REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. CRAYA

# L'interprétation statistique de la turbulence. État de la question

*Revue de statistique appliquée*, tome 4, nº 2 (1956), p. 17-30

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_2_17_0>

# L'INTERPRÉTATION STATISTIQUE DE LA TURBULENCE ÉTAT DE LA QUESTION

par

**A. CRAYA**

*Maitre de Conférences de Mécanique Physique*
*Directeur Technique Adjoint des Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble*
*Ingénieur Conseil aux Ets Neyrpic*

La turbulence est pour les fluides de faible viscosité qui nous entourent un aspect normal de leurs écoulements et dont les incidences pratiques sur nos ouvrages et nos machines sont considérables; son rôle s'est même affirmé bien au-delà de notre échelle et on a beaucoup parlé ces dernières années de turbulence de la matière interstellaire. Au Physicien expérimentateur qui veut en mesurer les propriétés fines dans nos tunnels aérodynamiques elle pose de délicats problèmes de mesure. Pour la Physique théorique c'est un chapitre nouveau de Mécanique Statistique qui malgré des trésors d'ingéniosité et des années de labeur dépensés, demeure encore comme hier l'Everest, un sommet inviolé. A l'Analyse enfin elle pose en foule des problèmes qui comme celui des équations aux dérivées partielles non linéaires sont encore peu explorés.

Présenter brièvement l'état de la question comme on m'a fait l'honneur de me le demander est donc une tâche dont je ne veux pas dissimuler le péril et je voudrais dire la manière dont je souhaiterais m'en acquitter. J'ai pensé d'abord au non spécialiste que ces questions intéressent mais qui pris par d'autres labeurs et d'autres spécialisations voudrait se familiariser avec les idées maîtresses de la question et leurs développements récents; à son intention j'ai volontairement évité, quand ce n'était pas indispensable, une terminologie trop spécialisée et préfère me référer aux notions de base plutôt qu'au mot qui les résume. Le problème de la turbulence a été abordé avec des points de vues, des techniques et des exigences variés; cependant chacune de ces cordées d'assaut volontiers un peu exclusive des autres, ne doit pas nous faire oublier le sommet qui est leur commune ambition; le choix des questions, l'importance que je leur ai donnée et leur ordre ne sauraient être tout-à-fait impersonnels ni manquer de décevoir quelques attentes; j'espère toutefois que sous la simplicité et la brièveté du langage les spécialistes sauront reconnaître le souci de précision de la pensée.

La littérature relative à la turbulence constitue un ensemble assez impressionnant et comme il est fréquent rien ne remplace complètement la lecture des mémoires originaux. Toutefois un certain nombre d'excellentes monographies et exposés d'ensemble ont paru ces dernières années (1) et je ne veux pas manquer

(1) Citons en particulier :
- Les Théories de la Turbulence, par Agostini et Bass (1950)
- Statistical Theory of Turbulence, par S. Goldstein (1950) (Conférences à l'Université de Maryland)
- Recents Theories of Turbulence. J. von Neuman (1951) (Rapport ronéotypé)
- Lectures notes on Turbulent Fluid Motion. J.M. Burgers (1951) (Cours à l'Université de Californie)
- The Theory on Homogeneous Turbulence. G.K. Batchelor (1953)
- Fonctions aléatoires et Théories de la Turbulence. J. Kampé de Fériet (1953) (chap.XIV du traité des Fonctions Aléatoires de Blanc-Lapierre et Fortet)

de dire tout ce que cet exposé leur doit. Qu'il me soit permis de rendre en particulier hommage à l'ouvrage de G.K. Batchelor; née à Cambridge, une des branches les plus actives de la turbulence moderne a continué à y être servie avec compétence et ferveur et les nombreux travaux de cette Ecole ont grandement contribué à élargir nos connaissances dans ce domaine.

## LA TURBULENCE ET L'INGÉNIEUR

La turbulence étant un aspect habituel des écoulements fluides, je n'ai pas besoin de souligner combien ce problème intéresse l'ingénieur dans un grand nombre de techniques. On sait la place centrale qu'occupent les écoulements en conduite et en couche limite respectivement en Hydraulique et en Aérodynamique; l'objectif est ici la connaissance des forces (résistance et pression) subies par une paroi en mouvement relatif. La diffusion turbulente joue un rôle essentiel dans le problème hydraulique de la suspension des matériaux, dans les transferts de chaleur auxquels l'énergie atomique a donné un regain d'actualité, dans les propriétés des flammes, etc... Parfois favorable comme agent de mélange ou moyen de dissiper de l'énergie, la turbulence est parfois au contraire indésirable et l'on veut savoir en réduire le niveau au minimum comme dans certaines souffleries.

Le problème type le plus proche des applications est l'écoulement en conduite et il n'est pas étonnant que les premiers efforts lui aient été consacrés. Nous devons à Boussinesq (1877) avec une première vision pénétrante de la question sa traduction en termes d'un coefficient de viscosité fictive. A Reynolds (1894) revient l'apport fondamental des tensions turbulentes et des relations énergétiques entre le mouvement moyen et celui de fluctuation. Sautant sur beaucoup d'années et d'efforts infructueux nous arrivons aux modernes interprétations essayant de coordonner en termes de longueur de mélange et d'analyse dimensionnelle une précieuse moisson de faits expérimentaux. Les services qu'a pu et que peut rendre encore quelquefois la notion de longueur de mélange en guidant l'imagination ne doivent pas être sous-estimés comme aussi ne doivent pas être ignorés son usure et ses contradictions internes. Les seuls succès véritables dont la théorie puisse se prévaloir concernent l'instabilité de la couche limite laminaire; les essais de Schubauer et Skramstad ont, dans ce domaine, pleinement confirmé les prédictions de Tollmien; mais il s'agit ici du problème distinct de l'origine de la turbulence dont d'ailleurs divers aspects restent encore à préciser.

Le problème général de la turbulence est en définitive extrêmement compliqué et le progrès capital de ces vingt dernières années a été d'en découvrir un exemplaire plus simple sur lequel l'expérimentation et la théorie ont pu progresser de pair. Si celui-ci est moins immédiatement utile il nous a en revanche, beaucoup appris et mieux armé pour aborder le problème plus proche de la pratique des écoulements à gradient de vitesse. Malgré notre intérêt pour ces derniers nous ne les aborderons pas dans cet exposé renvoyant pour un exemple de recherche récente dans ce domaine à la communication de M. Milliat.

