

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. ULMO

F. BASTENAIRE

## **Méthodes statistiques de détermination d'une caractéristique des aciers doux. La température de transition de la résilience**

*Revue de statistique appliquée*, tome 1, n° 3-4 (1953), p. 45-62

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1953\\_\\_1\\_3-4\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_45_0)

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉTHODES STATISTIQUES DE DÉTERMINATION D'UNE CARACTÉRISTIQUE DES ACIERS DOUX

## La température de transition de la résilience

par

**J. ULMO**

*Agrégée de Mathématiques*

et

**F. BASTENAIRE**

*Ingénieur de l'École de Physique et Chimie Industrielles,*

*Statisticien à l'Institut de Recherches de la Sidérurgie*

*L'Institut de recherches de la Sidérurgie, fondé en 1947, est un établissement de recherches professionnel. Il groupe des départements extérieurs : Minerais, Coke et Fonte, Aciérie dont le principal objectif est l'étude et la mise au point en usine de procédés nouveaux et l'amélioration des procédés existants, et des départements intérieurs : Métallographie, Physique, Chimie, Chimie Physique, Mesures et travaux, Statistique dont les laboratoires sont à Saint-Germain-en-Laye.*

*L'IRSID prend également part à des études de grande envergure de caractère national ou international telles que : la cokéfaction des fines lorraines, le rayonnement des flammes et la mise au point d'un bas fourneau.*

*Le département Statistique a été créé, il y a deux ans, par Mlle ULMO pour aider à l'organisation des recherches et à leur interprétation. Il collabore actuellement aux recherches générales ci-dessus et particulièrement avec les départements Coke et Fonte, Aciérie et Métallographie.*

*La note ci-dessous expose les résultats d'une recherche conduite en collaboration avec la Métallographie dans le cadre d'une étude plus générale conduite en usine par le département Aciérie.*

### INTRODUCTION.

L'un des essais de choc les plus utilisés sur les aciers consiste à rompre, au moyen d'un mouton-pendule tombant d'une hauteur constante, des éprouvettes entaillées reposant sur deux appuis.

L'énergie absorbée par la rupture de l'éprouvette rapportée à l'unité de surface est appelée résilience.

L'éprouvette la plus couramment utilisée en France pour ces essais est l'éprouvette UF dont l'entaille a la forme d'un trou de serrure (figure 1).

Parmi les nombreux facteurs qui affectent la résilience d'un acier donné, la température est l'un des plus importants. En effet, à basse température, tous les aciers sont caractérisés par une fra-

gilité qui est d'autant plus nuisible dans certains types de constructions qu'elle se produit à une température plus voisine de la température ambiante. (Pendant la dernière guerre, plusieurs liberty-ships subirent ainsi de graves avaries.)

Pour les aciers doux, la résilience diminue brusquement dans un domaine de température appelée zone de transition. La position de cette zone est une caractéristique importante pour la qualification d'un acier.

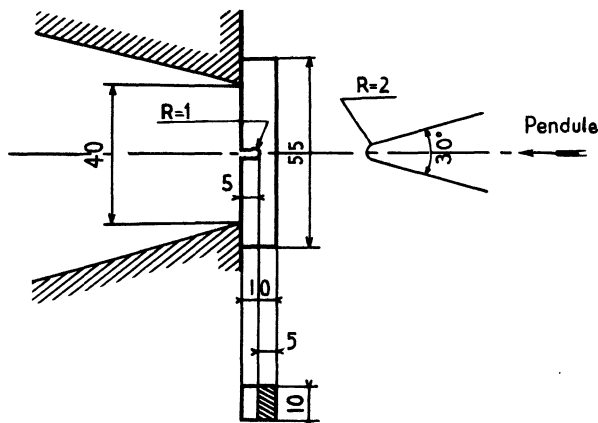


Fig. 1 - Vue de dessus d'une éprouvette calée contre son support (dimensions en mm)

L'Institut de Recherches de la Sidérurgie ayant mis au point un procédé d'élaboration d'acier Thomas B. T. M. (1) dont la composition chimique est voisine de celle de l'acier Martin, il importait de comparer les propriétés de ces deux types d'acier du point de vue de la température de transition de la résilience.

