

De même τ_2 est la plus petite valeur de ϑ_0 qu'on sera conduit à rejeter dans un test unilatéral à droite au risque α_2 si on a observé la valeur x .

L'ensemble des valeurs ϑ de l'intervalle ouvert $]\tau_1, \tau_2[$ est donc l'ensemble des valeurs acceptables pour ϑ_0 quand on observe pour X la valeur x et que l'on procède à partir de x au test bilatéral au risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (α_1 à gauche et α_2 à droite) de l'hypothèse $\vartheta = \vartheta_0$.

De façon moins précise l'intervalle $]\tau_1, \tau_2[$ est l'ensemble des valeurs vraisemblables pour ϑ au risque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ quand on a observé pour X la valeur x .

C'est ainsi que dans l'exemple considéré en I d'une distribution normale d'écart-type connu mais de moyenne m inconnue; l'ensemble des valeurs acceptables pour m au risque $\alpha_1 + \alpha_2$ quand on observe la valeur $\bar{x}$ est défini par l'intervalle (m_1, m_2) tel que :

$$\frac{\bar{x} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < |t_1| \quad \text{et} \quad \frac{m_2 - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < |t_2|$$

Les limites fiducielles inférieure au risque α_1 et supérieure au risque α_2 pour m sont donc :

$$m_1 = \bar{x} - t_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad m_2 = \bar{x} + t_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Remarque - On pourrait définir de manière analogue des limites fiducielles de type (N) en remplaçant les conditions (5') et (6') par :

$$\mathcal{P}(X > x_{|\vartheta=\tau_1}) = \alpha_1 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}(X \leq x_{|\vartheta=\tau_1}) = 1 - \alpha_1 \quad (5)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{P}(X < x_{|\vartheta=\tau_2}) = \alpha_2 \quad (6)$$

ce qui revient à considérer, contrairement à l'habitude des domaines de rejet de l'hypothèse nulle $\vartheta = \vartheta_0$ ouverts.

Si X est une variable aléatoire absolument continue, les deux types de limites fiducielles sont confondus. Dans le cas d'une variable non absolument continue nous ne considérerons que les limites fiducielles de type (F) en raison de la relation que nous avons indiquée entre cette notion et celle de test.

V.B/ Conditions d'existence des limites fiducielles.

Il résulte de la définition que pour qu'on puisse associer à une valeur x de X une limite fiducielle inférieure (ou supérieure) à un risque donné pour ϑ il faut et suffit qu'il existe une valeur ϑ telle que cette valeur x soit limite supérieure (ou inférieure) de probabilité de type (F) pour X au même risque.

Les conditions d'existence pour toute valeur de X de limites fiducielles à un risque donné pour ϑ sont donc différentes des conditions d'existence des limites de confiance correspondantes.

V.B.1/ Cas où l'estimateur X est une variable absolument continue.
Pour qu'on puisse définir pour toute valeur de X des limites fiducielles inférieure ou supérieure à un risque donné pour ϑ il faut et suffit que les limites de probabilité supérieure ou inférieure pour X au même risque soient des fonctions continues de ϑ dont les bornes inférieure et supérieure soient celles de X .

On a vu en IV que $\varphi_1(\vartheta)$ ne pouvait être une fonction continue de ϑ que si $F(x, \vartheta)$ était elle-même une fonction continue de ϑ .

On a également vu en IV.D/ que pour que les bornes inférieure et supérieure des limites de probabilité pour X soient celles de X , il faut et suffit que l'intervalle de variation de ϑ soit ouvert ou illimité à droite et à gauche et que l'on ait pour toute valeur possible pour X

$$\begin{array}{l} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x, \vartheta) = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x, \vartheta) = 1 \end{array}$$

On voit (cf. IV.E/) que ces conditions sont plus restrictives que les conditions d'existence des limites de confiance de type (F) correspondantes et que quand elles sont réalisées les limites fiducielles sont confondues avec les limites de confiance de type (F) correspondantes.

Nous énoncerons donc la

Proposition V - *Pour qu'on puisse définir pour toute valeur de X des limites fiducielles inférieure ou supérieure à un risque donné pour ϑ il faut et suffit :*

1/ *Que la fonction de répartition de X soit pour toute valeur de X une fonction continue de ϑ ;*

2/ *Que l'intervalle de variation de ϑ soit ouvert ou illimité à droite et à gauche et que l'on ait pour toute valeur possible pour X*

$$\begin{array}{l} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x, \vartheta) = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x, \vartheta) = 1 \end{array}$$

Il revient au même de dire que les limites de probabilité supérieure ou inférieure pour X au même risque doivent avoir les mêmes bornes inférieure et supérieure que X .

Si les conditions 1/ et 2/ sont réalisées les limites fiducielles sont confondues avec les limites de confiance de type (F) correspondantes pour ϑ , dont ces conditions assurent l'existence.