## LA TURBULENCE ENGENDRÉE PAR UNE GRILLE

Le problème plus simple dont j'ai parlé est bien connu : il s'agit des écoulements uniformes obtenus en tunnel aérodynamique au travers desquels on interpose une grille. Les sillages des barreaux se transforment rapidement en turbulence et l'intensité de celle-ci est progressivement dissipée par frottement visqueux. Les lois de cette décroissance constituent précisément un des problèmes majeurs de ce type de turbulence.

La nature nous a même dotés en l'occurrence d'une simplification inespérée; il se trouve que, au moins approximativement, la turbulence autour d'un point n'est soumise à l'influence d'aucune direction privilégiée; les directions des barreaux générateurs sont vite oubliées, et la direction de l'extinction n'est pas marquante; il y aurait donc en gros isotropie et c'est là, comme on le verra, une simplification considérable pour l'analyse théorique. Il faut bien prendre garde à nos réserves; l'isotropie ne va pas de soi surtout pour les fluctuations de faible fréquence et certaines installations ont révélé une forte anisotropie; mais aux fréquences plus élevées la tendance à l'isotropie semble bien être une réalité physique.

Ce n'est pas ici le lieu d'insister sur les techniques expérimentales et cependant ce serait fausser complètement le tableau de la recherche de la turbulence en passant complètement cet aspect sous silence. Nous verrons en effet combien la théorie seule est encore impuissante; nous avons besoin de familiariser notre intuition avec la nature même du problème avant de pouvoir lui appliquer une technique appropriée de physique théorique. Nous dirons donc simplement que grâce aux perfectionnements de l'anémomètre à fil chaud et des nombreux circuits électriques qui recueillent son signal, les fluctuations des diverses composantes de la vitesse, leur corrélation, leur spectre, etc.. peuvent être aujourd'hui mesurés avec une précision raisonnable. La possibilité de mettre le signal en conserve grâce au ruban magnétique a même permis à Mr. Favre de mesurer indifféremment des corrélations temporelles ou spatiales. Des données précieuses ont pu aussi être acquises et la validité de certaines hypothèses de travail soumises au contrôle des faits.

## LE MODÈLE THÉORIQUE

L'expérience que nous venons de décrire où le physicien effectue ses mesures n'est pas cependant celle idéale à laquelle la théorie se réfère généralement. On peut décrire celle-ci en ces termes : un fluide s'étendant indéfiniment a été brassé de telle sorte qu'il se présente à l'instant initial dans un état d'agitation désordonnée. Nous supposerons d'ailleurs que ce désordre turbulent n'est pas pulvérisé à un degré tel qu'il rejoigne sans transition le chaos moléculaire, c'est-à-dire que les échelles les plus fines de la turbulence sont encore largement justiciables des lois habituelles des fluides visqueux; les ordres de grandeurs expérimentaux confirment entièrement ce point de vue.

Cependant ce n'est pas à un brassage particulier à une réalisation du champ turbulent et à son évolution ultérieure que nous nous intéressons. Ce que nous désirons c'est considérer un bloc, un ensemble des réalisations initiales possibles du champ de vitesse caractérisé seulement statistiquement; de la composante $u_i(M)$ de la vitesse en un point, nous saurons donc seulement qu'elle prend ses différentes valeurs avec une certaine loi de probabilité; pareillement les composantes de la vitesse par exemple en 3 points déterminés $u_i(M_1)$, $u_j(M_2)$, $u_k(M_3)$ constituent neuf nombres dont nous ne sommes censés connaître que la distribution de probabilité. De ces lois de probabilité résultent alors des valeurs moyennes telles que, par exemple, celle des 27 produits $\overline{u_i(M_1)\, u_j(M_2)\, u_k(M_3)}$ auxquels l'usage en turbulence a réservé le nom de corrélations. Finalement d'ailleurs c'est sur ces corrélations et même sur les plus simples d'entre elles (celles concernant deux points et tout récemment celles concernant trois points) que la théorie a concentré l'essentiel de son effort. La turbulence est dite homogène si toute moyenne telle que $\overline{u_i (M_1) u_j (M_2) u_k(M_3)}$ est invariante pour toutes translations du triangle $M_1 M_2 M_3$. Par la suite nous supposerons aussi l'isotropie auquel cas l'invariance est de plus acquise pour toutes rotations et symétries du triangle rigide $M_1 M_2 M_3$.

Le problème fondamental qui se pose pour un état initial donné du fluide est son évolution en fonction du temps en conformité avec les lois des fluides visqueux. Parallèlement si l'état initial est donné seulement statistiquement c'est l'évolution temporelle de ces données statistiques (en l'occurrence les corrélations) qui devient le problème primordial. Telle est du moins la voie féconde ouverte par Sir G.I. Taylor à l'analyse de la turbulence et sur l'exacte portée de laquelle nous aurons à nous interroger ultérieurement.

Considérons, par exemple, le tenseur des corrélations doubles en deux points :

$$R_{ij} (\vec{r}) = \overline{u_i (\vec{x}) u_j (\vec{x} + \vec{r})}$$

Introduisons de manière analogue le tenseur :

$$K_{ij} (\vec{r}) = \overline{\frac{\partial u_i (\vec{x})}{\partial t} u_j (\vec{x} + \vec{r})}$$

On voit immédiatement en vertu de l'homogénéité que :

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} (\vec{r}) = K_{ij} (\vec{r}) + K_{ji} (-\vec{r})$$

De la même façon si l'on pose :

$$R_{ijk} (\vec{r}, \vec{r}') = \overline{u_i (\vec{x}) u_j (\vec{x} + \vec{r}) u_k (\vec{x} + \vec{r}')}$$

$$K_{ijk} (\vec{r}, \vec{r}') = \overline{\frac{\partial}{\partial t} u_i (\vec{x}) \cdot u_j (\vec{x} + \vec{r}) \cdot u_k (\vec{x} + \vec{r}')}$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk} = K_{ijk} (\vec{r}, \vec{r}') + K_{jki} (\vec{r}' - \vec{r}, - \vec{r}) + K_{kij} (- \vec{r}', \vec{r}-\vec{r}')$$

