

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. VANGREVELINGHE

Étude statistique comparée des résultats des référendums de 1958 et 1961

Revue de statistique appliquée, tome 9, n° 3 (1961), p. 83-100

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_3_83_0

© Société française de statistique, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE STATISTIQUE COMPARÉE DES RÉSULTATS DES REFERENDUMS DE 1958 ET 1961

G. VANGREVELINGHE

Administrateur à l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques

Le modèle que nous présentons ici n'a pas pour but de rechercher les raisons des mouvements nets survenus entre le référendum de 1958 et celui de 1961, mais plutôt de décrire les mouvements qui se sont produits dans le comportement du corps électoral entre 1958 et 1961.

Nous sommes partis de l'hypothèse que les résultats de 1961, pour chaque circonscription, peuvent être obtenus en transformant les résultats 1958 (de cette circonscription) à l'aide d'un opérateur linéaire unique.

L'intérêt du modèle présenté est double.

1) Il fournit une estimation de l'effectif de chacune des 9 cases du tableau à double entrée Vote 1958 × Vote 1961.

2) Il permet, pour chaque circonscription, de mesurer les écarts entre les résultats constatés en 1961 et les résultats théoriques, c'est-à-dire ceux que l'on aurait obtenus si le modèle général avait décrit de façon parfaite les mouvements survenus entre 1958 et 1961 dans chacune des circonscriptions.

L'importance des "résidus" montre dans quelle mesure le modèle rend bien compte de l'évolution qui s'est produite entre les deux référendums. Leur inégale distribution géographique met en évidence des différences d'évolution qu'il reste à étudier.

I - POSITION DU PROBLEME.

Les résultats du référendum de 1961 sont assez nettement différents de ceux du référendum de 1958. Nous avons en effet les résultats suivants :

	Inscrits		Abstentions		Blancs ou nuls		Oui		Non	
28 Septembre 1958	26 603 464	100,00	4 006 614	15,44	203 549	0,77	17 668 790	66,41	4 624 511	17,38
8 Janvier 1961	27 184 408	100,00	6 393 162	23,52	594 699	2,19	15 200 073	55,91	4 996 494	18,88

Il serait du plus haut intérêt de disposer des résultats d'une enquête donnant pour chaque électeur la manière dont il a voté à chacun des deux référendums successifs, ce qui permettrait de saisir les mouvements survenus entre les deux référendums et non plus seulement leur résultat net.

Plus précisément il serait possible, disposant du tableau à double entrée (Vote 1958 $\times$ Vote 1961), de répondre à des questions telles que :

Parmi les électeurs qui avaient voté "oui" en 1958, quelle est la proportion de ceux qui ont voté "non" en 1961 ?

Parmi les abstentions de 1961, quelle est la part de ceux qui avaient voté "oui" en 1958 ?

Malheureusement une telle enquête n'a pas été faite à notre connaissance. Il y a d'ailleurs des raisons de penser qu'il est très difficile d'obtenir des Français une réponse entièrement sincère sur leurs votes passés.

Pour étudier l'évolution du comportement du corps électoral d'un référendum à l'autre, nous nous sommes donc attachés à rétablir ce tableau statistique à double entrée par une voie indirecte ; ce qu'il est heureusement possible de faire, au prix de certaines hypothèses simplificatrices, du fait que l'on dispose des résultats des deux référendums détaillés par département, commune, ...

II - LE MODELE ADOPTE.

Nous avons recherché un schéma explicatif global qui - tout en étant simple - permette de rendre compte "le mieux possible" de l'évolution observée.

A l'intérieur d'un domaine d'études donné, (France entière ; Ville de Paris ; reste de la Seine, nous pouvons définir un certain nombre d'unités élémentaires, (département, arrondissement, commune), que nous repèrerons par un indice h .

Pour chaque unité, soit :

n_h le nombre d'inscrits en 1958 ;

O_h le pourcentage d'électeurs inscrits ayant voté "oui" en 1958 ;

N_h le pourcentage d'électeurs inscrits ayant voté "non" en 1958 ;

A_h le reste (il s'agit essentiellement des abstentionnistes, mais aussi des bulletins blancs ou nuls).

$$O_h + N_h + A_h = 100$$

Nous avons assimilé les bulletins blancs ou nuls à des abstentions. Au dernier référendum, ces bulletins étaient certes un peu plus nombreux qu'à l'accoutumée, mais leur proportion reste néanmoins insignifiante.

De même, en 1961, nous avons les quantités n'_h , O'_h , N'_h , A'_h .

Le modèle estimé est le suivant :

$$O' = \alpha_1 O + \beta_1 N + \gamma_1 A$$

$$N' = \alpha_2 O + \beta_2 N + \gamma_2 A$$

$$A' = \alpha_3 O + \beta_3 N + \gamma_3 A$$

Ce qui se lit de la manière suivante :

Le pourcentage des électeurs qui ont voté "oui" en 1958 et qui ont à nouveau voté "oui" en 1961 est $100 \alpha_1$; le pourcentage des électeurs qui ont voté "oui" en 1958 et qui ont voté "non" en 1961 est $100 \alpha_2$, ...

Ou aussi : le pourcentage d'abstentions de 1961 provient de $100 \alpha_3$ % des électeurs qui avaient voté "oui" en 1958, plus $100 \beta_3$ % des électeurs qui avaient voté "non", plus $100 \gamma_3$ % des électeurs qui s'étaient abstenus. Les deux autres équations s'interprètent de la même manière.

Les coefficients α , β , γ doivent vérifier les relations :

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{i=1}^3 \beta_i = \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$, étant tous positifs.

Dans chacune des unités élémentaires qui composent le domaine d'études, il est bien évident que le modèle ajusté ne sera pas exactement vérifié ; nous pourrions définir des "écarts" ε par rapport au modèle estimé. Ainsi pour l'unité élémentaire h nous avons :

$$O'_h \text{ observé} = O'_h \text{ théor.} + \varepsilon_1 = \alpha_1 O_h + \beta_1 N_h + \gamma_1 A_h + \varepsilon_{1h}$$

$$N'_h = \alpha_2 O_h + \beta_2 N_h + \gamma_2 A_h + \varepsilon_{2h}$$

$$A'_h = \alpha_3 O_h + \beta_3 N_h + \gamma_3 A_h + \varepsilon_{3h}$$

Remarquons immédiatement que la somme des écarts par rapport au modèle écrit sous la forme précédente est toujours nulle :

$$\boxed{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0}$$

Cela est bien évident à priori : si les électeurs, par exemple, se sont abstenus plus que ne le veut le modèle, il y a obligatoirement moins de "oui" ou moins de "non".