V.B.2/ Cas où l'estimateur X est une variable discrète. Nous allons voir que rien ne s'oppose à l'existence de limites fiducielles pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Si on suppose que les valeurs prises par X sont les entiers successifs, ce à quoi on peut toujours se ramener par un changement de variable convenable, les conditions (5') et (6') s'écrivent :

$$\begin{cases} F[x - 1, \tau_1(x)] = 1 - \alpha_1 \\ \text{et } F[x, \tau_2(x)] = \alpha_2 \end{cases} \quad (7')$$

On voit de suite que pour que l'on puisse associer à toute valeur x de X une limite fiducielle inférieure (de type (F)) pour ϑ , il faut que X ne soit pas bornée inférieurement sinon on aurait $F(x - 1, \vartheta) = 0$ quel que soit ϑ pour $X = x_1$. De même pour que l'on puisse associer à toute valeur x de X une limite fiducielle supérieure pour ϑ il faut que X ne soit pas bornée supérieurement sinon on aurait $F(x, \vartheta) = 1$ quel que soit ϑ pour $X = x_s^{(1)}$.

Ainsi on ne peut associer à la valeur $x = 0$ d'une variable X distribuée suivant une loi de Poisson ou une loi binomiale une limite fiducielle inférieure pour le paramètre de cette loi. On ne peut pas non plus associer à la valeur $x = n$ d'une variable X distribuée suivant une loi binomiale, une limite fiducielle supérieure.

Les conditions (7') montrent que pour que l'on puisse associer à une valeur x_0 de X des limites fiducielles inférieure (ou supérieure) à un risque donné α quelconque, il faut et suffit que pour toute valeur de $\alpha \neq 0$ il existe une valeur de ϑ telle que $x_0 - 1$ (ou x_0) soit quantile d'ordre $1 - \alpha$ (ou α). Pour qu'il en soit ainsi il faut et suffit que la fonction $F(x_0 - 1, \vartheta)$ [ou $F(x_0, \vartheta)$] soit une fonction de ϑ prenant toutes les valeurs de l'intervalle ouvert]0, 1[$F(x_0 - 1, \vartheta)$ [ou $F(x_0, \vartheta)$] doit donc être une fonction continue de ϑ telle que l'on ait :

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \theta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x_0 - 1, \vartheta) = 1 & \text{et} \quad \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \theta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x_0 - 1, \vartheta) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(ou)} \quad \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \theta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x_0, \vartheta) = 1 & \text{et} \quad \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \theta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x_0, \vartheta) = 0 \end{array}$$

Nous avons déjà signalé que ces conditions ne peuvent être satisfaites pour la borne inférieure (ou pour la borne supérieure) de X si elle existe.

Nous énoncerons la

Proposition VI - Conditions d'existence des limites fiducielles.

Pour que l'on puisse associer à toute valeur x de la variable discrète X une limite fiducielle inférieure à un risque donné quelconque pour ϑ il faut et suffit que :

1/ La fonction de répartition de X soit pour toute valeur de X distincte de

(1) Il convient de noter qu'une variable discrète atteint effectivement ses bornes inférieure et supérieure si elle en a puisque par définition x_1 est la plus petite valeur possible pour X dont la probabilité ne soit pas nulle.

sa borne supérieure éventuelle x_s , une fonction continue de ϑ dont le domaine de variation comprenne l'intervalle ouvert $]0,1[$ ce qui revient à dire que l'on doit avoir pour toute valeur de X distincte de x_s ,

$$\begin{array}{cc} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x, \vartheta) = 1 & \text{et} \quad \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x, \vartheta) = 0 \end{array}$$

Ceci implique que l'intervalle de variation de ϑ soit illimité ou ouvert (sinon on devrait avoir $F(x, \vartheta_1) = 1$ et $F(x, \vartheta_s) = 0$ pour $x \neq x_s$. X serait alors une variable certaine égale à x_1 pour $\vartheta = \vartheta_1$, et à x_s pour $\vartheta = \vartheta_s$).

2/ L'intervalle de variation de X soit illimité à gauche. S'il n'en est pas ainsi les limites fiduciales inférieures ne sont pas définies pour la borne inférieure x_1 de X .

De même pour que l'on puisse associer à toute valeur x de la variable discrète X une limite fiduciale supérieure à un risque donné quelconque pour ϑ il faut et suffit que :

1/ La fonction de répartition de X soit pour toute valeur de X distincte de sa borne supérieure éventuelle x_s , une fonction continue de ϑ dont le domaine de variation comprenne l'intervalle ouvert $]0,1[$, ce qui revient à dire que l'on doit avoir pour toute valeur de X distincte de x_s :

$$\begin{array}{cc} \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_1 \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow -\infty}} F(x, \vartheta) = 1 & \text{et} \quad \lim_{\substack{\vartheta \rightarrow \vartheta_s \\ \text{ou } \vartheta \rightarrow +\infty}} F(x, \vartheta) = 0 \end{array}$$

Ceci implique que l'intervalle de variation de ϑ soit illimité ou ouvert.