L'évolution des tenseurs R est donc donnée par les tenseurs K et pour évaluer ceux-ci nous pouvons utiliser les équations de Navier qui donnent les dérivées temporelles du champ de vitesse en fonction du champ actuel :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial (u_i u_l)}{\partial x_l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$$

On obtient ainsi par exemple immédiatement pour $K_{ij}$ :

$$K_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_l} R_{ijl} (\vec{r}, o) + \frac{\partial}{\partial r_i} P_j + \nu \frac{\partial}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial r_l} R_{ij}$$

où l'on a posé

$$P_i (\vec{r}) = \overline{\frac{p (\vec{x})}{\rho} u_i (\vec{x} + \vec{r})}$$

L'examen de la relation reliant le tenseur d'évolution $K_{ij}$ aux données actuelles met en lumière la difficulté centrale du problème de la turbulence. Nous y voyons apparaître en effet trois termes : un terme de viscosité extrêmement commode parce qu'il n'introduit que le tenseur $R_{ij}$ auquel nous nous intéressons; vient ensuite un terme de pression qu'on montre aisément n'être une nouvelle inconnue qu'en apparence; mais surtout nous voyons $R_{ijk}$ régir l'évolution de $R_{ij}$ avec cette seule simplification que deux des 3 points $M_1 M_2 M_3$ sont confondus de sorte qu'il s'agit seulement de corrélations triples en deux points. Pareillement l'évolution de $R_{ijk}$ est sous la dépendance de corrélations quadruples en trois points.

## CINÉMATIQUE DES CORRÉLATIONS

Bien que quelques conclusions générales puissent être atteintes en se bornant au postulat de l'homogénéité c'est dans l'hypothèse de l'isotropie que la théorie acquiert son maximum de simplicité, en restant d'ailleurs conforme à une large évidence expérimentale. Les divers tenseurs de corrélations s'expriment dans ce cas à l'aide d'un petit nombre de scalaires et cette réduction tient à deux causes : d'abord l'isotropie, ensuite la condition d'incompressibilité. Depuis le travail fondamental de Karman-Howarth (1938) l'expression systématique de ces conditions a été beaucoup améliorée par Robertson (1940) Chandrasekhar (1950) Proudman et Reid (1954); on y a gagné non seulement en élégance mais aussi la possibilité d'aborder des tenseurs d'ordre plus élevé ou des conditions de symétrie (comme celle de révolution) moins restrictives que l'isotropie et dont la complication des calculs antérieurs défendait l'approche.

Considérons par exemple 3 vecteurs unitaires $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, respectivement attachés aux trois points $M_1$ $M_2$ $M_3$ et la composante de la vitesse en chaque point suivant la direction correspondante; on a :

$$\overline{u_a(M_1).\ u_b(M_2).\ u_c(M_3)} = \overline{(u_i\ a_i)_{M_1}\ (u_j\ b_j)_{M_2}\ (u_k\ c_k)_{M_3}} = R_{ijk}\ a_i\ b_j\ c_k$$

et par définition de l'isotropie cette corrélation doit rester invariante pour toutes rotations et symétries de la figure formée par les 3 points et leurs vecteurs unitaires attachés. La remarque importante de Robertson est que la fonction ci-dessus des vecteurs $\vec{r}$, $\vec{r}'$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ doit alors pouvoir s'exprimer en fonction des seuls produits scalaires de ces vecteurs pris deux à deux ou avec eux-mêmes (c'est-à-dire en langage géométrique que seules les longueurs et les angles interviennent). Ecrivant a priori une expression ainsi formée et constituant une forme trilinéaire en $a_i$ $b_j$ $c_k$ puis l'identifiant à $R_{ijk}$ $a_i$ $b_j$ $c_k$ on obtient une expression générale de $R_{ijk}$ dépendant d'un nombre réduit de scalaires fonction de $r^2$, $r'^2$ et $\vec{r}.\vec{r}'$. Pour le tenseur de corrélations triples général il subsiste tout de même ainsi 14 scalaires qui se réduisent à 4 si l'on amène deux des points en coïncidence ($\vec{r}' = o$); le tenseur de corrélations doubles en deux points $R_{ij}$ ne dépend que de 2 scalaires.

Bien que la turbulence en milieu compressible ait été aussi abordée par la théorie, le cas plus simple du fluide incompressible demeure fondamental; la condition $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = o$ impose alors aux tenseurs $R_{ij}$ et $R_{ijk}$ les conditions supplémentaires

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r_i} R_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij} = o \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r'_i}\right) R_{ijk} = \frac{\partial}{\partial r_j} R_{ijk} = \frac{\partial}{\partial r'_k} R_{ijk} = o \end{aligned}\right.$$

En substituant dans ces relations les expressions obtenues précédemment pour $R_{ij}$ ou $R_{ijk}$ on arrive à des équations différentielles reliant les scalaires fondamentaux dont ils dépendent et leur nombre se trouve ainsi encore une fois considérablement réduit. Cette méthode ancienne conduit à des calculs d'une certaine lourdeur et qui ne mettent pas en vedette les scalaires indépendants les plus avantageux. Chandrasekhar a donc imaginé une élégante méthode permettant d'obtenir d'emblée des tenseurs satisfaisant à la condition d'incompressibilité : l'artifice est parallèle à celui qui consiste à satisfaire automatiquement la condition $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = o$ en prenant pour $u_i$ le rotationnel d'un potentiel vecteur. Anticipant sur ce qui suit nous signalerons aussi une variante due à Proudman et Reid et qui répond au même but pour les transformées de Fourier de $R_{ij}$ et $R_{ijk}$ : ils ont pu montrer de cette façon que les 14 scalaires du tenseur général $R_{ijk}$ introduit par eux se réduisent finalement par l'incompressibilité à deux seulement.