Notons également que l'importance et la distribution des écarts par rapport au modèle permettent de voir dans quelle mesure le modèle estimé rend bien compte de la réalité.

La méthode d'estimation utilisée a été celle de l'ajustement linéaire. L'indication détaillée des calculs, ainsi que la discussion des hypothèses, sont données en annexe.

Trois études distinctes ont été faites :

- la première a porté sur les vingt arrondissements de Paris..
- la seconde sur les 80 communes de la Seine
- la troisième sur les 89 départements qui constituent la France métropolitaine. La Corse a été exclue à priori du champ de l'étude, car il semble bien que le nombre particulièrement élevé d'abstentions qu'on y a observé ne rentre pas dans le cadre d'un schéma explicatif relatif à la France entière.

Nous avons choisi ces trois domaines d'études à la suite de l'étude statistique du référendum qui avait été faite en 1958 par M. Desabie (Journal de la Société de Statistique de Paris, juillet 1959).

Disons tout de suite que le schéma explicatif présenté ne semble pas être valable dans le cas des 80 communes de la Seine. La trop grande diversité des comportements électoraux entre les diverses communes ne permet

sans doute pas d'expliquer l'évolution observée de 1958 à 1961 à l'aide d'un schéma aussi simple.

III - LES RESULTATS OBTENUS.

Nous avons présenté les résultats relatifs à chacun des domaines étudiés sous forme de trois tableaux. La première série de tableaux se rapporte à Paris, la seconde à la France métropolitaine.

Le premier tableau donne, pour 100 électeurs inscrits, leur répartition suivant la manière dont ils ont voté à chacun des deux référendums. Il se lit de la manière suivante :

Exemple I - A Paris, pour 100 électeurs inscrits, 11,91 ont voté "non" en 1958 et en 1961.

Les deuxièmes et troisièmes tableaux constituent une autre manière de présenter les mêmes résultats. Ils se lisent de la manière suivante.

Exemple II - A Paris, pour 1000 électeurs qui ont voté "non" en 1958, 137 ont voté "oui" en 1961, 637 ont à nouveau voté "non" et 226 se sont abstenus.

Exemple III - Pour 1000 électeurs qui se sont abstenus à Paris en 1961, 345 avaient voté "oui" en 1958, 157 avaient voté "non" et 498 s'étaient déjà abstenus en 1958.

Rappelons que le modèle a été estimé directement sous la forme II, c'est-à-dire que les coefficients $\alpha_1 \alpha_2 \dots \gamma_3$ ci-dessus mentionnés figurent dans le tableau II (après multiplication par 100).

Tableau donnant la répartition des électeurs en 1958 et en 1961 en % du nombre d'inscrits.

		1958			PARIS	
		oui	non	Abstent.	calculé	Observé
1961	oui	50,04	2,56	0,85	53,45	53,24
	non	5,58	11,91	2,13	19,62	19,51
	Abst	9,28	4,23	13,42	26,93	27,25
		64,9	18,7	16,4	100	100

Ce que l'on peut présenter de deux manières différentes :

Où sont allés les votes de 1958 ?

	oui 58	non 58	abst. 58
oui	77,1	13,7	5,2
non	8,6	63,7	13,0
abst	14,3	22,6	81,8
	100	100	100

D'où proviennent les votes de 1961 ?

	O 58	N 58	A 58	
O 61	93,6	4,8	1,6	100
N 61	28,4	60,7	10,9	100
A 61	34,5	15,7	49,8	100

Tableau donnant la répartition des électeurs France entière (89 départements) en 1958 et 1961 en % du nombre d'inscrits.

1958				calculé	Observé
	oui	non	abstent.		
oui	56,1	0	0	56,1	55,89
non	1,06	16,65	0,7	18,4	18,37
abst	9,24	0,75	15,5	25,5	25,74
	66,4	17,4	16,2	100	100

Ce que l'on peut présenter de deux manières différentes :

1) où sont allés les votes de 1958 ?

	O 58	N 58	A 58
O 61	84,5	0	0
N 61	1,6	95,7	4,2
A 61	13,9	4,3	95,8
	100	100	100

2) D'où proviennent les votes de 1961 ?

	O 58	N 58	A 58	
O 61	100	0	0	100
N 61	5,75	90,45	3,80	100
A 61	36,25	2,94	60,80	100

Les tableaux relatifs à Paris montrent clairement que l'évolution constatée entre les deux référendums est la résultante de plusieurs mouvements en sens inverse, qui se compensent dans une certaine mesure. Ainsi 14,9 % du corps électoral a quitté le "oui" pour se porter soit vers l'abstention (9,3 %) soit vers le "non" (5,6 %).

Le mouvement en sens inverse : de l'abstention ou du "non" en 1958 vers le "oui" en 1961 n'a touché que 3,4 % du corps électoral, si bien que la résultante est une diminution nette du pourcentage de "oui" de 64,9 % à 53,2 %. La légère augmentation du pourcentage de "non" résulte de la même manière de mouvements en sens inverse. Pour l'abstention, nous pouvons remarquer que 81,8 % des électeurs qui s'étaient abstenus en 1958 se sont à nouveau abstenus au dernier référendum et que d'autre part, 34,5 % des abstentions de 1961 proviennent de "oui" de 1958, 15,7 % provenant de "non".

Pour la France entière (deuxième série de tableaux), les mouvements en sens inverse ont revêtu une ampleur moindre ; la conclusion qui se dégage est que, pour le "oui", le mouvement ne s'est pratiquement produit que dans le sens d'une diminution, pour une part au profit du "non", mais surtout au profit de l'abstention. De 1958 à 1961, la légère augmentation du pourcentage de "non" résulte d'une part du fait qu'une certaine proportion des "non" de 1958 se sont abstenus, d'autre part, à l'opposé, des électeurs qui en 1958 s'étaient abstenus ou avaient voté "oui" ont, en 1961, voté "non". Pour les abstentions, ceux qui s'étaient abstenus en 1958 se sont à nouveau abstenus en 1961 dans la proportion de 96 %. A eux sont venus s'ajouter 13,9 % des "oui" et 4,3 % des "non" de 1958.

Remarques - Lorsque l'on ajuste une matrice de passage des résultats du référendum de 1958 à ceux de 1961, la matrice obtenue sera intermédiaire entre celle qui suppose la complète indépendance des résultats des deux référendums et celle qui suppose au contraire le moindre mouvement du corps électoral d'un référendum à l'autre.

Il apparaît immédiatement que la matrice obtenue est très proche de celle que l'on obtient lorsque l'on fait la deuxième des hypothèses précédentes.