2/ L'intervalle de variation de X soit illimité à droite. S'il n'en est pas ainsi les limites fiduciales supérieures ne sont pas définies pour la borne supérieure x_s de X .

Proposition VII - Construction des limites fiduciales.

La limite fiduciale inférieure au risque α_1 associée à x_j est la plus grande valeur τ_1 de ϑ telle que x_{j-1} soit quantile d'ordre $1 - \alpha_1^{(1)}$ tandis que la limite fiduciale supérieure au risque α_2 est la plus petite valeur τ_2 de ϑ telle que x_j soit quantile d'ordre α_2 .

Application aux distributions binomiale et de Poisson - Dans le cas où X est une variable aléatoire dont la distribution est binomiale ou de Poisson les conditions 1/ de la proposition VI sont remplies.

On a en effet, pour une distribution binomiale :

$$0 < \vartheta < 1 \quad \text{et} \quad F(x, \vartheta) = \sum_{c=0}^x C_n^c \vartheta^c (1 - \vartheta)^{n-c}$$

$F(x, \vartheta)$ est donc une fonction continue de ϑ telle que pour toute valeur de x on ait $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} F(x, \vartheta) = 1$ puisque pour $\vartheta = 0$ le seul terme non nul de $F(x, \vartheta)$ est celui correspondant à $c = 0$ ($0^0 = 1$ si $c = 0$).

(1) x_{j-1} est la valeur de X immédiatement inférieure à x_j .

De même pour toute valeur de X distincte de sa borne supérieure n on a $\lim_{\theta \rightarrow 1} F(x, \theta) = 0$ puisque si $\theta = 1$ tous les termes de $F(x, \theta)$ ne correspondant pas à $c = n$ sont nuls ($0^{n-c} = 0$ si $c \neq n$).

De même pour une distribution de Poisson on a :

$$\theta > 0 \quad \text{et} \quad F(x, \theta) = \sum_{c=0}^x e^{-\theta} \frac{\theta^c}{c!}$$

$F(x, \theta)$ est une fonction continue de θ , telle que pour toute valeur de x on ait $\lim_{\theta \rightarrow 0} F(x, \theta) = 1$ puisque pour $\theta = 0$ le seul terme non nul de $F(x, \theta)$ est encore celui correspondant à $c = 0$.

Par ailleurs quand $\theta \rightarrow +\infty$, $F(x, \theta)$ tend vers 0 quel que soit x .

Comme une variable de Poisson n'est bornée qu'inférieurement, les limites fiducielles supérieures sont définies pour toute valeur de cette variable, tandis qu'on ne peut définir de limites fiducielles inférieures que pour les valeurs non nulles de la variable.

Comme une variable distribuée suivant une loi binomiale est bornée par 0 et par n on peut définir des limites fiducielles inférieures pour toute valeur non nulle de cette variable et des limites fiducielles supérieures pour toute valeur de X différente de n .

VI - RECHERCHE D'INTERVALLES DE CONFIANCE AU NIVEAU $P = 1 - \alpha$ POUR θ DONT LES BORNES NE SOIENT PAS DES LIMITES DE CONFIANCE A DES RISQUES FIXES α_1 ET α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$) POUR θ -

VI.A/ Condition nécessaire d'existence d'intervalles de confiance au risque α pour θ .

On a vu en II.B/ que tout couple de variables aléatoires $\vartheta_1(x)$ et $\vartheta_2(x)$ tel que $\vartheta_1(x) < \vartheta_2(x)$ et satisfaisant à

$$\mathfrak{P} [\vartheta_1(x) > \theta] + \mathfrak{P} [\vartheta_2(x) < \theta] = \alpha \quad (1)$$

définit un intervalle de confiance fermé (ou de type (N)) au risque α pour θ .

Il n'est pas nécessaire, quoique cela soit préférable, d'imposer aux variables $\vartheta_1(x)$ et $\vartheta_2(x)$ d'être des limites inférieure et supérieure de confiance pour θ à des risques α_1 et α_2 fixés tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Il suffit que pour toute valeur θ_0 possible pour θ on ait :

$$\mathfrak{P} [\vartheta_1(x) > \theta_0]_{\theta=\theta_0} + \mathfrak{P} [\vartheta_2(x) < \theta_0]_{\theta=\theta_0} = \alpha_1(\theta_0) + \alpha_2(\theta_0) \quad (8)$$

avec $\alpha_1(\theta_0) + \alpha_2(\theta_0) = \alpha$.