Les tenseurs de corrélations les plus usuels concernent deux points et sont :

$$R_{ij}\ (\vec{r}) \qquad \text{et} \qquad Q_{ijk}\ (\vec{r}) = R_{ijk}\ (o,\ \vec{r})$$

Nous en donnons ci-dessous les expressions classiques :

$$\begin{cases} R_{ij} = \left(F + \dfrac{r\,F'}{2}\right)\delta_{ij} - \dfrac{r\,F'}{2}\,\dfrac{r_i\,r_j}{r^2} \\[2ex] Q_{ijk} = \dfrac{K - r\,K'}{2}\,\dfrac{r_i\,r_j\,r_k}{r^3} + \dfrac{2K + r\,K'}{4}\,\dfrac{r_i\,\delta_{jk} + r_j\,\delta_{ik}}{r} - \dfrac{K}{2}\,\dfrac{r_k}{r}\,\delta_{ij} \end{cases}$$

Les scalaires de base de ces tenseurs ont été choisis en raison de leur signification concrète qui est la suivante :

$$F\ (r) = \overline{u_r\ (\vec{x})\ u_r\ (\vec{x} + \vec{r})} \qquad\qquad K\ (r) = \overline{u_r^2\ (\vec{x})\ u_r\ (\vec{x} + \vec{r})}.$$

Nous avons vu que les équations de Navier donnent la variation avec le temps des corrélations doubles moyennant la connaissance des corrélations triples; en raison de la structure simple de ces tenseurs pour une turbulence isotrope une relation analogue existe donc entre leurs scalaires de base F et K. Pour l'obtenir simplement il est préférable d'orienter le calcul vers la recherche du tenseur contracté $R_{ii}$ ; on a immédiatement pour ce dernier :

$$\frac{\partial R_{ii}}{\partial t} = 2\,\frac{\partial}{\partial r_l}\,Q_{ili} + 2\nu\,\frac{\partial}{\partial r_l}\,\frac{\partial}{\partial r_l}\,R_{ii}$$

Les scalaires qui y interviennent ont une signification vectorielle simple et il convient de leur donner un nom, soit :

$$2\,R = R_{ii} = \overline{\vec{V}_{M_1}\ \vec{V}_{M_2}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\,(F r^3)$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial r_l}\,Q_{ili} = \overline{(\vec{V} \wedge \vec{\omega}\ )_{M_1} . \vec{V}_{M_2}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left[\,\frac{1}{2r}\,\frac{d}{dr}\,(K\,r^4)\right].$$

de sorte que l'équation de base s'écrit avec ces notations :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = Q + 2\nu\,\Delta R$$

La traduction de cette relation dans les grandeurs F et K plus proches de l'expérience, s'en déduit aisément et constitue la célèbre équation de Karman et Howarth :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(K' + \frac{4\,K}{r}\right) + 2\,\nu\left(F'' + \frac{4\,F'}{r}\right)$$

## TENSEURS SPECTRAUX

Revenons au point de départ qui est l'étude de l'évolution d'un champ de vitesse initial spécifié seulement statistiquement. Une réalisation particulière de ce champ étant donnée nous pouvons nous demander si nous ne gagnerions pas à la fois en vision intuitive et en puissance d'analyse à la caractériser autrement que par la donnée de la vitesse en chaque point. L'idée de le décomposer en une somme d'écoulements élémentaires simples se présente alors naturellement à l'esprit, et l'analyse harmonique du champ de vitesse apparaît à cet égard comme l'instrument de choix.

Toutefois cet instrument demande ici une adaptation très délicate : la série de Fourier ne convient pas en effet puisque le champ initial n'est pas périodique et l'intégrale de Fourier est inapplicable car l'intégrale de $|u_i|$ dans tout l'espace est infinie. Le nœud du problème et sa solution tiennent à un mot, **l'homogénéité,** qui est la propriété fondamentale que nous avons attribuée au champ de vitesse turbulent. En vertu de cette propriété, l'intuition du Physicien lui assure qu'en découpant **une** réalisation du champ en boîtes suffisamment grandes une quelconque d'entre elles vaut toutes les autres et leur ensemble; il serait donc prêt à substituer au champ total comme pratiquement équivalent, ou bien une boîte répétée périodiquement dans toutes les directions, ou bien une boîte complètement entourée de fluide au repos; le problème de l'analyse harmonique est ainsi un peu faussé mais accessible élémentairement. Une voie plus exigeante consiste à remarquer que puisque la corrélation $\overline{u_i(M_1)\, u_j(M_2)}$ (moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations) est par hypothèse invariante par translations de $M_1\, M_2$, cette quantité doit pouvoir aussi être calculée par moyenne **spatiale** sur une réalisation (théorème ergodique); l'analyse harmonique généralisée de N. Wiener devient alors l'outil adéquat puisqu'elle est précisément fondée sur l'existence de cette autocorrélation. Sans entrer davantage dans ces problèmes d'analyse qui ont été complètement élucidés nous nous bornerons à admettre ici qu'on a su décomposer tout champ de vitesse en une somme de termes $d\vec{Z}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}$ où le vecteur $d\vec{Z}$ représente la contribution d'un volume élémentaire de l'espace des k.

Le champ de vitesse étant désormais caractérisé par $d\vec{Z}$ cette distribution a elle-même à être spécifiée en termes statistiques et il est à prévoir que des corrélations doubles $\overline{dZ_i^*\, dZ_j}$, par exemple, auront un lien avec les corrélations doubles de vitesse $\overline{u_i(M_1)\, u_j(M_2)}$. Ce lien avait été indiqué par Taylor lui-même qui a le premier introduit la notion de spectre dans le cas plus simple d'une seule dimension; la ligne d'idée qui précède en est le prolongement tridimensionnel et d'autre part elle a fait l'objet de recherches approfondies dans la théorie des fonctions aléatoires stationnaires. Il nous suffira pour notre objet de retenir qu'on est ainsi conduit à introduire systématiquement (J. Kampé de Fériet et Batchelor) les transformées de Fourier des tenseurs de corrélation de vitesse introduits précédemment. On définit ainsi notamment :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint R_{ij}\, e^{-i.\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r} \\ \Psi_{ijk} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint Q_{ijk}\, e^{-i.\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r} \end{aligned}\right.$$

et la théorie peut se développer parallèlement dans l'un et l'autre langage. Parmi les avantages de l'espace des k nous noterons le fait que la condition d'incompressibilité s'y traduit très simplement et surtout qu'il se prête particulièrement bien à l'expression de certaines hypothèses statistiques.