Dans la zone de transition, la résilience est affectée d'une dispersion considérable et peut varier, à une même température, entre 1 et 5 kgm/cm<sup>2</sup> ; aussi, les techniciens ont-ils pensé à demander l'aide de la Statistique.

## CONDITIONS HABITUELLES DES ESSAIS DE RÉSILIENCE.

L'éprouvette utilisée est une éprouvette de section carrée de 10 mm × 10 mm, de 55 mm de long, entaillée en son milieu. On utilise couramment plusieurs formes d'entailles ; l'éprouvette UF est caractérisée par une entaille en forme de trou de serrure profonde de 5 mm. (Rayon de courbure à fond d'entaille : 1 mm).

Pour effectuer ces essais à une température donnée, les éprouvettes sont plongées pendant une durée suffisante dans un bain maintenu à cette température, puis rapidement portées sur le support du mouton-pendule et cassées. Le mouton les attaque sur le côté opposé à l'entaille comme l'indique la figure 1. L'énergie absorbée par la rupture est mesurée par la différence entre l'énergie totale disponible et l'énergie résiduelle calculée d'après l'angle de remontée du pendule.

On a l'habitude de tracer les courbes « résilience-température » au moyen de 4 points expérimentaux par température d'essai, à 6 températures différentes couvrant la zone à explorer.

Étant donnée la grande dispersion des points expérimentaux dans la zone de transition, le tracé de la courbe moyenne résilience-température est extrêmement incertain comme on peut en juger par l'exemple ci-après (fig. 2).

On a proposé de nombreuses définitions conventionnelles de la température de transition. Les plus couramment utilisées en France sont la température correspondant soit au point d'inflexion de la courbe moyenne résilience-température, soit à une résilience déterminée (généralement 3 kgm/cm<sup>2</sup>) considérée comme la limite inférieure des résiliences acceptables. En raison de l'incer-

(1) Basse teneur en métalloïdes.

titude du tracé de la courbe au moyen de 3 ou 4 points expérimentaux par température, ces définitions conduisent pour les aciers qui nous occupent à des températures de transition peu reproductibles (écarts de plusieurs dizaines de degrés d'une détermination à une autre pour un même acier).

