

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. BASS

Le problème des corrélations dans la turbulence en soufflerie

Revue de statistique appliquée, tome 4, n° 2 (1956), p. 31-37

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_2_31_0

© Société française de statistique, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DES CORRÉLATIONS DANS LA TURBULENCE EN SOUFFLERIE

par

J. BASS

*Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines
et à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique
Maître de Conférences à l'École Polytechnique*

INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide, et en particulier celui de l'air dans une soufflerie, est défini en chaque point $M(x_1, x_2, x_3)$ par les grandeurs suivantes :

composantes de la vitesse en M

pression p

densité ρ

température

La plupart des expériences sur les fluides turbulents ont été faites à des vitesses relativement lentes (moins de 50 m/s), de sorte que le fluide peut être considéré comme incompressible et isotherme. Sa densité et sa température sont constantes. D'autre part, la pression est rattachée à la vitesse par une relation qui exprime l'incompressibilité. Finalement, la turbulence est essentiellement caractérisée par la vitesse en chaque point M .

Pour mesurer une composante de la vitesse, on utilise un anémomètre à faible inertie. Le seul qui soit employé est l'anémomètre à fil chaud. Il comporte un fil de platine de quelques millimètres de long, de quelques millièmes de millimètre de diamètre, chauffé par un courant électrique. Placé dans le vent, ce fil se refroidit, sa résistance change, et la variation de courant mesure, moyennant quelques précautions, la vitesse du vent. Plus exactement, elle dépend de la vitesse, dans des conditions qui vont être précisées.

Dans une soufflerie, l'air se déplace à une vitesse V , qui dans la chambre d'expérience est sensiblement uniforme, sauf au voisinage immédiat des parois, et dont la direction sera prise comme axe des x_1 . Mais V n'est qu'une vitesse moyenne. Si l'on place le fil chaud perpendiculairement à V , il fournit une indication qui n'est pas égale à V . La différence u_1 entre la vitesse ainsi mesurée et la vitesse moyenne est une fonction du temps qui subit des fluctuations rapides (quelques centaines par seconde) et irrégulières. Le fil chaud, convenablement équipé, est bien adapté à la mesure de ces petites fluctuations autour d'une moyenne notable. Il peut d'ailleurs être modifié pour mesurer, avec moins de simplicité, des fluctuations de moyenne nulle, telles que celles des composantes u_2 , u_3 de la vitesse perpendiculaire à la vitesse moyenne.

LES CORRÉLATIONS ET L' ISOTROPIE

On sait que la structure de ces fluctuations conduit à traiter u_1, u_2, u_3 comme des grandeurs aléatoires et à leur appliquer les méthodes statistiques. Ayant choisi une définition adéquate des valeurs moyennes (moyennes temporelles, spatiales ou stochastiques), on peut espérer obtenir les éléments les plus caractéristiques de la turbulence en mesurant les corrélations entre les composantes de la vitesse. Or la structure d'un milieu turbulent est essentiellement liée à la manière dont les fluctuations en un point M réagissent sur les fluctuations en un autre point M'. Cette dépendance entre les fluctuations en M et en M' est décrite par le tenseur de corrélation des composantes u_i et u_j de la vitesse aux deux points, c'est-à-dire par les 9 moyennes

$$R_{ij}(x, x', t) = \overline{u_i(x, t) u_j(x', t)}$$

Ce tenseur est fonction des coordonnées de M, de celles de M', et du temps. Dans la pratique, le mouvement est permanent, ce qui veut dire que R_{ij} ne dépend pas de t. Mais les R_{ij} dépendent essentiellement de l'espace. En particulier, l'énergie cinétique turbulente moyenne par unité de masse et unité de temps, qui est égale à

$$\frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})$$

décroît en fonction de x_1 . La turbulence s'affaiblit et se dissipe progressivement en chaleur à mesure qu'on s'éloigne des grilles placées en amont. Pour simplifier l'étude mathématique du problème, on a été conduit à chercher une représentation du tenseur des corrélations qui en fournisse une représentation accessible au calcul, et où le temps se sépare nettement de l'espace. On y arrive par un changement du système de référence. Si l'on se place dans des axes entraînés par le mouvement moyen du fluide avec la vitesse V, les composantes R_{ij} dépendent alors du temps. On peut admettre en première approximation que, dans une tranche suffisamment mince, la turbulence est **homogène**. Cela veut dire que les R_{ij} ne dépendent pas séparément des positions de M et M', mais seulement du vecteur $\overline{MM'}$, quelle que soit la position de son origine M.