Dans le cas de la turbulence isotrope $\Phi_{ij}$ et $\Psi_{ijk}$ sont eux-mêmes des tenseurs isotropes et ils peuvent chacun être écrits à priori à l'aide d'un seul scalaire grâce à la condition d'incompressibilité :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \Phi\left(\delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{k^2}\right) \\ \Psi_{ijk} &= i\,\Psi\left[\frac{k_i\, k_j\, k_k}{k^3} - \frac{1}{2}\,\frac{k_i\,\delta_{jk} + k_j\,\delta_{ik}}{k}\right] \end{aligned}\right.$$

Les transformées de Fourier de R et Q notamment, sont :

$$\frac{\Phi_{ii}}{2} = \Phi \qquad \text{et} \qquad i\, k_l\, \Psi_{ili} = k\,\Psi$$

de sorte que le lien entre ces scalaires s'écrit :

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_o^\infty R\, r^2 \frac{\sin k r}{k r}\, d r .$$

$$k\Psi = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint Q\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_o^\infty Q\, r^2 \frac{\sin k r}{k r}\, d r .$$

L'inversion de l'intégrale de Fourier permet d'écrire :

$$R = \iiint \Phi \; e^{i\vec{k}\vec{r}}\, d\vec{k}$$

et notamment pour $\vec{r} = o$

$$\frac{\overline{u^2}}{2} = \iiint \Phi \; d\vec{k} = \int_o^\infty 4\pi\, k^2 \Phi\, d k$$

de sorte qu'en prenant $E = 4\,\pi\, k^2 \Phi$ la contribution à l'énergie cinétique de la portion de l'espace de k comprise entre deux sphères de rayon k et k + dk apparaît égale à Edk. Il est plus parlant pour la même raison d'introduire la quantité $T = 4\,\pi\, k^2\, (k\,\Psi)$

La traduction entre E et T de l'équation fondamentale reliant R et Q est alors:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu\; k^2\, E .$$

## EXAMEN DE CONSCIENCE

Parvenu à ce point, un retour en arrière s'impose sur la manière dont nous avons posé le problème de la turbulence et sur les résultats que nous avons obtenus.

Nous nous sommes proposés de spécifier un champ de vitesses turbulent initial seulement statistiquement et d'en suivre l'évolution statistique. Cette donnée nous l'avons d'ailleurs consentie tout-à-fait incomplète en nous bornant, parmi les innombrables corrélations qui se présentent, aux plus simples d'entre elles. Le secret espoir était que des données statistiques assez arbitraires au départ, puissent tendre à s'ordonner rapidement vers quelque distribution assymptotique constituant les lois de la turbulence, et qu'il nous serait possible d'atteindre de cette façon. Or, l'évolution de chaque corrélation est principalement influencée par une corrélation d'ordre supérieur et la chaîne est sans fin. Pour arrêter la chaîne quelque part et du coup définir l'évolution des corrélations il faut une hypothèse et nous verrons quand nous parlerons du travail tout récent de Proudman et Reid (1954) que pour des objectifs bien délimités tout au moins, de telles hypothèses plausibles sont possibles. De toute façon ayant posé le problème en termes directement accessibles à l'expérience nous avons l'avantage inappréciable de pouvoir être instruits par elle sur sa nature profonde.

Le problème de mécanique statistique qui se pose à nous semble être en réalité d'un type nouveau dans la science et pour mieux le comprendre il est naturel de se référer au modèle que nous aimerions pouvoir imiter de la Mécanique statistique classique. En bref, celle-ci considère un système à un très grand nombre n de degrés de liberté, isolé de l'extérieur de sorte que son énergie totale se conserve; les lois du mouvement sous la forme des équations de Hamilton nous permettent de définir un espace des états initiaux ou phases du système, sur lequel des distributions de probabilités plausibles s'imposent naturellement; un ensemble d'états en équilibre statistique nous est donc connu d'emblée permettant de calculer toutes les moyennes désirables; il y a notamment en moyenne équipartition de l'énergie entre tous les degrés de liberté.

Le problème de la turbulence se pose tout différemment : dans le cas d'un écoulement permanent en moyenne de l'énergie est constamment fournie au fluide et constamment dissipée par lui; dans notre modèle théorique pendant un intervalle de temps $\Delta t$ une certaine portion de l'énergie cinétique présente se trouve dissipée. Il est intéressant de définir pour un fluide des degrés de liberté analogues à ceux d'un système mécanique; l'analyse harmonique nous suggère de prendre comme tel chacune des cases de l'espace des k et la contribution $d\vec{Z}$ de cette case comme l'état du degré de liberté correspondant. Or il a été réalisé depuis longtemps (et exprimé en vers et en prose) que l'interaction entre ces degrés de liberté constitue le mécanisme fondamental de la turbulence. Il est facile d'obtenir à partir des équations de Navier la variation temporelle du $d\vec{Z}$ relatif à une case déterminée; on constate que tous les $d\vec{Z}$ présents y contribuent et qu'ils se groupent pour cela en paires correspondant à des $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$ tels que $\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}$. D'autre part l'énergie cinétique se trouve pratiquement distribuée aux faibles valeurs de k tandis que l'expression même de la dissipation montre qu'elle avantage les valeurs de k plus élevées. L'image qui se dégage de ces considérations (mais qui n'est pas une déduction mathématique) est celle d'un flux d'énergie entre une source aux faibles k et un puits aux grands k. Le problème statistique fondamental ne serait donc pas celui d'une égale répartition d'une énergie donnée entre des degrés de liberté, mais celui d'un **flux** d'énergie dans l'espace des k. Le nouveau bond en avant effectué par la théorie de la turbulence depuis 1941 s'est largement inspiré de ce "processus de cascade".

Un fait émerge finalement, de quelque côté qu'on prenne le problème, c'est le rôle essentiel des termes d'accélération non linéaires des équations de Navier; or sur les propriétés des solutions de ces équations bien peu de choses sont connues à l'heure actuelle. En revanche d'autres équations non linéaires comme celle de l'écoulement compressible d'un gaz dans un tuyau ont été étudiées sous la poussée des applications. J.M. Burgers a été ainsi conduit à imaginer et à explorer depuis plusieurs années des modèles mathématiques de la turbulence plus accessibles à l'analyse avec l'espoir de pouvoir surmonter dans ce cas plus simple le bloc des difficultés qui nous arrêtent dans le cas réel. Nous signalerons seulement ici qu'après différents exemples J.M. Burgers s'est arrêté plus spécialement à l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Une analyse statistique parallèle à celle de la turbulence peut en être faite et qui s'arrête naturellement aux mêmes points. Mais ici un changement de variable simple permet de connaître l'évolution complète de toute situation initiale donnée; il est donc possible, bien que les difficultés restent considérables, que les intéressants résultats déjà obtenus puissent être prolongés de façon décisive.