Ainsi pour Paris :

		1958													
		O		N		A		O		N		A			
1961	O	53, 2	34, 5	9, 9	8, 7	50, 0	2, 6	0, 9	53, 2	0	0				
	N	19, 5	12, 7	3, 6	3, 2	5, 6	11, 9	2, 1	0, 8	18, 7	0				
	A	27, 3	17, 7	5, 2	4, 5	9, 3	4, 2	13, 4	10, 9	0	16, 4				
		100		64, 9		18, 7		16, 4		64, 9		18, 7		16, 4	
		Hypothèse I (indépendance)				Ajustement effectif				Hypothèse II (mouvement minimum)					

Pour la France métropolitaine :

Pour la France métropolitaine :

1958

		1958											
		O	N	A		O	N	A		O	N	A	
1961	O	56,1	37,2	9,8	9,1	56,1	0	0		56,1	0	0	
	N	18,4	12,2	3,2	3,0	1,1	16,6	0,7		1,0	17,4	0	
	A	25,5	17,0	4,4	4,1	9,2	0,8	15,5		9,3	0	16,2	
		100	66,4	17,4	16,2	66,4	17,4	16,2		66,4	17,4	16,2	
			Hypothèse I (indépendance)			Ajustement effectif				Hypothèse II (mouvement minimum)			

Ceci reflète une très grande stabilité du corps électoral. Les seuls passages vraiment importants sont ceux d'électeurs qui ont voté "oui" en 1958 et qui en 1961 ont voté "non" ou se sont abstenus.

Par ailleurs, la stabilité du comportement électoral est beaucoup plus grande sur l'ensemble de la France qu'à Paris pris isolément : pour l'ensemble de la France, 88,2 % des électeurs inscrits se sont comportés exactement de la même manière aux deux référendums ; à Paris cette proportion n'est plus que de 75,3 %. Ce résultat semble tout-à-fait plausible.

Pour la France métropolitaine, 1,6 % seulement des électeurs qui ont voté "oui" en 1958 ont modifié leur comportement pour voter "non" en 1961, ce qui représente à peine 6 % du montant des "non" de 1961 et 1,1 % des électeurs inscrits. De la même manière, 13,9 % des électeurs qui avaient voté "oui" en 1958 se sont abstenus en 1961, ce qui représente cette fois 36,2 % du nombre des abstentions de 1961 (9,2 % du corps électoral).

Le nombre d'électeurs qui ont voté "non" ou se sont abstenus en 1958 et qui se sont décidés à voter "oui" en 1961 apparaît être négligeable sur l'ensemble de la France.

IV - VALEUR DES RESULTATS.

Dans chacun des départements (ou dans chacun des arrondissements de Paris), les résultats observés en fait ne sont pas rigoureusement égaux aux résultats qui découlent du modèle. On peut certes déterminer par le calcul les variances et covariances des paramètres estimés, mais cela était matériellement impossible vu la lourdeur des calculs.

L'erreur aléatoire qui affecte l'estimation des paramètres n'a donc pas été calculée ; l'importance relative des "oui", des "non" et des abstentions montre toutefois que les coefficients α_1 , α_2 , α_3 , β_2 et γ_3 doivent être connus avec une précision relativement satisfaisante ; l'imprécision portera essentiellement sur les coefficients β_1 , γ_1 , γ_2 et β_3 qui mesurent l'influence de facteurs explicatifs secondaires.

Nous nous sommes contentés de calculer pour chaque département (ou pour chaque arrondissement de Paris), la valeur des écarts entre les résultats du référendum 1961 et les résultats du modèle : Pour obtenir ceux-ci, on part des pourcentages observés en 1958, et on les multiplie respectivement par les coefficients adéquats α_1 , α_2 , ..., γ_3 pour obtenir les pourcentages qui auraient dû être observés si le modèle avait été exactement vérifié.

La considération de la distribution des écarts est très importante dans l'interprétation des résultats, car elle montre comment et dans quelle mesure des influences perturbatrices "locales" ont joué. Nous avons, en effet, estimé un modèle qui expliquait le mieux possible l'évolution du corps électoral dans son ensemble mais il est presque évident à priori qu'il sera plus ou moins bien adapté à l'évolution du comportement électoral d'un secteur pris isolément.

Les cartes qui suivent - qui montrent l'importance et le signe des écarts - témoignent que le modèle ajusté constitue une image satisfaisante de l'évolution réelle.

Le tableau donnant les écarts par rapport au modèle ajusté sur les vingt arrondissements de Paris montre que dans ce cas le schéma explicatif que nous avons bâti rend très bien compte de l'évolution réelle. Pour l'ensemble des 89 départements français, ces résultats sont moins bons tout en restant très convenables.

En ce qui concerne les 80 communes de la Seine, nous rappelons que ce modèle n'est pas valable.

PARIS : Ecarts observés par rapport au modèle ajusté

Arrondissements	% oui		% non	
	Observé	Calculé	Observé	Calculé
1	54,0	55,5	16,4	16,8
2	51,1	51,9	17,7	19,3
3	50,5	49,8	20,7	21,6
4	55,2	53,2	19,0	20,0
5	50,5	50,4	18,3	19,2
6	57,8	56,5	17,3	16,7
7	57,9	57,8	15,9	15,1
8	59,3	59,2	15,7	14,5
9	57,3	57,2	16,3	17,4
10	52,3	52,8	19,1	20,5
11	50,9	49,9	22,5	22,5
12	53,8	52,3	20,1	20,2
13	48,7	49,3	23,7	23,5
14	52,7	52,3	19,6	20,3
15	51,4	53,1	18,6	19,2
16	57,6	58,4	15,2	14,7
17	57,7	57,3	16,4	16,7
18	52,9	53,3	21,1	21,2
19	49,0	50,3	23,5	22,8
20	49,1	49,3	24,5	23,3
Ensemble	53,24	53,45	19,51	19,62

Sur le graphique ci-après, nous avons, pour chaque arrondissement de Paris, représenté en fonction du pourcentage de "non" observé en 1958, d'une part le pourcentage de "non" observé en 1961, d'autre part le pourcentage de "non" calculé d'après le modèle que nous avons estimé.

Nous voyons que les points qui représentent les pourcentages de "non" observés en 1961 en fonction des pourcentages de "non" de 1958 se situent sensiblement le long d'une courbe que nous avons tracée à main levée. Les points représentant les pourcentages calculés se répartissent sensiblement le long d'une droite que nous avons également ajustée graphiquement. Il ne faudrait toutefois pas croire que la pente de cette droite correspond au pourcentage de "non" 1958 qui ont voté à nouveau "non" en 1961 (qui est, rappelons-le, de 63,7 %). Pour bien le mettre en évidence, nous avons tracé en regard l'une des droites d'équation $N_{61} = 0,637 N_{58} + Cte$.