Ceci admis, une nouvelle simplification consiste à compléter l'hypothèse d'homogénéité par celle **d'isotropie**. La turbulence est isotrope si la valeur moyenne du produit de la composante de la vitesse en M suivant une direction arbitraire Δ par la composante en M' suivant une direction arbitraire Δ' ne dépend que de la distance r des points MM', et des angles des directions $\overline{MM'}$, Δ , Δ' entre elles, c'est-à-dire de la configuration géométrique des éléments M, M', Δ , Δ' , et non de leur orientation dans l'espace.

Cette hypothèse a été, et est encore très fréquemment invoquée, à cause de la grande simplification qu'elle apporte aux calculs. Elle permet en effet de mettre le tenseur de corrélation R_{ij} sous la forme

$$R_{ij} = A \xi_i \xi_j + B \delta_{ij} ,$$

où A et B sont des fonctions de r, t, qui sont reliées par une équation traduisant l'incompressibilité. On peut les exprimer alors à l'aide d'une unique fonction Q par les formules

$$A = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} , \quad B = - 2 Q - r \frac{\partial Q}{\partial r}$$

On peut d'ailleurs remplacer Q par l'invariant scalaire

$$\sum R_{ij} = A r^2 + 3 B ,$$

ou par le coefficient de corrélation f entre les composantes longitudinales de la vitesse en deux points M, M' tels que $\overline{MM'}$ soit parallèle à la vitesse V . Si $\overline{u^2}$ est la valeur moyenne commune de u_1^2, u_2^2 et u_3^2 , on a :

$$\overline{u^2} f = A r^2 + B = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 Q)$$

La validité de l'hypothèse d'isotropie a été souvent discutée. Kolmogoroff en a montré la vraisemblance, localement, et pour les grands nombres de Reynolds (moyennant une légère modification du point de départ : remplacement des vitesses en M et M' , rapportées à la vitesse **moyenne**, par les différences entre ces vitesses et la vitesse **d'agitation** en un point M_0 fixé, voisin de M et M'). On sait d'autre part que la vitesse d'agitation turbulente est décomposable en une superposition spatiale d'harmoniques sinusoïdaux. Cette décomposition correspond à une réalité physique : dans les masses d'air en mouvement, on peut distinguer des "tourbillons" de plus ou moins grandes dimensions. Les petits tourbillons, de grande fréquence d'agitation, sont assez correctement isotropes. Mais les grands, qui subissent l'influence de la forme géométrique de la soufflerie, ne le sont pas. Comme leur influence sur les mesures habituelles au fil chaud est faible, sauf très loin des grilles, où la précision devient médiocre, on peut presque toujours admettre en première approximation l'isotropie.

LES CORRÉLATIONS SPATIO-TEMPORELLES

La conclusion précédente, qui repose sur un choix d'axes particuliers et sur des approximations assez grossières, est beaucoup moins satisfaisante lorsque, élargissant le point de vue initial, on complète le décalage d'espace par un décalage de temps. On obtient ainsi des **corrélations spatio-temporelles**. Leurs mesures ont été faites au laboratoire de mécanique de l'atmosphère de Marseille par M. FAVRE et ses collaborateurs MM. GAVIGLIO et DUMAS. La soufflerie qu'ils utilisent a 0,80 m de diamètre. Les vitesses moyennes utilisées V sont comprises entre 10 et 20 m/s. L'intensité longitudinale $\frac{\sqrt{\overline{u_1^2}}}{V}$ est de l'ordre de 0,01. Le décalage dans le temps est obtenu par un enregistrement de la vitesse sur bande magnétique, suivi d'une lecture en deux points différents de la bande.

La définition de l'homogénéité et de l'isotropie doit être adaptée aux corrélations spatio-temporelles. Si τ est le décalage de temps, et si λ désigne le vecteur unitaire porté par la vitesse moyenne, on suppose que le tenseur

$$S_{\alpha\beta} = \overline{u_\alpha(x, t) u_\beta(x' + \lambda V \tau, t + \tau)}$$

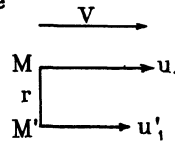
ne dépend que de $x' - x$, et est isotrope au sens classique par rapport à l'espace, quels que soient t et τ .