On voit en définitive qu'une "Hydromécanique statistique" pour emprunter le titre d'un important travail de E. Hopf reste encore à édifier. Les méthodes plus puissantes mises en œuvre par ce dernier Auteur constituent sans doute la voie de l'avenir, mais pour l'instant elles se heurtent aux mêmes difficultés que les théories moins ambitieuses.

## THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE DES PETITS TOURBILLONS

La théorie de l'isotropie locale publiée par Kolmogoroff en 1941 occupe désormais une place centrale dans la théorie de la turbulence; sa première expression en terme de différence de vitesse, a trouvé depuis une traduction plus parlante en langage de spectre; elle est essentiellement fondée sur le processus de cascade dont nous avons parlé et consiste à chercher sous quelles conditions et dans quelle région de l'espace des k un état d'équilibre statistique est à escompter.

Le premier point à bien réaliser est ce qui se passe lorsqu'on considère un fluide dont la viscosité tend vers zéro; le postulat est que les termes d'accélération non linéaires tendent à faire passer l'énergie des gros tourbillons aux petits (tourbillon est pris ici comme synonyme d'une composante $d\vec{Z}$ de l'analyse harmonique du champ); ce processus n'étant contrecarré que par la dissipation par viscosité, le puits d'énergie doit se déplacer vers les grands k quand $\nu \to 0$. On se place d'emblée dans ce cas, considérant que la statistique du flux de l'énergie cinétique des petits aux grands k sera la plus simple lorsque la source d'énergie (zone du spectre contenant la majeure partie de l'énergie) et le puits d'énergie (zone du spectre contenant la majeure partie de la dissipation) sont séparés par une large zone tampon.

Le deuxième postulat est que cette zone tampon quand elle existe constitue une zone de brouillage au débouché de laquelle toute mémoire est perdue des caractéristiques particulières des tourbillons générateurs qui eux-mêmes reflètent fortement la géométrie de l'écoulement; si notamment des tourbillons porteurs d'énergie cinétique ont des directions privilégiées, les fluctuations de pression auront après interaction de toute une gamme de tourbillons à échelle décroissante effacé l'anisotropie du début de la chaîne, égalisé les chances des diverses composantes de vitesse et par conséquent rendu isotrope la structure des petits tourbillons émergeant du processus; à partir de là l'hypothèse est que le mécanisme fondamental d'interaction des tourbillons transmettant constamment l'énergie aux petits tourbillons qui les dissipent a acquis une structure régulière et universelle. En définitive si le nombre de Reynolds de la turbulence est assez grand il y a une sphère de l'espace des k au-delà de laquelle il y a à tout instant un équilibre statistique caractérisé simplement par les paramètres globaux, qui sont le flux d'énergie reçu égal par hypothèse à la dissipation $\varepsilon$ et la viscosité $\nu$ du fluide. Le spectre E devant être fonction seulement de k, $\varepsilon$ et $\nu$ il doit nécessairement pouvoir s'écrire par l'Analyse Dimensionnelle

$$E = \upsilon^2\eta \quad G(k\eta)$$

$$\upsilon = (\nu\varepsilon)^{1/4} \qquad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

Au delà de cette sphère limite il peut se faire enfin que le nombre de Reynolds soit si grand, qu'une zone existe où, la dissipation étant repoussée encore plus loin, $\nu$ n'intervient pas. Puisque E n'y est fonction que de k et $\varepsilon$ l'Analyse Dimensionnelle est encore plus précise et impose

$$E = A \quad \varepsilon^{2/3}\, k^{-5/3}$$

L'importance de cette théorie tient évidemment à ce que pour la première fois quelque chose d'universel est dégagé dans la turbulence, applicable même à d'autres conditions que la turbulence en soufflerie. Il ne faut pas perdre de vue l'exigence d'un grand nombre de Reynolds spécialement pour la loi $k^{-5/3}$, et le fait qu'il s'agit d'une théorie concernant la zone des grands nombres d'onde du spectre; les prédictions statistiques qu'on peut lui demander concernent donc les moyennes sous la dépendance des seuls petits tourbillons et peuvent s'obtenir par la seule application de l'Analyse Dimensionnelle.

## UNE HYPOTHÈSE DE TRAVAIL POUR LES TOURBILLONS MOYENS

Considérons les vitesses en deux points par exemple; les corrélations doubles, triples, etc.. ne sont qu'un aspect de la distribution de probabilité des 6 composantes de la vitesse en ces points et s'en déduiraient toutes si celle-ci était connue; cette traduction de notre ignorance en une autre langue peut paraître à priori sans espoir; elle a cependant suggéré une ligne de recherche intéressante.

On peut se demander par exemple si cette distribution ne pourrait pas être une loi normale (extension de la loi de Gauss à la variable aléatoire à six dimensions constituée par les composantes de la vitesse aux deux points). S'il en était ainsi chaque composante considérée isolément aurait notamment elle aussi une distribution normale; ceci a été en effet constaté expérimentalement de longue date mais ne permet de rien inférer pour un **couple** de vitesses. Un bon test pour ce cas est l'étude de la **différence** $u_1' - u_1$ de la composante de la vitesse en deux points, qui si notre hypothèse était exacte devrait être aussi distribuée suivant la loi de Gauss. Or l'expérience apprend ceci : la distribution n'est certainement pas gaussienne quand les deux points sont assez rapprochés et cet écart se manifeste le plus vivement pour le moment d'ordre 3 : $\overline{(u_1' - u_1)^3}$ qui n'est pas nul; en revanche le moment d'ordre 4: $\overline{(u_1' - u_1)^4}$ se compare à celui d'ordre 2 approximativement comme dans une loi normale sauf toutefois si les points $M_1$ et $M_2$ sont trop rapprochés.