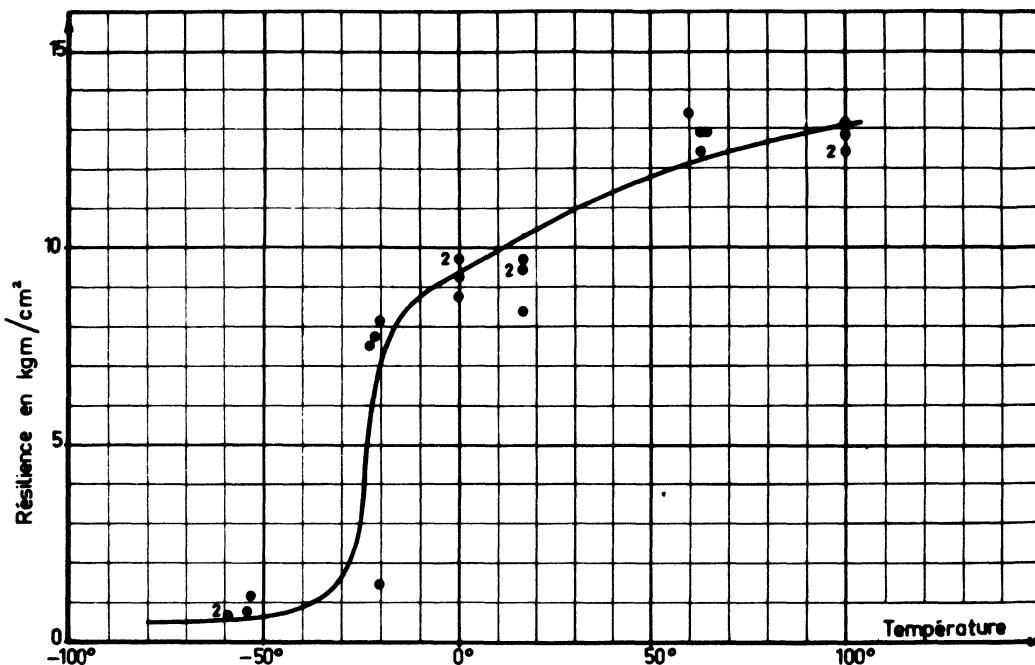


Fig. 2 - Courbe résilience-température

## ÉTUDE PRÉLIMINAIRE.

### Examen préliminaire du problème.

Nous avons d'abord envisagé le problème sous la forme suivante : détermination de la température de transition définie à partir de la résilience  $3 \text{ kgm/cm}^2$  par une méthode analytique, donc indépendante de l'opérateur, et avec une précision calculable.

La difficulté du problème résidait dans le manque de renseignements sur la forme analytique de la courbe de régression de la résilience sur la température et sur la distribution des résiliences à une température donnée quelconque.

L'examen des données expérimentales que nous possédions nous avait conduits à penser que cette distribution ne devait pas être normale dans la zone de grande dispersion. Nous avons, en effet, constaté sur les 4 points de chaque température des groupements difficilement explicables par le hasard.

Deux auteurs américains, H. ROBBINS et S. MONRO (1) ont indiqué une méthode permettant, lorsqu'une variable aléatoire  $Y$  dépend d'un paramètre  $x$ , de déterminer la valeur  $x_0$  de  $x$  pour laquelle  $E(Y)$  est égale à une valeur  $M$  fixée d'avance.

Cette méthode est applicable sous des hypothèses très générales quant à la forme de la courbe de régression et aux distributions liées de  $Y$ , mais les auteurs n'ont pas indiqué quelle est la dispersion de l'estimation de  $x_0$  ; ils ont seulement démontré la convergence en probabilité de leur estimation vers  $x_0$ .

Pour des applications industrielles, il est important de connaître la distribution et la variance de l'estimation de  $x_0$  ; celle-ci a été établie par l'un de nous dans le cas particulier de la régression linéaire à écart-type lié, constant (2).

(1) Annales of Math. Stat. 22 (1951), p. 400.

(2) A paraître.

Cette méthode, appliquée à la valeur de la résilience, ne fournit pas une réponse entièrement satisfaisante, car il s'agit de trouver une température telle que la probabilité d'avoir une résilience inférieure à une limite donnée (3 kgm/cm<sup>2</sup>) soit suffisamment faible (par exemple inférieure à 5 %). Nous verrons plus loin pour quelle raison elle est cependant applicable sous une autre forme.

Il était donc difficile de se passer d'une étude de la distribution de la résilience à différentes températures de la zone de transition.

### Résultats des essais préliminaires.

Dans une étude préliminaire effectuée au centre (17°) de la zone de transition d'un acier avec 60 éprouvettes et vers ses deux extrémités (4°5 et 29°5) avec 20 éprouvettes, nous avons constaté (figure 3) que :

- à 17°, la distribution était nettement bimodale (test de  $\chi^2$  significatif) ;
- à 4°5, la bimodalité subsiste tandis qu'à
- 29°5, elle disparaît et la distribution semble normale.