De ce tenseur, on peut extraire diverses grandeurs statistiques importantes, et faciles à mesurer en soufflerie. Les plus intéressantes sont les corrélations entre les composantes longitudinales u et u_1' de la vitesse à deux instants t et $t + \tau$, en deux points M et M' tels que le vecteur $\overline{MM'}$ soit ou bien parallèle, ou bien perpendiculaire à la vitesse moyenne V . Dans le premier cas, on obtient la corrélation longitudinale

$$\omega_1 = A_1 (r - V\tau)^2 + B_1,$$


dans le second cas, la corrélation transversale

$$\omega_2 = A_2 \tau^2 + B_2$$

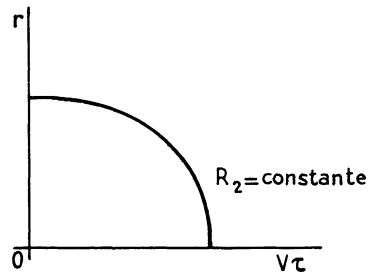
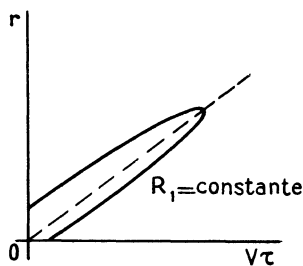


A_1, B_1, A_2, B_2 sont des fonctions de r, t, τ . ω_1 et ω_2 sont des moyennes non normées. Il est instructif d'en déduire des coefficients de corrélation : si r et τ sont suffisamment petits, un calcul simple montre que, à ω_1 et ω_2 , on peut attacher les coefficients de corrélation

$$R_1 = 1 - a V^2 \tau^2 - b (r - V \tau)^2,$$

$$R_2 = 1 - (a + b) V^2 \tau^2 - 2 b r^2$$

où a, b sont des quantités fonction de t seulement. L'expérience fournit les courbes $R_1 = \text{constante}$, $R_2 = \text{constante}$ dans le plan des r, τ . Lorsque r et $V \tau$ sont petits (de l'ordre du centimètre), R_1 et R_2 sont voisins de 1. Les courbes $R_1 = \text{constante}$ sont des ellipses très allongées, dont le grand axe est sensiblement dirigé suivant la première bissectrice. Le rapport de leurs axes est sensiblement égal à $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}$. C'est un nombre petit, de l'ordre de $2,5 \times 10^{-3}$. Les courbes $R_2 = \text{constante}$ sont des ellipses ayant pour axes les deux axes de coordonnées. Le rapport des longueurs de leurs axes est égal à $\sqrt{\frac{a+b}{2b}}$



L'expérience donne de ce nombre une valeur de l'ordre de 0,4 à 0,5. Or, si $\frac{a}{b}$ est petit, $\sqrt{\frac{a+b}{2b}}$ devrait être théoriquement de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$. La différence est probablement trop grande pour être imputable aux erreurs d'expérience. Il y a donc une incompatibilité entre la réalité et la théorie.

Il en résulte que l'hypothèse d'isotropie, qui est à la base des formules ci-dessus, et qui est vérifiée avec une assez bonne précision par les corrélations d'espace, se révèle incorrecte lorsqu'on la soumet à l'épreuve des corrélations spatio-temporelles. Dans ces conditions, il semble qu'il faille attacher moins d'importance qu'on ne l'avait fait à la turbulence isotrope. L'isotropie est surtout une hypothèse commode et honnête, grâce à laquelle il a été possible de soumettre la turbulence au calcul. Mais elle ne peut être conservée lorsque la précision des mesures augmente et que l'expérience est soumise à une analyse théorique plus poussée.

Une hypothèse de symétrie moins simple, mais qui semble a priori plus voisine de la réalité, est celle de la **symétrie cylindrique**. Voici en quoi elle consiste : Le tenseur R_{ij} des corrélations spatio-temporelles est supposé :

- a) stationnaire dans le temps. R_{ij} ne dépend pas de t , mais seulement de l'intervalle de temps τ .

b) homogène transversalement. R_{ij} reste invariant à une translation du vecteur MM' suivant une direction perpendiculaire à la vitesse V .

c) invariant aux rotations autour de la direction de V .

En particulier, R_{ij} ne dépend pas de l'instant t des mesures, mais dépend de l'abscisse x_1 de M .

Il ne faut pas confondre la turbulence à symétrie cylindrique avec la **turbulence axisymétrique** de Batchelor et Chandrasekhar. La notion d'axisymétrie s'applique au tenseur de corrélation d'espace, qui admet alors la symétrie de révolution autour de la vitesse V , est homogène dans tout l'espace, et dépend du temps. La turbulence axisymétrique conduit à une théorie plus maniable que la turbulence cylindrique, parce que le temps est mieux séparé de l'espace, mais elle constitue une approximation moins satisfaisante du point de vue physique.

On vérifie facilement que l'hypothèse de symétrie cylindrique échappe aux objections que soulevait l'isotropie. Elle introduit suffisamment de paramètres pour être compatible avec les courbes de corrélation locales que fournit l'expérience. Elle semble donc mieux adaptée à la turbulence en soufflerie que l'hypothèse classique d'isotropie (1).