Ce graphique nous montre qu'aux deux extrêmes, c'est-à-dire d'une part dans les 6e, 7e, 8e et 16e arrondissements, d'autre part dans les 13e, 19e et 20e arrondissements, on a voté plus "non" en 1961 que ne l'aurait voulu le modèle. Dans les autres arrondissements, c'est-à-dire ceux où le pourcentage de "non" en 1958 était "moyen", on constate le phénomène inverse.

V - ETUDE DES RESIDUS.

A Paris, les tableaux qui précèdent montrent que les écarts par rapport au schéma explicatif sont faibles. On peut toutefois noter que, chaque fois que le pourcentage de "non" en 1958 était faible (ou au contraire élevé), le pourcentage de "non" observé en 1961 est un peu plus élevé que ne le voudrait le modèle ajusté. Ce même phénomène de "concavité" a pu s'observer sur les communes de la Seine (voir la courbe donnée en annexe) et il semble qu'il soit relativement simple de se l'expliquer.

France métropolitaine. L'importance et la nature différente suivant les régions des écarts observés par rapport au modèle ajusté sur l'ensemble de la France montre que l'évolution constatée n'a pas eu partout la même ampleur.

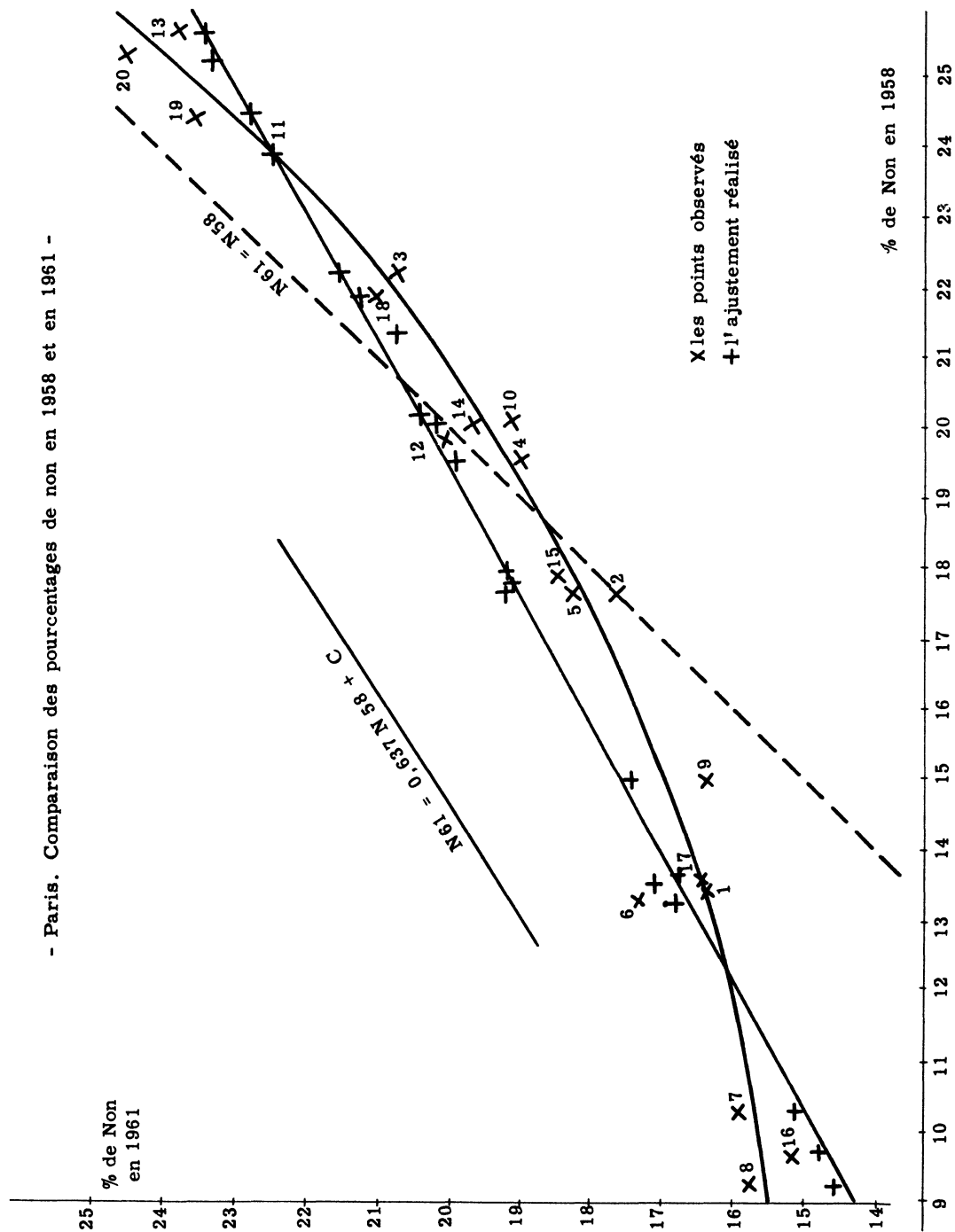
Sur la bordure Nord de la France - qui va de la Bretagne à l'Alsace, le corps électoral s'est montré un peu plus stable que ne l'aurait voulu le modèle, ce qui fait que l'on constate un écart par rapport au modèle positif pour les "oui", négatif pour les "non" et les abstentions.