$\vartheta_1(x)$ et $\vartheta_2(x)$ étant des fonctions non décroissantes de x , il existe des valeurs x_1 et x_2 de X telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vartheta_1(x) \leq \theta_0 & \text{si } x \leq x_1 \\ \text{et } \vartheta_1(x) > \theta_0 & \text{si } x > x_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vartheta_2(x) < \theta_0 & \text{si } x < x_2 \\ \vartheta_2(x) \geq \theta_0 & \text{si } x \geq x_2 \end{array} \right.$$

La condition (8) est alors équivalente à : Pour toute valeur ϑ_0 possible pour ϑ il doit exister deux valeurs x_1 et x_2 de la variable aléatoire X telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}[X \leq x_{1|\vartheta=\vartheta_0}] = 1 - \alpha_1(\vartheta_0) \\ \mathcal{P}[X \geq x_{2|\vartheta=\vartheta_0}] = 1 - \alpha_2(\vartheta_0) \end{cases}$$

avec $\alpha_1(\vartheta_0) + \alpha_2(\vartheta_0) = \alpha$

Nous arrivons ainsi à la :

Proposition I bis - Pour qu'il existe des intervalles de confiance au risque α pour ϑ , il est nécessaire que la loi de probabilité de X soit telle que pour toute valeur possible de ϑ , il existe une limite supérieure et une limite inférieure de probabilité pour X à des risques $\alpha_1(\vartheta) \geq 0$ et $\alpha_2(\vartheta) \geq 0$ tels que $\alpha_1(\vartheta) + \alpha_2(\vartheta) = \alpha$.

Conséquence importante - Il n'est pas possible de définir des intervalles de confiance à un risque α fixé pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable discrète.

En effet pour chaque valeur de ϑ il n'existe qu'une infinité dénombrable de quantiles pour X donc de risques $\alpha_1(\vartheta)$ et $\alpha_2(\vartheta)$ pour lesquels il soit possible de définir des limites de probabilité pour X . Il ne sera par suite pas possible de trouver, sauf dans le cas très exceptionnel signalé en III.B/ note (3)p.422 deux risques $\alpha_1(\vartheta)$ et $\alpha_2(\vartheta)$ tels que l'on ait $\alpha_1(\vartheta) + \alpha_2(\vartheta) = \alpha$.

VI.B/ Construction d'intervalles de confiance fermés ou de type (N) à un risque α donné pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue.

Nous nous bornerons au cas des intervalles de type (N) pour ne pas alourdir l'exposé.

Les conditions (9) analogues à la condition (3') (cf. III.B/) indiquent comment doivent être construits les intervalles de confiance au risque α pour ϑ .

A chaque valeur ϑ_0 de ϑ on associe une limite supérieure x_1 et une limite inférieure x_2 de probabilité pour X correspondant à des risques $\alpha_1(\vartheta_0) \geq 0$ et $\alpha_2(\vartheta_0) \geq 0$ tels que $\alpha_1(\vartheta_0) + \alpha_2(\vartheta_0) = \alpha$ et que les fonctions $x_1 = \psi_1(\vartheta)$ et $x_2 = \psi_2(\vartheta)$ ainsi obtenues soient non décroissantes et satisfassent aux conditions suivantes:

$\psi_1(\vartheta)$ est continue à droite et sa borne supérieure est celle de $X^{(1)}$;

$\psi_2(\vartheta)$ est continue à gauche et sa borne inférieure est celle de $X^{(1)}$.

On procède alors comme dans la recherche des limites de confiance c'est-à-dire qu'on définit les limites $\tau_1 = \underline{g}_1(x)$ et $\tau_2 = \underline{g}_2(x)$ de l'intervalle de confiance pour ϑ à partir des fonctions $x_1 = \psi_1(\vartheta)$ et $x_2 = \psi_2(\vartheta)$ de la même manière qu'on avait défini les limites de confiance $\vartheta_1 = f_1(x)$ et $\vartheta_2 = f_2(x)$ à partir des limites de probabilité $x_1 = \varphi_1(\vartheta)$ et $x_2 = \varphi_2(\vartheta)$ (cf. figure VI.B. page 652).

Les conditions imposées aux fonctions $\psi_1(\vartheta)$ et $\psi_2(\vartheta)$ sont celles qui ont été imposées aux limites de probabilité $\varphi_1(\vartheta)$ et $\varphi_2(\vartheta)$ pour que le processus soit possible (cf. IV.E.).

(1) Les conditions relatives aux bornes de $\psi_1(\vartheta)$ et $\psi_2(\vartheta)$ peuvent toujours être réalisées en choisissant $\alpha_1(\vartheta)$ et $\alpha_2(\vartheta)$ tels que $\alpha_1(\vartheta) \rightarrow 0$ quand $\vartheta \rightarrow \vartheta_s = \sup \vartheta$ et $\alpha_2(\vartheta) \rightarrow 0$ quand $\vartheta \rightarrow \vartheta_1 = \inf \vartheta$.