Il est clair d'après cela que l'hypothèse d'une loi normale prise intégralement est certainement fausse tout spécialement en ce qui concerne les corrélations triples qui sont le nœud de la turbulence; elle est même fausse à tous égards si l'on considère la zone des petits tourbillons; d'autres résultats expérimentaux et l'image même que nous nous sommes faits de l'équilibre, suggèrent que dans cette zone l'hypothèse ne traduit pas du tout la réalité. En revanche si l'on ne retient que le résultat **partiel** sur les corrélations quadruples suggérées par l'expérience et valable pour les tourbillons pas trop petits on a pour cette zone de spectre un outil de recherche inespéré.

L'hypothèse que les corrélations quadruples sont reliées aux corrélations doubles comme dans une loi normale a été mise en avant par Millionshtchikov (1941) puis utilisée notamment par Batchelor pour le calcul des corrélations de pression (1951). Récemment enfin (1954) Proudman et Reid l'ont exploitée pleinement dans un travail qui prolonge remarquablement la ligne de recherche originelle de Taylor-Karman et Howarth.

Comme nous l'avons vu si l'on cherche l'évolution du tenseur de corrélation double en deux points $R_{ij}$ on trouve qu'elle dépend du tenseur de corrélations **triples** en deux points qui est un cas particulier du tenseur de corrélations triples en trois points $R_{ijk}$. Pareillement calculant l'évolution de ce dernier tenseur on le trouve dépendre des corrélations quadruples en 3 points. C'est ici que Proudman et Reid introduisent l'approximation que ces dernières peuvent s'exprimer à l'aide des corrélations doubles comme dans une loi normale par la relation :

$$\overline{u_i(\vec{x})\, u_l(\vec{x})\, u_j(\vec{x}+\vec{r})\, u_k(\vec{x}+\vec{r}')} = R_{il}(o)\, R_{jk}(\vec{r}' - \vec{r}) + R_{ij}(\vec{r})\, R_{lk}(\vec{r}') + R_{ik}(\vec{r}')\, R_{lj}(\vec{r})$$

Parallèlement au tenseur spectral $\Phi_{ij}$ les Auteurs introduisent le transformé de Fourier de $R_{ijk}$

$$\Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') = i\,\frac{1}{(2\pi)^6}\int\cdots\int R_{ijk}\, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}+\vec{k}'.\vec{r}')}\, d\vec{r}.d\vec{r}'$$

et orientent de préférence le calcul en termes de ces tenseurs spectraux. Nous avons déjà signalé qu'à cette occasion ils ont perfectionné la manière d'obtenir un tenseur isotrope vérifiant les conditions d'incompressibilité, et montré que $\Phi_{ijk}$ ne dépend que de deux scalaires, soient $\theta$ et $\Omega$.

En ce qui concerne les corrélations doubles la relation demeure celle que nous avons déjà donnée:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E$$

où T s'exprime à partir de $\Phi_{ijk}$ c'est-à-dire en fonction de $\theta$ et $\Omega$ par une intégrale un peu longue que nous n'écrirons pas.

Mais cette fois le deuxième maillon de la chaîne qui est l'évolution de $\theta$ et $\Omega$ nous ramène au premier et non à une suite infinie d'autres maillons. Le résultat très simple compte tenu de la complexité du calcul est :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{E(k'')}{16\pi^2 k''^2} \left[ \frac{E(k')}{k'^2} - \frac{E(k)}{k^2} \right] - \nu (k^2 + k'^2 + k''^2)\,\theta \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\nu (k^2 + k'^2 + k''^2)\,\Omega \end{aligned} \right.$$

Les scalaires $\theta$ et $\Omega$ sont fonction de deux points de l'espace des k c'est-à-dire k, k' et k'' où :

$$\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' = 0$$

Parmi les premières conséquences qui aient été exploitées de ces nouvelles équations, figure notamment celle-ci: dans le cas d'une viscosité rigoureusement nulle l'évolution de l'intensité tourbillonnaire est régie dans les hypothèses actuelles par l'équation très simple (où $\overline{\omega_1^2}$ est le carré moyen d'une composante du tourbillon)

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\overline{\omega_1^2} = \left(\overline{\omega_1^2}\right)^2$$

et de celle-ci on déduit aisément que, quelles que soient les conditions initiales, le transfert d'énergie s'effectue après un certain temps des gros aux petits tourbillons; la théorie approchée actuelle semble donc impliquer le "processus de cascade" même sans le puits d'énergie qui est apporté par une viscosité aussi petite qu'on veut mais non nulle.

## SUGGESTIONS DE L'EXPÉRIENCE EN SOUFFLERIE

L'effet global le plus important à observer dans la turbulence derrière grille est le taux de décroissance de l'énergie cinétique. Les mesures répétées (parmi les plus récentes Stewart et Townsend 1951) ont révélé l'existence d'une période dite initiale dont la loi très simple traduite dans le modèle théorique s'écrit :

$$u^2 (t - t_0) = C^{te} \qquad (1) \qquad (u^2 = \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2})$$

On aura la mesure de nos lacunes actuelles en turbulence quand nous aurons dit que celle-ci qui semble traduire des propriétés statistiques importantes demeure encore largement inexpliquée.

On sait qu'une des échelles de la turbulence fréquemment utilisée depuis Taylor est définie par

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \frac{u^2}{\lambda^2}$$

et que la dissipation en turbulence isotrope est donnée par

$$\varepsilon = \nu\overline{\omega^2} = 15\nu \frac{u^2}{\lambda^2} \qquad (\omega^2 = \overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2} + \overline{\omega_3^2})$$

A partir de la loi (1) de décroissance initiale on déduit immédiatement de ces relations, la loi de décroissance de l'énergie tourbillonnaire $\omega^2$ et le fait que le nombre de Reynolds de la turbulence $R = \frac{u\lambda}{\nu}$ ne varie pas avec le temps.

La simplicité et la généralité de ces faits portent immanquablement à penser que dans la turbulence en soufflerie les tourbillons porteurs d'énergie doivent eux aussi posséder quelque structure statistique commune à tous les cas; comme les petits tourbillons sont eux-mêmes en équilibre universel, c'est pour l'ensemble, ou tout au moins pour une large partie du spectre, que nous sommes tentés ici de chercher quelque propriété générale.