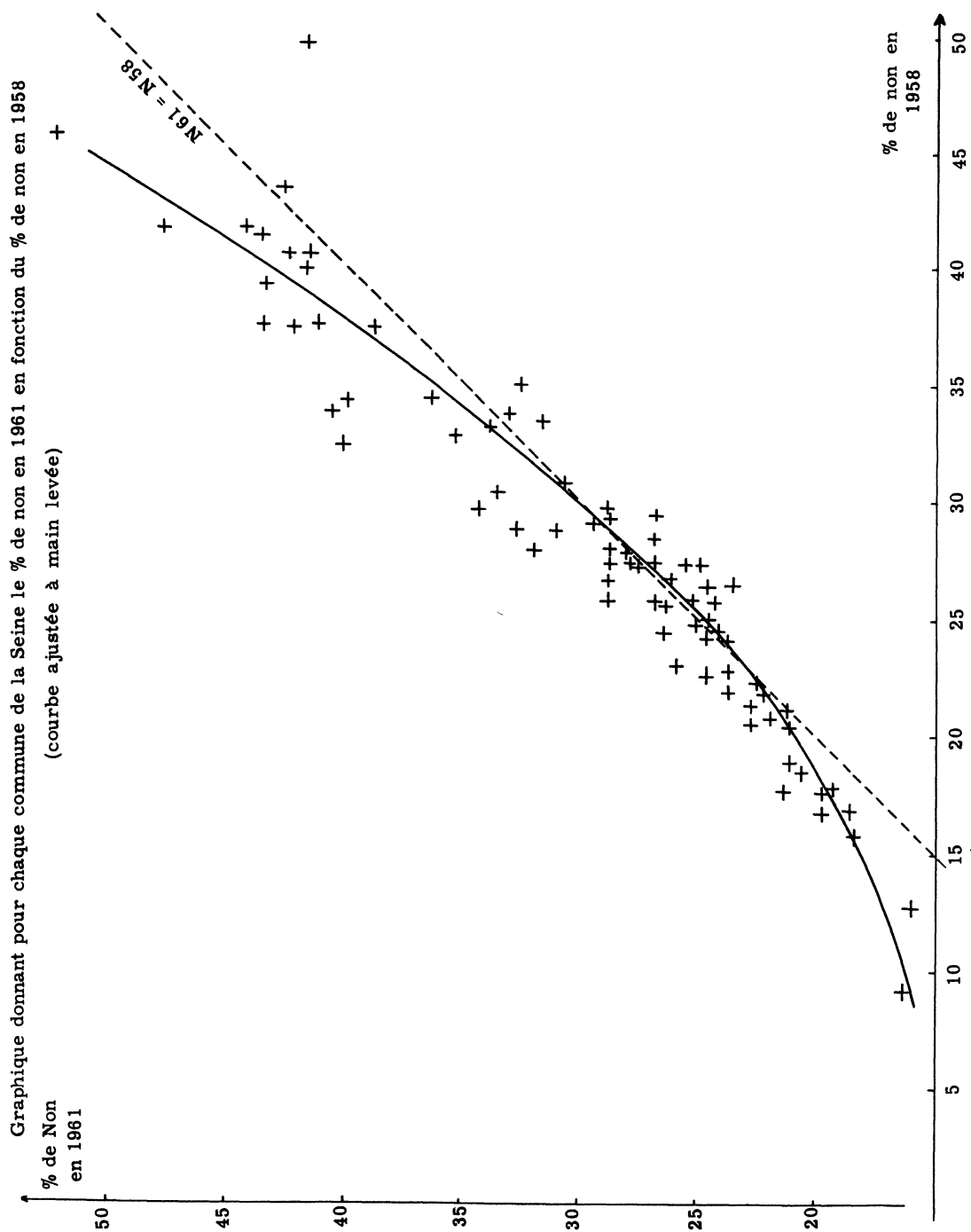
Dans la moitié Centre-Ouest et Sud-Ouest de la France, ainsi que sur la Côte d'Azur, l'évolution s'est faite un peu plus au profit des "non" que ne le prévoit le modèle général, et cela essentiellement aux dépens des "oui". Cette divergence est particulièrement marquée pour la vallée de la Garonne.

Dans la partie Centre-Est, Sud-Est - et surtout dans le Roussillon - l'évolution s'est faite plus dans le sens des abstentions que ne l'aurait voulu le modèle. Nous constatons des écarts négatifs sur les "oui", mais, fait surprenant, également sur les "non".

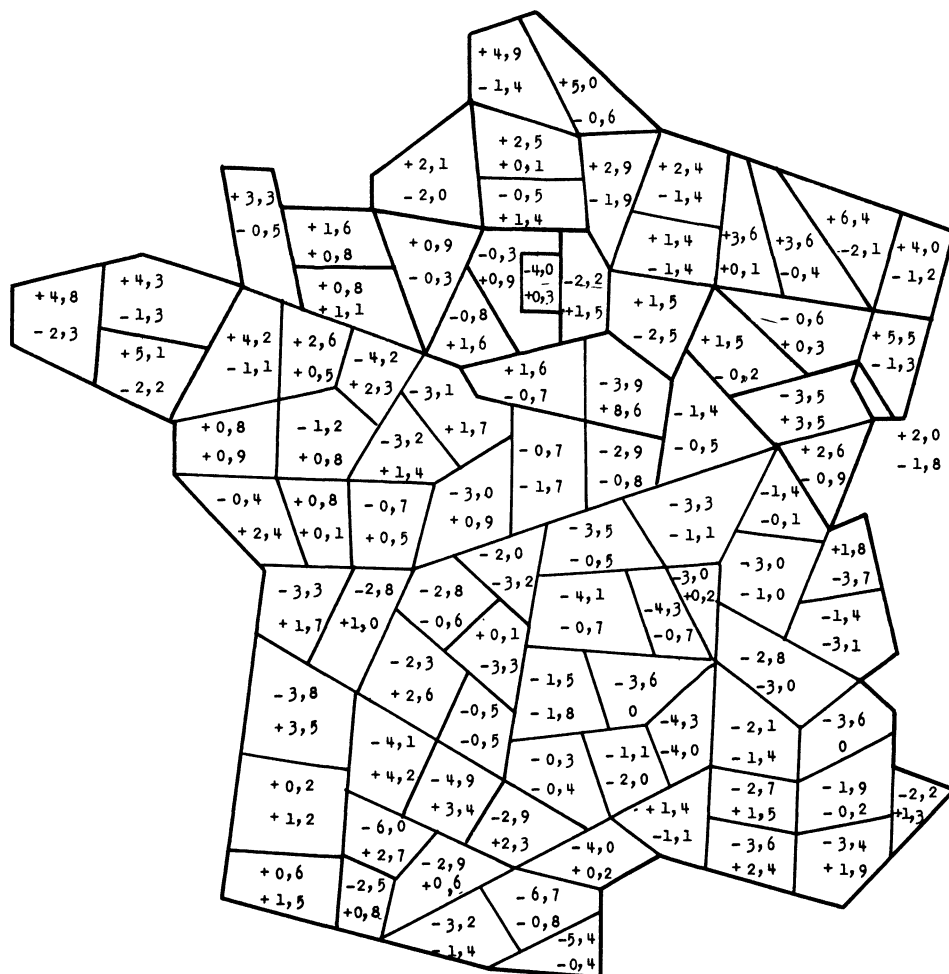
Le fait que dans ces départements l'on constate plus d'abstentions que ne l'aurait voulu l'évolution globale doit certainement s'expliquer dans une certaine mesure par les départs nombreux dans certaines régions en voie de dépeuplement. Le nombre d'inscrits se trouve alors gonflé par ceux des électeurs qui, - bien qu'ayant quitté leur ville ou leur village - n'ont pas encore été rayés des listes électorales pour une raison ou pour une autre.