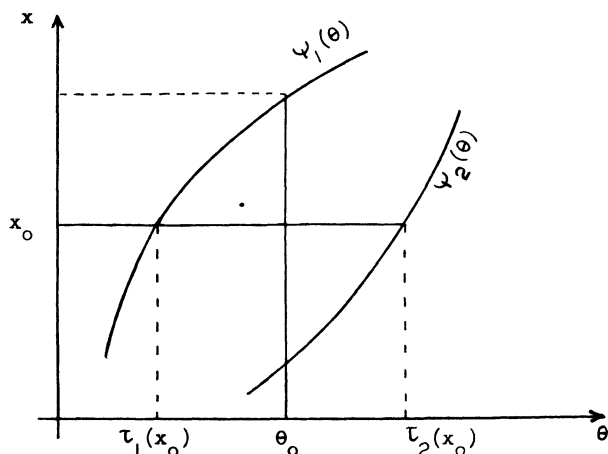


Figure VI.B

En effet pour définir $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ on considère encore les seules épreuves effectuées avec une valeur ϑ_0 du paramètre ϑ .

On détermine alors quelle est la probabilité que l'on a de se tromper en affirmant chaque fois qu'on observe une valeur x_0 de X que l'intervalle $[\tau_1(x_0), \tau_2(x_0)]$ contient ϑ_0 et on définit $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ de façon à ce que pour toute valeur possible de ϑ cette probabilité soit égale à :

$$\alpha_1(\vartheta) + \alpha_2(\vartheta) = \alpha.$$

VII - CONSTRUCTION D'INTERVALLES DE CONFIANCE A UN RISQUE AU PLUS EGAL A α POUR LE PARAMETRE DE LA LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE DISCRETE -

VII.A/ Principe.

Puisqu'il n'existe pas d'intervalles de confiance à un risque α donné, on peut se proposer de rechercher des intervalles de confiance à un risque $\alpha(\vartheta)$ variable avec ϑ et inconnu mais voisin de α .

Il nous semble que la signification pratique des intervalles de confiance commande de connaître le risque maximum attaché aux intervalles que l'on sera amené à définir et par suite de choisir $\alpha(\vartheta)$ de telle sorte que l'on ait $\alpha(\vartheta) \leq \alpha$ pour toute valeur possible de ϑ .

L'étude faite au paragraphe VI indique comment on peut procéder.

Il suffit de choisir les risques $\alpha_1(\vartheta) \geq 0$ et $\alpha_2(\vartheta) \geq 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\alpha_1(\vartheta) + \alpha_2(\vartheta) \leq \alpha.$$

Pratiquement on préfère souvent déterminer des limites inférieure et supérieure de confiance pour ϑ à des risques au plus égaux respectivement à des valeurs fixées α_1 et α_2 telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. On choisit en général $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Ceci revient à choisir $\alpha_1(\vartheta)$ et $\alpha_2(\vartheta)$ de telle sorte qu'ils satisfassent respectivement aux inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_1(\vartheta) \leq \alpha_1 \\ 0 \leq \alpha_2(\vartheta) \leq \alpha_2 \end{cases}$$

VII. B/ Construction de limites de confiance de type (N) à des risques au plus égaux à des valeurs fixées α_1 et α_2 à partir des limites fiducielles correspondant à ces risques.

Les limites approchées de confiance $\vartheta_1'(x)$ et $\vartheta_2'(x)$ peuvent être déterminées à partir des limites fiducielles inférieure et supérieure $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ aux risques α_1 et α_2 pour ϑ dont on a vu en V.B.2/ les conditions d'existence.

Nous supposons que la fonction de répartition $F(x, \vartheta)$ est pour toute valeur de X différente de sa borne supérieure éventuelle x_s une fonction continue et non croissante de ϑ dont l'intervalle de variation comprend l'intervalle $]0, 1[$.

Dans ces conditions il existe des limites fiducielles inférieure $\tau_1(x)$ (ou supérieure $\tau_2(x)$) à un risque donné pour ϑ pour toute valeur de X différente de sa borne inférieure x_i (ou de sa borne supérieure x_s) et ces fonctions sont non décroissantes.

Comme on l'a vu en VI.B/ il s'agit de définir pour toute valeur possible du paramètre ϑ une limite supérieure de probabilité au risque $\alpha_1(\vartheta) \leq \alpha_1$ soit x_1 et une limite inférieure de probabilité au risque $\alpha_2(\vartheta) \leq \alpha_2$ soit x_2 de telle façon que les deux fonctions $x_1 = \lambda_1(\vartheta)$ et $x_2 = \lambda_2(\vartheta)$ soient non décroissantes et prennent toutes les valeurs possibles pour X .