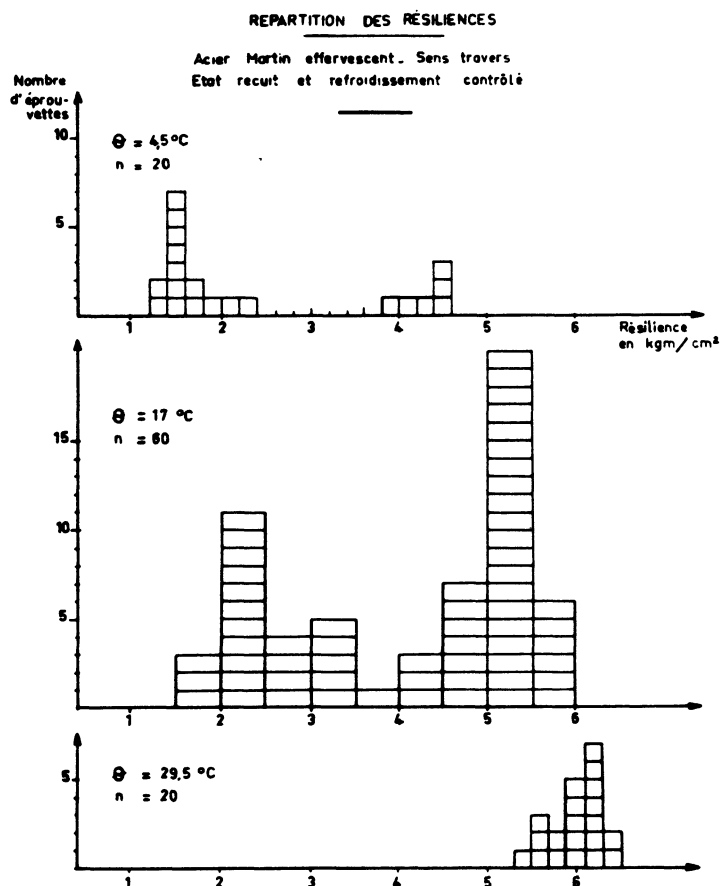


Fig. 3

### HYPOTHÈSE SUR LA NATURE DU PHÉNOMÈNE.

Ces premiers résultats, tout en étant trop peu nombreux pour nous permettre de conclure, nous ont conduits à soupçonner l'existence dans la zone de transition de deux modes de rupture des éprouvettes correspondant respectivement à deux niveaux distincts de la résilience, pour lesquelles nous avons adopté les dénominations de : rupture fragile et rupture non fragile ou résiliente. Ce double mécanisme de rupture expliquerait les groupements observés.

Il était en outre naturel de penser que la proportion des ruptures non fragiles, nulle aux basses températures, augmentait progressivement avec la température jusqu'à atteindre 100 %, la zone de transition étant précisément la zone de température où coexistent les deux modes de rupture.

Dans cette hypothèse, on peut définir deux branches de courbes résilience-température (figure 4) :

1 Celle qui correspond pour chaque température à la moyenne  $\bar{K}_1$  des résiliences du mode fragile ;

2 Celle qui correspond pour chaque température à la moyenne  $\bar{K}_2$  des résiliences du mode non fragile.

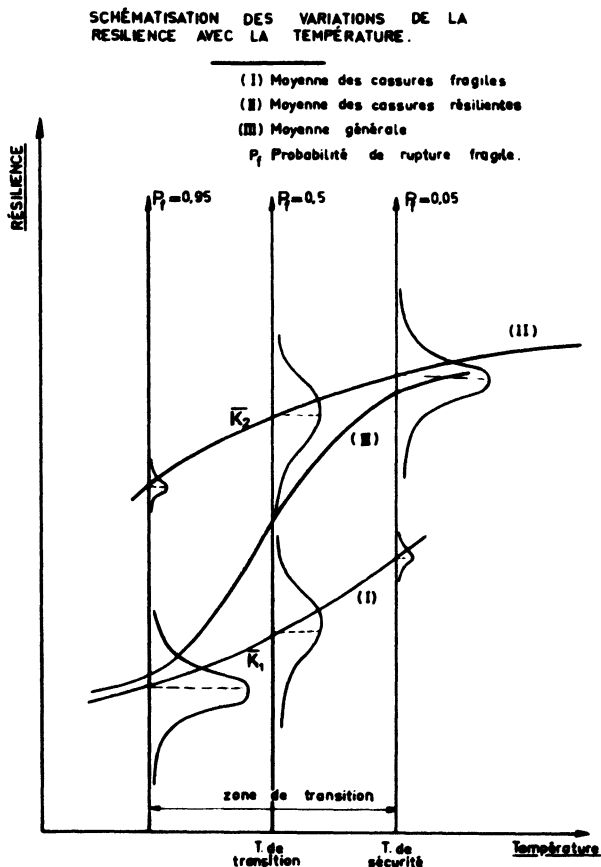


Fig. 4

Ces deux branches se chevauchent de telle sorte qu'une parallèle à l'axe des ordonnées intérieure au domaine de transition les rencontre toutes les deux.