LA DYNAMIQUE DES CORRÉLATIONS - LE ROLE DE LA LOI NORMALE

Les résultats qui précèdent ont un caractère local et purement cinématique. Pour calculer les corrélations de vitesse entre deux points quelconques, il faut faire appel aux méthodes de la dynamique des fluides. A l'exception de quelques rares tentatives, incorrectes ou trop vagues, on a toujours admis que le mouvement d'agitation du fluide turbulent satisfait aux équations de la mécanique des fluides, c'est-à-dire aux équations de Navier-Stokes. Dans le cas des fluides incompressibles, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i & i = 1, 2, 3 \\ \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

La méthode de Karman et Howarth consiste à multiplier les trois premières équations, écrites au point M , successivement par les trois composantes u'_j de la vitesse au point M' , et à prendre les moyennes. Les 9 équations qu'on obtient contiennent les "corrélations doubles" $\overline{u_i u'_j}$, les corrélations entre la vitesse au point M et la pression au point M' , et aussi les "corrélations triples" entre deux composantes de la vitesse en M et une composante en M' . Grâce à l'incompressibilité, on peut, après quelques transformations, obtenir une équation d'où la pression a disparu. Si l'on admet l'isotropie, cette équation scalaire résume l'ensemble des équations tensorielles vérifiées par $\overline{u_i u'_j}$. Mais elle contient aussi un terme de corrélations triples, et par suite ne permet pas de calculer les corrélations doubles. Elle ne peut pas servir de point de départ à une théorie déductive de la turbulence. Elle a cependant été largement exploitée, mais au prix d'hypothèses physiques supplémentaires, dont on a généralement admis sans preuves sérieuses la compatibilité avec les hypothèses de départ.

Cette difficulté est inhérente à la méthode employée. Au lieu de la surmonter par des moyens physiques, on peut essayer de la tourner par des procédés sta-

(1) Consulter à ce sujet : J. BASS - Space and time correlations in a turbulent fluid. Univ. of California publ. in Statistics, Vol. 2, n°3, p. 55-84, 1954.

tistiques. L'expérience montre que la loi de probabilité du vecteur vitesse en un point est très sensiblement normale. La loi de probabilité des six composantes de la vitesse en deux points ne l'est pas. Cependant son écart à une loi normale est faible. On peut admettre que cet écart ne se manifeste que dans les moments d'ordre élevé et que, en particulier, les moments d'ordre 4 sont liés aux moments d'ordre 2 par les mêmes relations que celles qui existent entre les moments d'une loi normale, sans que toutefois les moments d'ordre 3 soient nuls. Si R_{ij} et $R_{ij,kl}$ sont les moments d'ordre 2 et 4, et si on les suppose symétriques par rapport aux couples d'indices i, j et k, l , on en déduit que :

$$R_{ij,kl} = R_{ij} R_{kl} + R_{ik} R_{jl} + R_{il} R_{jk}$$

Plus précisément, si u_i et u'_j sont les composantes de la vitesse en M et en M' ,

$$\overline{u_i u_j u'_k u'_l} = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u'_k u'_l} + \overline{u_i u'_k} \cdot \overline{u_j u'_l} + \overline{u_i u'_l} \cdot \overline{u_j u'_k}$$

Il est facile de trouver des lois non normales dont les moments d'ordre 2 et 4 soient liés par une telle relation. En voici un exemple où, pour simplifier, on s'est limité à une seule variable aléatoire X au lieu de trois.

Dans ce cas, on veut avoir

$$\overline{X} = 0 \quad , \quad \overline{X^3} \neq 0 \quad , \quad \overline{X^4} = 3 (\overline{X^2})^2$$

C'est ce qui se passe pour la variable aléatoire X ayant pour densité de probabilité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (ax^2 + bx - 3a)^2$$

lorsque $b^2 = 1 - 6a^2$, a^2 étant la plus petite racine de l'équation

$$36(a^2)^2 - 14(a^2) + 1 = 0$$

Cette hypothèse, exploitée par Batchelor et Proudman et Reid dans le cas des corrélations d'espace, a été reprise par Chandrasekhar pour les corrélations spatio-temporelles (1). Chandrasekhar suppose la turbulence homogène, isotrope et stationnaire. L'ensemble de ces hypothèses ne correspond qu'approximativement à la turbulence en soufflerie, qui subit, dans l'espace ou dans le temps, une évolution et ne peut par suite être à la fois homogène et stationnaire. Mais c'est l'ensemble d'hypothèses de symétrie le plus simple qu'on puisse imaginer, celui grâce auquel les équations, les inconnues et les variables sont en nombre minimum. Il est donc raisonnable, au moins pour commencer, d'utiliser de telles hypothèses.