- Paris. Comparaison des pourcentages de non en 1958 et en 1961 -





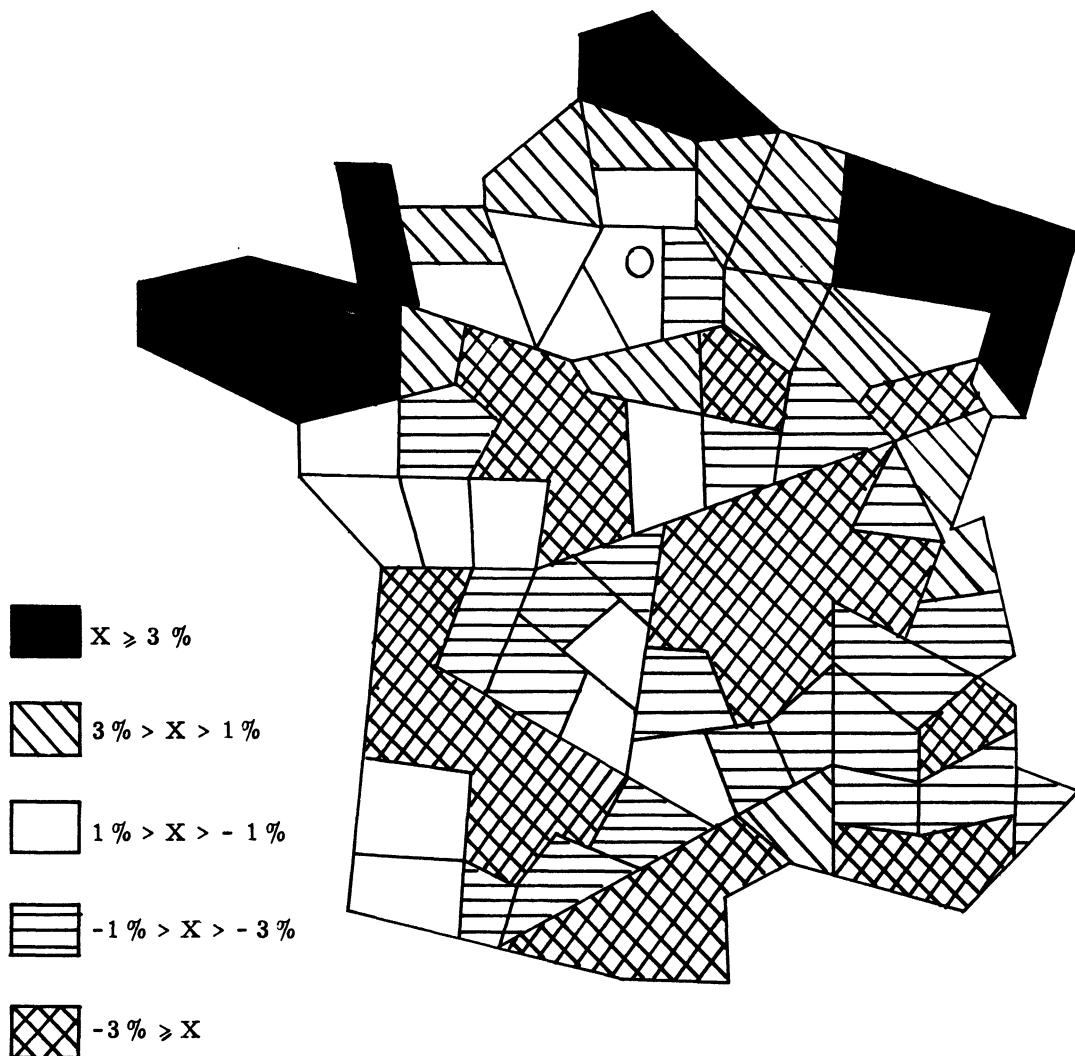
REFERENDUMS 1958 - 1961



Ecart en % par rapport au "oui" calculé

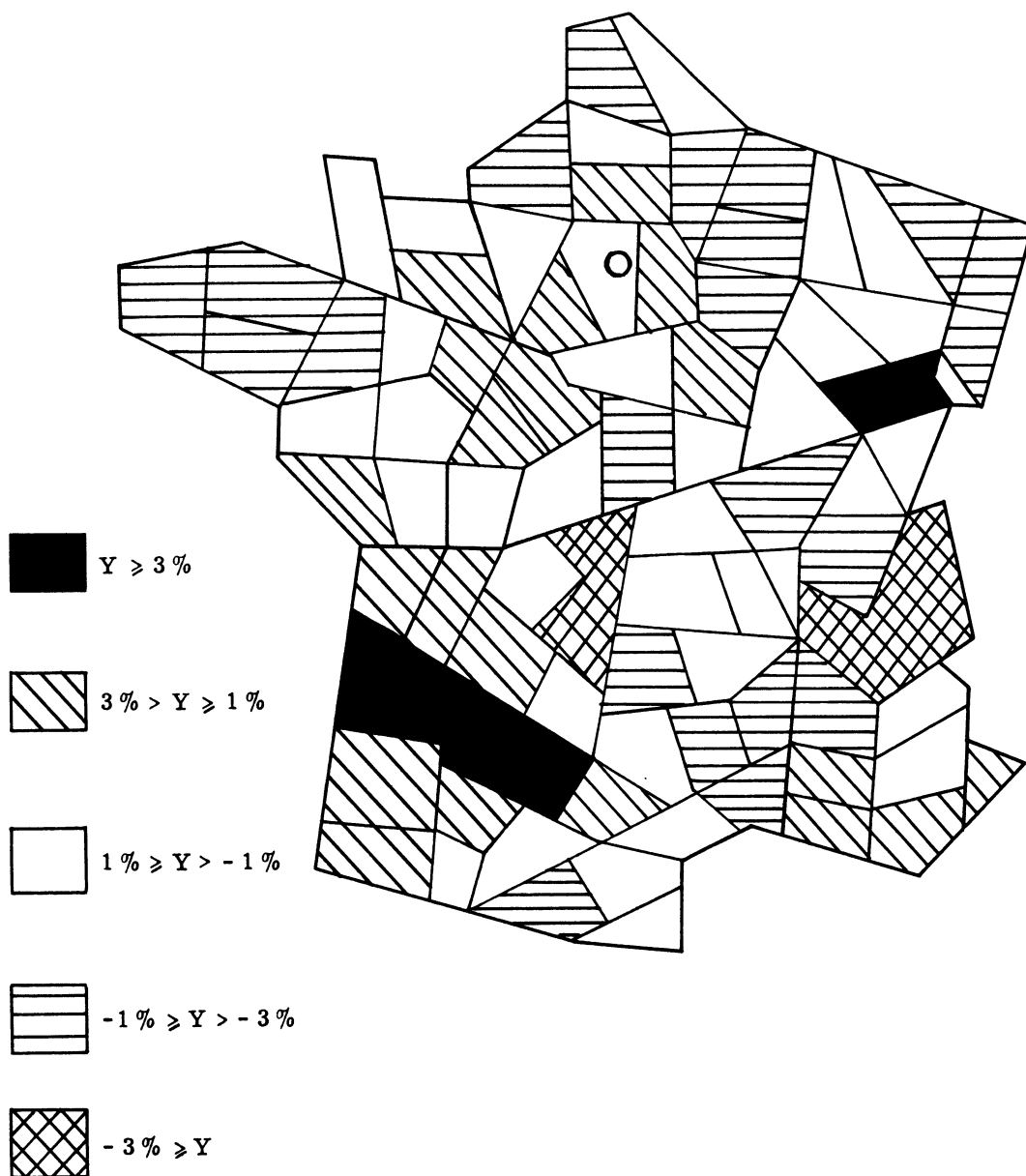
Ecart en % par rapport au "non" calculé

REFERENDUMS 1958-1961



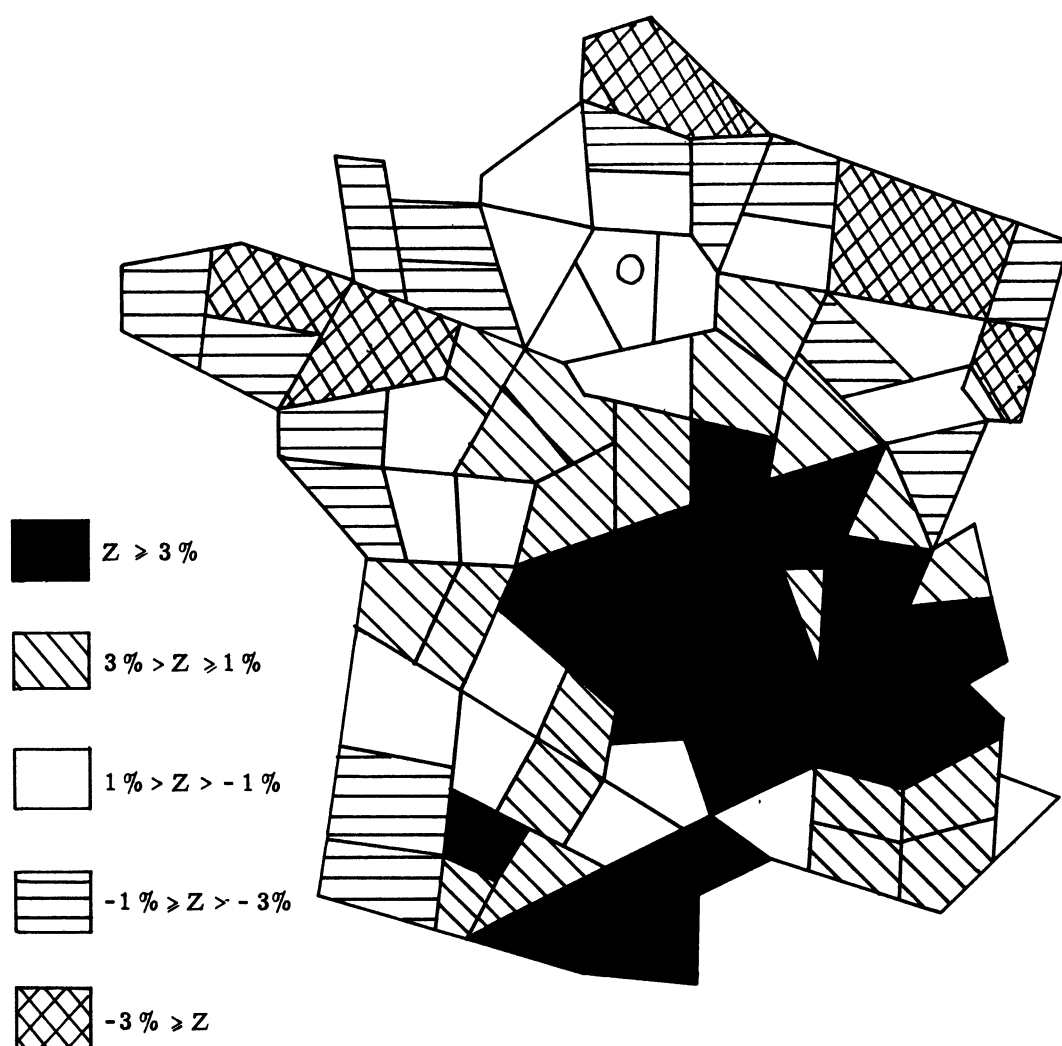
X = écart sur les "OUI" en % du nombre d'inscrits.

REFERENDUMS 1958-1961



Y = écart sur les "NON" en % du nombre d'inscrits.

REFERENDUMS 1958-1961



Z = écart sur les "ABSTENTIONS" en % du nombre d'inscrits.

La proportion nettement plus élevée d'abstentions observée dans le Roussillon traduit certainement l'influence de la campagne pour l'abstention qu'ont fait en 1961 les organisations viticoles.

Les trois cartes qui donnent le signe et l'importance des écarts par département mettent également en évidence la mesure dans laquelle des facteurs locaux ont perturbé l'évolution d'ensemble.

Il reste à faire la comparaison systématique, département par département, des cartes que nous avons établies aux diverses interprétations des résultats qui ont déjà été faites ici ou là. Nul doute qu'il s'agit là d'un travail très instructif, car nous avons pu dans une certaine mesure "quantifier" les influences locales qui viennent perturber le modèle explicatif de l'évolution globale. Mais ce ne serait plus là faire œuvre de statisticien.

VI ANNEXE - LA METHODE D'ESTIMATION UTILISEE.