Cette hypothèse permet de donner des définitions précises et ayant un sens physique de la zone et de la température de transition. Le calcul effectif de ces caractéristiques serait grandement facilité par la connaissance de la loi de variation de la proportion de ruptures non fragiles en fonction de la température.

L'étendue de la zone de transition peut être définie, par exemple, comme l'intervalle limité par les températures correspondant respectivement à 5 % et 95 % de ruptures non fragiles, c'est-à-dire l'intervalle en dehors duquel, à une même température, on aura au moins 95 % de chances d'avoir des cassures d'un seul type.

La température de transition sera la température correspondant à des chances égales de rupture fragile et non fragile.

Enfin, la température de transition de sécurité, qui est celle que nous cherchions, sera la température au-dessus de laquelle on aura au moins 95 % de chances d'avoir une rupture du type non fragile. Elle se confond avec la borne supérieure de la zone de transition.

## LOI DE VARIATION DE LA PROPORTION DES RUPTURES RÉSILIENTES.

Dans beaucoup de phénomènes physiques où l'on s'intéresse aux variations, en fonction d'un paramètre, de la probabilité d'un événement se traduisant par une alternative, on peut montrer et vérifier expérimentalement que, sous des conditions assez générales, ces variations suivent la courbe « en S » de Galton, intégrale de la courbe « en cloche de Gauss » (1).

Dans le cas de la résilience, en particulier, si l'on suppose que chaque éprouvette possède une température individuelle de passage brusque du mécanisme de rupture fragile au mécanisme de rupture résiliente et que ces températures de « transition » individuelles sont distribuées suivant la loi de Gauss, la proportion des éprouvettes résilientes, à une température donnée, est mesurée par l'aire de la courbe en cloche des températures de transition individuelles située à gauche d'une verticale passant par la température considérée.

La loi de variation de la proportion de ruptures résilientes dépend donc de 2 paramètres : la température de transition  $\theta_m$  moyenne des températures de transition individuelles et l'écart-type  $\sigma$  de la distribution des températures individuelles de transition.

L'étendue de la zone de transition que l'on peut définir comme étant la mesure de l'intervalle centré sur  $\theta_m$  contenant 90 % des températures individuelles de transition serait égal à  $\epsilon = 2 \times 1,65 \sigma$  et la température de sécurité à  $\theta_s = \theta_m + 1,65 \sigma$ .

Il était donc nécessaire de faire une deuxième série d'essais pour confirmer ces hypothèses. Avant d'en rendre compte, nous allons exposer les méthodes statistiques de détermination des caractéristiques de la zone de transition que nous avons retenues.

## MÉTHODES STATISTIQUES DE DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE LA ZONE DE TRANSITION.

### A. — Méthode des « PROBITS ».

Elle consiste à ajuster une courbe « en S » de Galton aux résultats expérimentaux : proportions de ruptures résilientes observées aux différentes températures d'essai.

Il existe de nombreuses techniques d'ajustement (2) parmi lesquelles nous avons retenu la méthode graphique et son complément analytique : la méthode du maximum de vraisemblance qui, si elle ne conduit pas aux calculs les plus simples, n'exige aucune disposition particulière des essais et résout complètement le problème :

- estimation de  $\theta_m$  et  $\sigma$  ;

- précision de ces estimations ;

- test de l'hypothèse d'une variation suivant la courbe de Galton.

Elle possède, de plus, le caractère optimum propre au maximum de vraisemblance.

### 1° MÉTHODE GRAPHIQUE.

La courbe intégrale de la courbe de Gauss peut être représentée par une droite (droite de Henry) à condition d'adopter une échelle convenable des ordonnées (ordonnées galtoniennes ou probits). Cette représentation est couramment utilisée pour les fréquences cumulées d'une distribution dont on veut vérifier la normalité.

Si donc, les variations de la proportion des ruptures résilientes suivent la loi de Galton, on doit obtenir des points sensiblement alignés en portant dans de telles coordonnées les résultats fournis par l'expérience (figures 5 et 6).