Considérant d'abord une même expérience et les divers stades de la turbulence au cours de son déclin on peut se demander si celle-ci ne conserve pas dans ce cas une structure semblable à elle-même; si par exemple il n'existerait pas deux paramètres cinétiques, longueur et vitesse, variables avec le temps, mais à l'aide desquels le spectre E (k) et toutes autres grandeurs statistiques conserveraient leur forme à une affinité près. Ces hypothèses de similitude ont été envisagées depuis longtemps et soumises plus récemment à un contrôle poussé de l'expérience (Stewart et Townsend 1951); le résultat est qu'elles ne sont pas valables pour une zone de spectre aux faibles k qui contient une part appréciable de l'énergie (20 %) mais qu'au delà elles se vérifient bien. On montre aisément que la similitude entraîne la loi de décroissance de la période initiale; mais comme l'expérience vérifie l'une à 80 % et l'autre à 100 % il est clair que pour l'explication de celle-ci nous ne sommes pas tout-à-fait dans la bonne direction.

Comparant maintenant des échantillons de turbulence provenant d'expériences distinctes nous pouvons nous proposer d'en dresser le catalogue. La zone du spectre en équilibre exige déjà deux paramètres $\varepsilon$ et $\nu$ ; pour caractériser les tourbillons porteurs d'énergie il faut au moins un paramètre supplémentaire par exemple $u^2$; s'il n'en faut pas davantage nous aurons le catalogue le plus simple celui d'une famille de spectres à un paramètre, qu'on peut écrire par exemple par l'Analyse Dimensionnelle (nous y joignons la fonction de transfert T)

$$\mathbf{E} = u^2\lambda\ H(k\lambda, R) \qquad T = u^3 S(k\lambda, R).$$

Cette limitation à un paramètre, entraîne pour une expérience déterminée ($R = C^{te}$) la similitude du spectre aux diverses phases de l'extinction; comme cette dernière par conséquent elle ne peut s'appliquer à une zone de petits k contenant 20 % de l'énergie cinétique qui implique d'autres influences.

La notion de similitude ou de famille à un paramètre, associée à la loi de décroissance initiale, simplifie un peu le problème fondamental de la détermination des fonctions E et T puisque l'évolution temporelle est désormais connue : c'est ainsi que l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = T - 2\nu k^2 \mathbf{E}$$

devient

$$-\frac{5}{R}(H - \chi H') = S - \frac{2}{R}\chi^2 H \qquad (\chi = k\lambda)$$

Si donc au lieu de la chaîne infinie d'équations statistiques de la turbulence nous nous arrêtons à la première en y adjoignant quelque hypothèse plausible sur le lien entre T et E c'est le spectre lui-même que nous pouvons cette fois calculer.

Plusieurs telles hypothèses ont été proposées et la plus célèbre est celle d'Heisenberg qui pose

$$\begin{cases} \displaystyle\int_o^k T\, d\, k = -\nu_t \int_o^k 2\, k^2\, E\, d\, k \\ \displaystyle\nu_t = \gamma \int_k^\infty \sqrt{\frac{E}{k^3}}\, d\, k\ . \end{cases}$$

L'intuition que traduisent ces équations est que pour les transferts d'énergie entre tourbillons par le processus de cascade on peut généraliser l'idée de viscosité fictive de turbulence de Boussinesq. La première équation écrit donc la perte d'énergie correspondante du spectre entre o et k comme une perte par viscosité; et la deuxième traduit en s'aidant de l'Analyse Dimensionnelle cette viscosité en termes des tourbillons plus petits. Les spectres d'Heisenberg ont été calculés par Chandrasekhar (1949) et Proudman (1951) et ils se comparent favorablement avec l'expérience (pour les tourbillons porteurs d'énergie mais pas pour la zone d'équilibre).

## PROLONGEMENTS DIVERS

On nous permettra en terminant de dire un mot d'une question qui, si elle est très loin des applications hydrauliques, est tout-à-fait au cœur du sujet qui nous occupe.

Les recherches concernant la géophysique et les nuages interstellaires ont conduit à s'intéresser aux propriétés de la turbulence dans un fluide de très grande conductivité électrique. Pour le cas d'une conductivité infinie on montre que les lignes de champs magnétiques sont transportées avec la matière et plus généralement se comportent exactement comme le tourbillon dans les équations de Helmholtz, c'est-à-dire que l'intensité du champ augmente quand le tube magnétique s'allonge. Le parallèle entre champ magnétique et tourbillon se poursuit plus loin et il apparaît que lorsque la résistivité n'est pas rigoureusement nulle celle-ci joue pour le premier, le rôle de la viscosité pour le second : il y a une dissipation du champ magnétique par effet Joule apporté par une faible résistivité. On voit qu'un champ magnétique aléatoire initial est amplifié par la turbulence et éteint par la résistivité; l'intensité tourbillonnaire est de même augmentée par la turbulence et amortie par la viscosité; ce qui arrivera à l'énergie magnétique dépend en définitive des valeurs relatives de la résistivité et de la viscosité et si la résistivité est suffisamment faible par rapport à la viscosité il y aura amplification spontanée de toute intensité magnétique irrégulière initiale si faible soit-elle (le critérium n'est réalisé que dans des circonstances exceptionnelles).

Dans le raisonnement qui précède l'influence va du champ hydrodynamique au champ magnétique; si celui-ci gagne en intensité il y aura des forces créées par le mouvement et une réaction dans l'autre sens est à prévoir; c'est, en effet, ce que l'analyse permet de préciser et on a désormais des équations de Navier complétées d'un terme d'interaction magnétique. La théorie de l'équilibre statistique des petits tourbillons permet ici d'intéressantes conclusions sur la distribution des énergies cinétiques et magnétiques aux grands nombres d'onde. Plus généralement la turbulence en magnéto-hydrodynamique a été portée par Batchelor et Chandrasekhar (1951) au même degré d'analyse que la turbulence ordinaire.

COMMENTAIRE DE M. LE PRESIDENT (M. FRECHET)

M. le Président remercie vivement M. CRAYA qui a réussi, tout en donnant le principe et les formes mêmes des équations, à indiquer l'évolution des idées et les méthodes générales qui ont été introduites dans ce problème très difficile.