Soit $\tau_1(x)$ la limite fiducielle inférieure pour ϑ au risque α_1 . Elle est définie pour toute valeur de X différente de x_i et non décroissante. On a donc dans la mesure où ϑ_i , ϑ_s , x_i et x_s sont finies :

$$\vartheta_i \leq \tau_1(x_i + 1) \leq \tau_1(x) < \tau_1(x_s) < \vartheta_s$$

(Nous supposons que X prend des valeurs entières successives pour la commodité de l'écriture).

Considérons une valeur ϑ_0 de ϑ telle que $\tau_1(x_i + 1) < \vartheta_0 < \tau_1(x_s)$ et soit $\tau_1(x_0)$ la plus grande valeur de $\tau_1(x)$ qui soit inférieure à ϑ_0 (cf. figure VII.B/).

x_0 est une limite supérieure de probabilité incluse à un risque $\alpha_1(\vartheta_0) \leq \alpha_1$ pour X .

En effet comme $F(x, \vartheta)$ est une fonction non décroissante de ϑ pour toute valeur de x , on a puisque $\tau_1(x_0) < \vartheta_0 \leq \tau_1(x_0 + 1)$:

$$F(x_0, \vartheta_0) \geq F[x_0, \tau_1(x_0 + 1)] = 1 - \alpha_1$$

soit :

$$\mathcal{P}(X > x_0, \vartheta = \vartheta_0) = 1 - F(x_0, \vartheta_0) \leq \alpha_1$$

Quand $\vartheta = \vartheta_0$, x_0 est la plus petite limite de probabilité possible à un risque $\alpha_1(\vartheta_0) \leq \alpha_1$ car puisque $\vartheta_0 > \tau_1(x_0)$ on a :

$$F(x_0 - 1, \vartheta_0) < F[x_0 - 1, \tau_1(x_0)] \quad (1) = 1 - \alpha_1$$

(1) On ne peut avoir $F(x_0 - 1, \vartheta_0) = F[x_0 - 1, \tau_1(x_0)]$ puisque $\tau_1(x_0)$ est la plus grande valeur de ϑ telle que $F(x_0 - 1, \vartheta) = 1 - \alpha_1$ (cf. V.B.2/ proposition VII).

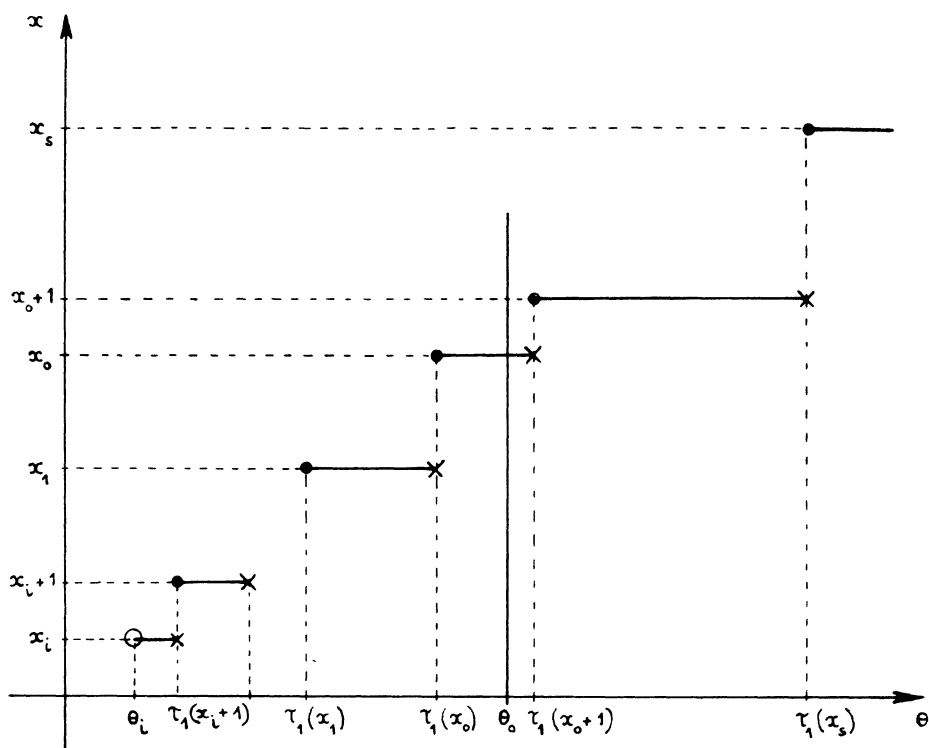


Figure VII.B - Les points représentent le "graphe" de $\tau_1(x)$ limite fiducielle inférieure au risque α_1 .
 Les —×— représentent le "graphe" de $\lambda'_1(\vartheta)$.
 Les points et le rond représentent le "graphe" de $\vartheta_1(x)$ limite inférieure de confiance approchée par défaut au risque α_1 .

soit $\mathcal{P}(X > x_0 - 1, \vartheta = \vartheta_0) = 1 - F(x_0 - 1, \vartheta_0) > \alpha_1$

En procédant ainsi on obtient une fonction $x = \lambda_1(\vartheta)$ définie pour toute valeur de ϑ telle que l'on ait $\tau_1(x_i + 1) < \vartheta \leq \tau_1(x_s)$.