Dans le tracé à vue d'une droite passant au mieux entre les points obtenus, on doit tenir compte, d'une part, de la dilatation des ordonnées aux deux extrémités de l'échelle, d'autre part, du fait que les proportions ont été obtenues à partir d'un nombre restreint d'essais et diffèrent donc des proportions exactes. Aussi est-il bon d'accompagner chaque point expérimental d'un segment vertical représentant l'étendue de l'intervalle qui a une probabilité donnée de contenir la proportion

---

(1) R. SAINT-GUILHEM, R. LOISON, J. ULMO, Annales des Mines IV (1950), p. 3.

(2) J. ULMO : Annales des Mines 141 (1952), III-IV, p. 93.

FINNEY : Probit Analysis (1947), Cambridge University Press.

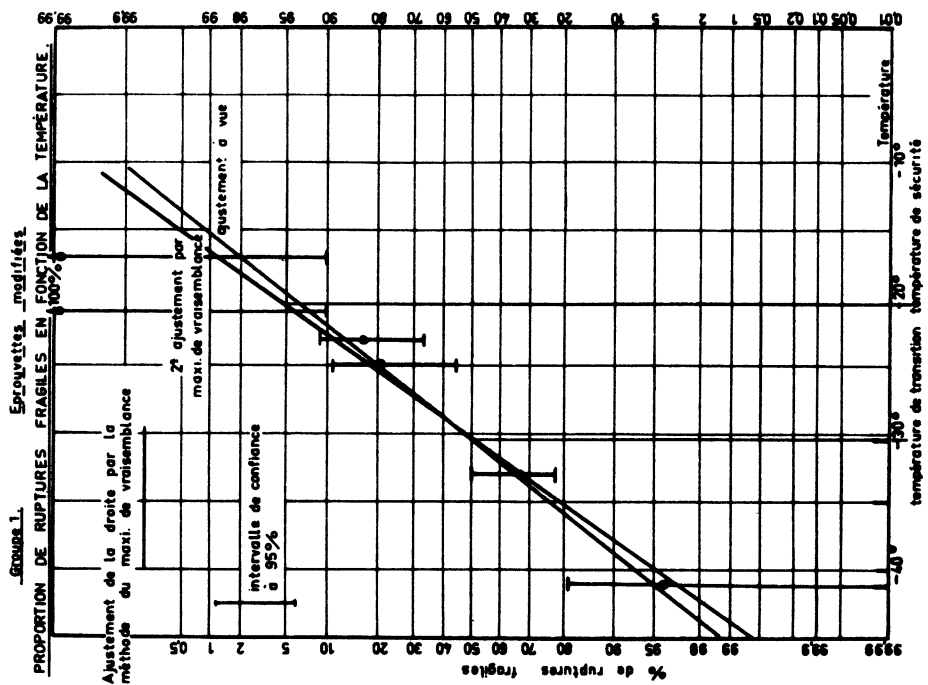


Fig. 6

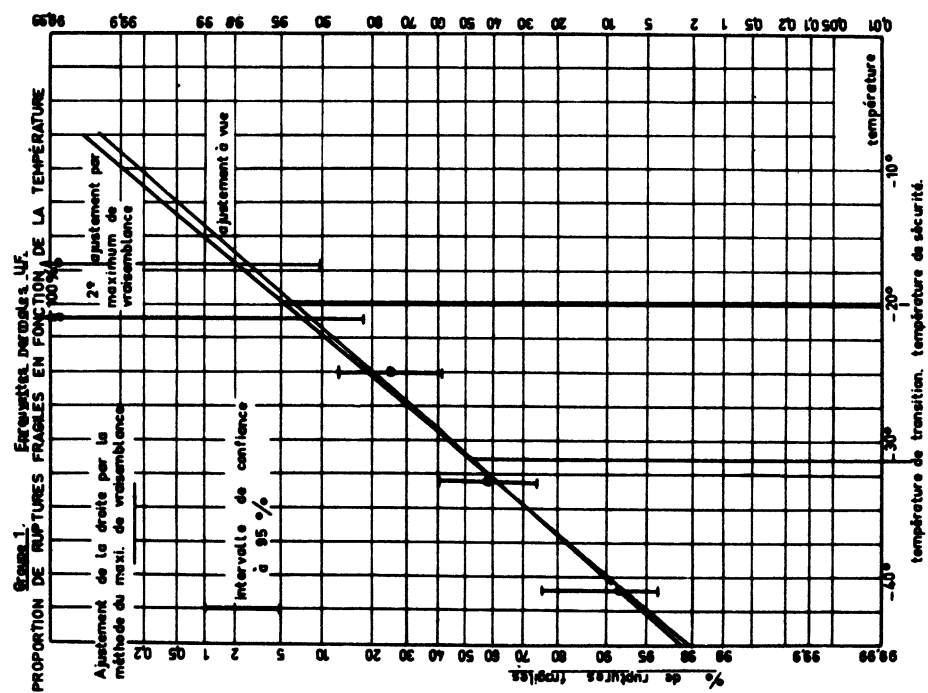


Fig. 5

exacte (intervalle de confiance à 95 %). Les abaques établis pour l'estimation d'une proportion donnent les limites de ces intervalles.

A partir de cette droite, on estime aisément la température de transition par l'abscisse  $T_m$  du point d'ordonnée 50 %, la température de sécurité par l'abscisse  $T_s$  du point d'ordonnée 95 % et l'étendue de la zone de transition par  $E = 2 (T_s - T_m)$ .

Comme toute méthode graphique, cette méthode ne permet pas de déterminer la précision des estimations  $T_m$ ,  $T_s$  et  $E$  et dépend, dans une mesure non négligeable, de l'opérateur.

## 2° MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Soient

$T_i$   $i = 1, 2, \dots, N$  les températures d'essai ;

$n_i$  le nombre total des essais à la température  $T_i$  ;

$r_i$  le nombre des cassures résilientes à la température  $T_i$  ;

$p_i = \frac{r_i}{n_i}$  la proportion observée des cassures résilientes à la température  $T_i$  ;

$P_i = P(T_i)$  la probabilité de rupture résiliente à la température  $T_i$  ;