On introduit les corrélations spatio-temporelles doubles, triples et quadruples :

$$Q_{ij} = \overline{u_i(x,t) u_j(x',t')}$$

$$T_{ij,k} = \overline{u_i(x,t) u_j(x,t) u_k(x',t')}$$

$$Q_{ij,kl} = \overline{u_i(x,t) u_j(x,t) u_k(x',t') u_l(x',t')}$$

Les $Q_{ij,kl}$ sont reliés aux Q_{ij} par les relations ci-dessus. Les équations de Navier-Stokes, prises au point x_i, t de l'espace-temps, et multipliées par u'_k , fournissent des relations entre les Q_{ij} et les $T_{ij,k}$. Multipliées par $u'_k u'_l$, elles fournissent des relations entre les $T_{ij,k}$ et les $Q_{ij,kl}$. On peut éliminer les $T_{ij,k}$ entre ces relations et obtenir des relations entre les Q_{ij} et les $Q_{ij,kl}$. L'hypo-

(1) A theory of turbulence, Proc. Roy. Soc., série A, 229, pp. 1 à 19, 1955.

thèse statistique qui relie les Q_{ij} et les $Q_{ij,kl}$ permet enfin d'éliminer les corrélations quadruples. A cause de l'isotropie spatiale, on peut d'autre part écrire:

$$Q_{ij} = A \xi_i \xi_j + B \delta_{ij} ,$$

$$A = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} \quad ; \quad B = - 2 Q - r \frac{\partial Q}{\partial r} ,$$

où Q est une fonction de la distance spatiale r et de l'intervalle de temps τ . On trouve finalement que la fonction Q vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \tau^2} - \nu^2 D_5^2 \right) Q = - 2 Q \frac{\partial}{\partial r} D_5 Q ,$$

où

$$D_5 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

est l'opérateur laplacien isotrope à 5 dimensions.

Cette équation non linéaire n'est pas facile à résoudre. On en connaît certaines solutions intéressantes, obtenues par séparation des variables. Lorsque le nombre de Reynolds est très grand (viscosité négligeable) elle se ramène à l'équation

$$\frac{\partial^3 f}{\partial r \partial \tau^2} = f \frac{\partial}{\partial r} D_5 f ,$$

où f est le coefficient de corrélation spatio-temporel entre les composantes u_1 , u_1' de la vitesse en deux points M, M' tels que le vecteur $\overline{MM'}$ soit parallèle à la vitesse d'ensemble. On connaît les solutions de cette équation lorsque f est voisin de 1, c'est-à-dire pour les petites valeurs de r et τ .

Si au contraire la viscosité l'emporte sur l'inertie, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3} = \frac{1}{2} \nu D_5 f$$

c'est-à-dire l'équation de la chaleur dans un espace à 5 dimensions, que l'on sait résoudre.

Cette théorie peut être considérée comme un outil de travail commode. Mais il est bien évident qu'elle ne peut pas constituer une véritable théorie de la turbulence. Elle repose sur des hypothèses statistiques difficilement justifiables, et, même avec les hypothèses de symétrie les plus simples, elle conduit à des équations difficiles à résoudre. Les méthodes employées depuis vingt ans pour essayer de construire une théorie mathématique de la turbulence ont partiellement échoué. Nos connaissances sur la turbulence sont beaucoup plus précises et plus complètes qu'il y a vingt ans. Cependant, certains problèmes essentiels, comme celui de la stabilité des écoulements et de la naissance de la turbulence, restent encore mal éclaircis, et l'on peut dire qu'on ne soupçonne pas dans quelle voie il faudrait s'engager pour arriver enfin à une théorie satisfaisante de la turbulence.

"M. le Président ouvre la discussion et demande notamment à M. Craya s'il veut "prendre la parole".

"M. Craya se défend, vu l'heure tardive, de présenter autre chose que de très brèves remarques. La première concerne la théorie de Chandrasekhar (1955), ses liens profonds avec celle de Proudman et Reid (1954) et ses limitations; la manière de réaliser la "stationnarité notamment n'est pas très claire. La seconde remarque concerne la question "controversée (surtout en France semble-t-il), des équations de Navier; sur ce point, "M. Craya pense qu'il est nécessaire d'utiliser, sous une forme ou sous une autre, l'information qu'elles contiennent et que, d'autre part, il ne semble pas qu'il y ait présentement "de raisons sérieuses d'en douter".