Ainsi que nous l'avons déjà vu en II, le modèle estimé est le suivant :

$$\begin{aligned} O' &= \alpha_1 O + \beta_1 N + \gamma_1 A \\ N' &= \alpha_2 O + \beta_2 N + \gamma_2 A \\ A' &= \alpha_3 O + \beta_3 N + \gamma_3 A \end{aligned}$$

Soit en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} O' \\ N' \\ A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} O \\ N \\ A \end{bmatrix}$$

Nous avons en plus les relations suivantes :

$$O_h + N_h + A_h = 100$$

$$O_h + N'_h + A'_h = 100$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{i=1}^3 \beta_i = \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$ étant tous positifs.

La méthode d'estimation utilisée a été celle de l'ajustement linéaire.

Le modèle n'a toutefois pas été estimé sous sa forme initiale, car il faut bien remarquer qu'il s'agit d'un faux problème à 6 dimensions. Du fait que la somme des pourcentages est toujours égale à un, nous opérons toujours dans un espace à 4 dimensions.

Nous avons déjà exprimé ce fait d'une autre manière en écrivant :

$$\boxed{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0}$$

Il suffit donc d'écrire, en remplaçant A par 100 - O - N :

$$O' = (\alpha_1 - \gamma_1) O + (\beta_1 - \gamma_1) N + 100 \gamma_1$$

$$N' = (\alpha_2 - \gamma_2) O + (\beta_2 - \gamma_2) N + 100 \gamma_2$$

et nous procéderons à l'estimation sur cette forme.

Faisons immédiatement quelques remarques :

La méthode des moindres carrés ne possède une efficacité maximale que si les "erreurs" sur les pourcentages ont toute la même variance. Nous avons négligé la variabilité des produits $P(1 - P)$ et $-P'P''$ - les valeurs observées des pourcentages montrent qu'elle est relativement faible. Nous avons par contre pondéré chacun des pourcentages observés par la racine carrée du nombre d'inscrits. Cette correction est surtout nécessaire lorsque le domaine étudié est la France métropolitaine, le nombre d'inscrits variant beaucoup d'un département à l'autre.

Pour certaines des unités retenues pour l'étude, le nombre d'inscrits a varié de 1958 à 1961. Nous avons toujours ramené les résultats de 1961 à ce qu'ils auraient été si le nombre d'inscrits n'avait pas varié depuis 1958, en supposant que la variation du nombre d'inscrits s'était répartie entre le "oui", le "non" et l'abstention proportionnellement aux résultats observés pour l'unité considérée (pondération de Laspeyres). Cette hypothèse n'est certainement pas toujours vérifiée, mais c'est la plus vraisemblable des hypothèses simples que l'on peut formuler à ce sujet. L'erreur que l'on fait ainsi n'influera vraisemblablement que sur l'importance des résidus, et non sur l'estimation des paramètres.

Il aurait fallu pouvoir faire intervenir explicitement dans l'écriture du modèle la condition que les coefficients estimés doivent être compris entre 0 et 1. Ceci mène à un programme quadratique, impossible à résoudre avec les moyens qui étaient disponibles.

L'estimation A^* de la matrice des paramètres $\alpha \beta \gamma$ est donnée par les équations dites "équations normales". On a :

$$A^* = M_{xz} M_{zz}^{-1}$$

suivant la notation traditionnelle, où x_h est le vecteur des variables endogènes et z_h le vecteur des variables exogènes. Soit, en explicitant :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 & \beta_1 - \gamma_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 - \gamma_2 & \beta_2 - \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_h n_h O_h O_h' & \sum_h n_h O_h' N_h & \sum_h n_h O_h' \\ \sum_h n_h O_h N_h & \sum_h n_h N_h N_h' & \sum_h n_h N_h' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sum_h n_h O_h O_h & \sum_h n_h O_h N_h & \sum_h n_h O_h \\ \sum_h n_h O_h N_h & \sum_h n_h N_h N_h & \sum_h n_h N_h \\ \sum_h n_h O_h & \sum_h n_h N_h & \sum_h n_h \end{vmatrix}^{-1}$$

A priori il n'y a aucune raison pour que les paramètres ainsi estimés soient compris entre 0 et 1. Dans l'exécution des calculs, toutefois, il n'y a eu de difficultés que pour les coefficients β_1 et γ_1 dans le cas de l'ajustement effectué sur les 89 départements. Comme les valeurs calculées étaient négatives, il a fallu prendre $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ et recommencer les calculs.

Remarque - Les vecteurs propres des matrices - c'est-à-dire ce vers quoi l'on tendrait si l'on gardait indéfiniment la même matrice de passage - (ce qui est en fait très peu probable) ont pour coordonnées :

Paris : O = 25,8 N = 24,7 A = 49,5
 France métropolitaine : O = 0 N = 49,4 A = 50,6

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- D. MAC RAE - "Religious and socioeconomic factors in the French vote" 1946-1956. The American journal of Sociology - Novembre 1958.
- J. DESABIE - "Le Referendum 1958. Essai d'étude statistique". Journal de la Société de Statistique de Paris, Juillet 1959.
- J. KLATZMANN - "Comportement électoral et classe sociale" - "Les Elections du 2 Janvier 1956" (publié par la fondation nationale des sciences politiques).
 "Comment votent les paysans français" - "Revue française de Science politique" - Paris 1958.
- F. GOGUEL - Etude géographique du référendum 1961. in "Revue française de science politique" Paris 1961.
- MALINVAUD - Les méthodes statistiques en économétrie - Edition en 2 volumes. Mai 1960 (publié par l'I.N.S.E.E.).

Paris - Résultats des calculs intermédiaires.

$$M_{zz} = \begin{vmatrix} 728\,233,49 & 204\,275,94 & 1\,114\,989 \\ 204\,275,94 & 64\,508,83 & 320\,894 \\ 1\,114\,989 & 320\,894 & 1\,716\,883 \end{vmatrix}$$

$$M_{xz} = \begin{vmatrix} 595\,850,245 & 168\,151,73 & 913\,466,38 \\ 215\,422,871 & 65\,130,773 & 335\,207,94 \end{vmatrix}$$

$$M_{zz}^{-1} = \frac{1}{2\,978\,859\,015\,585} \begin{vmatrix} 7\,781\,154\,340,89 & 7\,075\,391\,470,78 & -6\,375\,712\,362,51 \\ 7\,075\,391\,470,78 & 7\,091\,228\,890,67 & -5\,920\,331\,475,40 \\ -6\,375\,712\,362,51 & -5\,920\,331\,475,40 & +5\,248\,840\,743,83 \end{vmatrix}$$

$$A^x = M_{xz} M_{zz}^{-1} = \begin{vmatrix} 71,94 & 8,47 & 5,23 \\ -4,37 & 50,74 & 13,00 \end{vmatrix}$$