$Q_i = 1 - P_i$  la probabilité de rupture fragile à la température  $T_i$ .

La vraisemblance de l'ensemble des résultats expérimentaux est

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^N C_{n_i}^{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{n_i - r_i}$$

Par hypothèse  $P(T)$  est une fonction de Galton. On a donc

$$P(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^T e^{-\frac{(u-\theta_m)^2}{2\sigma^2}} \frac{du}{\sigma} = G_0\left(\frac{T-\theta_m}{\sigma}\right)$$

avec

$$G_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

intégrale de la courbe de Gauss « réduite » (de moyenne 0 et d'écart-type 1).

Les estimations du maximum de vraisemblance de  $\theta_m$  et  $\sigma$  sont celles qui rendent  $\mathcal{L}$  ou son logarithme  $L$  maximum.

Les équations d'estimations sont donc

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$$

Pour les résoudre, il est commode de considérer la fonction auxiliaire  $Y(T)$  définie à partir de  $P$  par la relation  $P = G_0(Y)$ .

On a donc  $Y(T) = \frac{T - \theta_m}{\sigma}$

$Y$  est appelée la « N.E.D. » (normal equivalent deviation) de  $P$  (\*). Elle varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  quand  $P$  varie de 0 à 1 et c'est proportionnellement à ses valeurs qu'est graduée l'échelle des ordonnées galtoniennes : la fonction  $P(T)$  y est donc représentée par la droite (de Henry).

$$Y = \frac{T - \theta_m}{\sigma}$$

Il est également commode d'introduire comme paramètres auxiliaires ceux  $\alpha$  et  $\beta$  de la droite de Henry. Ils sont définis par

$$\frac{T - \theta_m}{\sigma} = \alpha + \beta T \quad \text{soit} \quad \sigma = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{et} \quad \theta_m = -\frac{\alpha}{\beta}$$

---

(\*) Le « probit » est défini comme égal à  $Y + 5$ . Il a l'avantage d'être généralement positif dans les applications.