A toute valeur $\vartheta_0 \leq \tau_1(x_i + 1)$ on associera la valeur x_i qui est encore limite supérieure de probabilité incluse à un risque $\alpha_1(\vartheta) \leq \alpha_1$ puisque :

$$F(x_i, \vartheta_0) \geq F[x_i, \tau_1(x_i + 1)] = 1 - \alpha_1$$

soit : $\mathcal{P}(X > x_i, \vartheta = \vartheta_0) = 1 - F(x_i, \vartheta_0) \leq \alpha_1$

Enfin à toute valeur ϑ_0 supérieure à $\tau_1(x_s)$ on associera la valeur x_s qui correspond à un risque $\alpha_1(\vartheta_0) = 0$ puisque $F(x_s, \vartheta_0) = 1$.

La fonction $x = \lambda_1(\vartheta)$ ainsi définie est de par sa construction une fonction en escalier non décroissante et prenant toutes les valeurs possibles pour X (cf. figure VII.B/).

Elle constitue la meilleure limite supérieure de probabilité approchée par défaut au risque α_1 pour X .

Pour définir à partir de la fonction $x = \lambda_1(\vartheta)$ une limite inférieure de confiance à un risque au plus égal à α_1 , il suffit de procéder de manière analogue à celle qui a été indiquée en IV.B/ pour le cas d'une fonction $x = \varphi_1(\vartheta)$ présentant un palier.

La fonction $\vartheta_1'(x)$ cherchée est celle qui associe à la valeur observée x_1 la borne inférieure des valeurs de ϑ telles que $x_1 = \lambda_1(\vartheta)$, c'est-à-dire précisément la valeur $\tau_1(x_1)$ sauf pour la valeur x_1 à laquelle elle associe la borne inférieure ϑ_1 de l'intervalle de variation de ϑ .

Nous énoncerons donc la :

Proposition VIII - Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est pour toute valeur de X sauf sa borne supérieure x_s une fonction continue et non croissante du paramètre ϑ dont l'intervalle de variation est au moins l'intervalle ouvert $]0, 1[$ elle admet des limites inférieure et supérieure de confiance de type (N) approchées par défaut pour ϑ à un risque donné α_1 (ou α_2) quelconque.

Les mieux approchées de ces limites sont pour toute valeur de X exceptée x_1 pour la limite inférieure et x_s pour la limite supérieure confondues avec les limites fiducielles au risque α_1 (ou α_2) correspondantes.

Pour $X = x_1$ la limite inférieure approchée est la borne inférieure ϑ_1 des valeurs de ϑ . Pour $X = x_s$ la limite supérieure approchée de confiance est la borne supérieure ϑ_s des valeurs de ϑ .

Application - Construction des tables ou des abaques de limites de confiance pour le paramètre d'une distribution binomiale ou de Poisson.

Les tables ou abaques figurant dans les tables de Fisher et Yates, de Pearson et Hartley ou de Hald sont construites conformément à la proposition VIII avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Ainsi pour une distribution binomiale les limites inférieure et supérieure de confiance à un risque au plus égal à α correspondant à la valeur $X = k$ sont les valeurs ϑ_1 et ϑ_2 respectivement solution des équations

$$\Pr(X \geq k, \theta = \theta_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{soit :} \quad \sum_{x=k}^{x=n} C_n^x \vartheta_1^x (1 - \vartheta_1)^{n-x} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et} \quad \Pr(X \leq k, \theta = \theta_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\text{soit :} \quad \sum_{x=0}^{x=k} C_n^x \vartheta_2^x (1 - \vartheta_2)^{n-x} = \frac{\alpha}{2}$$

pour $k = 0$, $\vartheta_1(0) = 0$ et pour $k = n$, $\vartheta_2(n) = 1$.

Pour une distribution de Poisson les limites inférieure et supérieure de confiance à un risque au plus égal à α correspondant à la valeur $X = k$ sont les valeurs ϑ_1 et ϑ_2 respectivement solutions des équations :

$$\Pr(X \geq k, \theta = \theta_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{soit} \quad \sum_{x=k}^{x=n} e^{-\theta_1} \frac{\theta_1^x}{x!} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et} \quad \Pr(X \leq k_{\theta_1=\theta_2}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{soit} \quad \sum_{x=0}^{x=k} e^{-\theta_2} \frac{\theta_2^x}{x!} = \frac{\alpha}{2}$$

pour $k = 0$, on prend $\theta_1(0) = 0$.

Remarques -

1/ On a vu en V.B.2/ proposition VI que les conditions imposées à $F(x, \theta)$ ne pouvaient être réalisées que si l'intervalle de variation de θ était ouvert ou illimité.

2/ Quand X est bornée si $\theta > \tau_1(x_s)$ on a $\alpha_1(\theta) = 0$; de même si $\theta < \tau_2(x_i)$ on a $\alpha_2(\theta) = 0$.

On se trouve dans ce cas quand on cherche des limites approchées de confiance au risque $\frac{\alpha}{2}$ pour le paramètre de la loi de probabilité d'une variable distribuée suivant une loi binomiale ou de Poisson.

Ainsi pour une distribution binomiale avec $n = 5$, si on prend $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,025$ on a $x_i = 0$ et $\tau_2(x_i) = 0,522(1)$

$$x_s = 5 \text{ et } \tau_1(x_s) = 0,478$$

On a donc : $\alpha_2(\theta) = 0$ si $\theta < 0,522$ et $\alpha_1(\theta) = 0$ si $\theta > 0,478$.

Comme ces deux intervalles se recouvrent, on a toujours $\alpha(\theta) \leq \frac{\alpha}{2} = 2,5\%$.

Si maintenant $n = 10$ on a : $x_i = 0$ et $\tau_2(x_i) = 0,308$

$$x_s = 10 \text{ et } \tau_1(x_s) = 0,692$$

on a donc $\alpha_2(\theta) = 0$ si $\theta < 0,308$ et $\alpha_1(\theta) = 0$ si $\theta > 0,692$.

Si on désire avoir un risque global $\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)$ plus voisin de α il faut renoncer à limiter l'intervalle de confiance approché par des limites de confiance approchées à des risques α_1 et α_2 donnés.

On pourrait par exemple envisager de choisir des fonctions $\lambda_1(\theta)$ et $\lambda_2(\theta)$ telles que pour $\theta > \tau_1(x_s)$ on ait $\alpha_1(\theta) = 0$ et $\alpha_2(\theta) \leq \alpha$ tout en étant le plus voisin possible de α . Pour $\theta < \tau_2(x_i)$ on pourrait de même choisir $\alpha_2(\theta) = 0$ et $\alpha_1(\theta) \leq \alpha$ tout en étant le plus voisin possible de α . Pour θ compris entre $\tau_2(x_i)$ et $\tau_1(x_s)$ on pourrait augmenter progressivement $\alpha_2(\theta)$ avec θ et diminuer corrélativement $\alpha_1(\theta)$ suivant une loi à déterminer.

3/ De même que les fonctions $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ les fonctions $\theta'_1(x)$ et $\theta'_2(x)$ ne sont définies que pour les valeurs possibles pour X c'est-à-dire pour un ensemble discret de valeurs de x . Elles ne doivent donc en aucun cas être représentées par des courbes continues mais par un graphe de points isolés tel celui constitué par les points et le rond de la figure VII.B. qui est celui de la fonction $\theta'_1(x)$.

VII. C/ Utilisation des graphes de limites de confiance approchées pour ϑ pour déterminer des limites de probabilité approchées pour X.

Le détail de la construction des limites de confiance approchées montre que l'on peut inversement par lecture en sens inverse des "abaques" ou plutôt des graphes associer à toute valeur de ϑ des limites de probabilité supérieure et inférieure pour X à un risque $\alpha(\vartheta) \leq \alpha$, α étant fixé.

Il y a lieu de remarquer que pour avoir une limite supérieure de type (N), c'est-à-dire la valeur de la fonction $\lambda_1(\vartheta)$, il faut associer à la valeur ϑ_0 l'ordonnée du point du graphe de $\vartheta'_1(x)$ situé immédiatement à gauche de la droite $\vartheta = \vartheta_0$ même si ϑ_0 coïncide avec une limite fiducielle $\tau_1(x)$ (cf. figure VII. B).

Par contre pour avoir une limite supérieure de type (F) ce qui est plus généralement recherché, il faut associer à ϑ l'ordonnée du point du graphe de $\vartheta'_1(x)$ situé immédiatement à droite de la droite $\vartheta = \vartheta_0$ ou sur cette droite si ϑ_0 coïncide avec une limite fiducielle $\tau_1(x)$.

Cette règle est facile à retenir si on se rappelle que la limite supérieure de probabilité de type (F) est au moins égale à la limite de type (N).

Pour la détermination des limites inférieure de probabilité on peut énoncer des règles analogues que l'on déduira des précédentes en intervertissant les termes droit et gauche et en se rappelant que la limite inférieure de type (F) est au plus égale à la limite de type (N).

On peut encore noter que le graphe des limites de probabilité de type (N) est intérieur au graphe des limites de type (F).

(1) Cf. Hald "Statistical tables and formulas" p. 66-67.