Le système (1) est équivalent au système

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{r_i - n_i P_i}{P_i Q_i} \left( \frac{dP}{dY} \right)_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N \frac{r_i - n_i P_i}{P_i Q_i} \left( \frac{dP}{dY} \right)_i T_i = 0 \end{cases}$$

que l'on peut écrire en posant :

$$Z = \frac{dP}{dY} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

ordonnée du point d'abscisse Y de la courbe de Gauss réduite.

$$\eta_i = Y_i + \frac{P_i - P_i}{Z_i}$$

$$W_i = n_i w_i = \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} = \frac{1}{\sigma_{Y_i}^2}$$

« poids » de la N. E. D. y de p.

$$(2') \quad \begin{cases} \sum W_i (\eta_i - Y_i) = 0 \\ \sum W_i T_i (\eta_i - Y_i) = 0 \end{cases}$$

Le système (2') n'a pas une forme simple en  $\alpha$  et  $\beta$ . On le résout par une méthode d'approximations successives qui consiste à estimer chaque fois les  $\eta_i$  et les  $W_i$  à partir des résultats expérimentaux et des valeurs  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $Y_i$  et  $Z_i$  fournies par l'approximation précédente. Dans ces conditions, les paramètres inconnus  $\alpha$  et  $\beta$  n'interviennent plus que linéairement par l'intermédiaire des  $Y_i$  et des expressions de a et b solutions du système ainsi simplifié, on déduit celles des estimations  $T_m$  et s de  $\theta_m$  et  $\sigma$  soit

$$(3) \quad \begin{cases} T_m = \frac{\sum W \eta \cdot \sum W T^2 - \sum W \eta T \cdot \sum W T}{\sum W \eta \cdot \sum W T - \sum W \eta T \cdot \sum W} \\ s = \frac{(\sum W T)^2 - \sum W \cdot \sum W T^2}{\sum W \eta \cdot \sum W T - \sum W \eta T \cdot \sum W} \end{cases}$$

On montre que les estimations  $T_m$  et  $s$  obtenues à la j<sup>e</sup> approximation convergent vers les solutions  $T_m$ , s du système (2'). En pratique d'ailleurs, la solution en a et b obtenue en estimant les  $\eta_i$  et les  $W_i$  des équations (3) à partir d'une droite de Henry ajustée graphiquement aux résultats expérimentaux est souvent suffisante.

D'autre part, a et b étant les solutions des équations du maximum de vraisemblance, on a d'après la théorie générale :

$$\sigma_a^2 = \frac{-E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \right)}{\Delta} \quad \sigma_b^2 = \frac{-E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right)}{\Delta} \quad \text{cov}(a-b) = \frac{-E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} \right)}{\Delta}$$

$$\text{exposant } \Delta = \begin{vmatrix} E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right) & E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} \right) & E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \right) \end{vmatrix}$$

On en déduit les expressions approchées des variances de  $T_m$ , s, et  $T_s = T_m + 1,65s$

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_{T_m}^2 = s^2 (s^2 \sigma_b^2 + \sigma_\eta^2) \\ \sigma_s^2 = s^4 \sigma_b^2 \\ \sigma_{T_s}^2 = \sigma_{T_m}^2 + 1,65 \sigma_s^2 (1,65 - 2 \bar{\eta}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_b^2 = \frac{\sum W}{\sum W \cdot \sum W T^2 - (\sum W T)^2} \\ \eta = \frac{\sum W \eta}{\sum W} \text{ et } \sigma_\eta^2 = \frac{1}{\sum W} \end{cases}$$

TABLEAU I

**Estimation des caractéristiques de la zone de  
Acier Martin effervescent. —**

| Tempé-<br>rature | Variable<br>réduite        | Nombre<br>d'essais | Nombre<br>observé<br>de<br>résilientes | Probabilité<br>observée<br>de<br>résilientes | Probabilité<br>lue (1)<br>de<br>résilientes | $Y_{11} - \frac{P_{11}}{Z_{11}}$ | $\frac{1}{Z_{11}}$ |
|------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------|--------------------|
| $T_i$            | $t_i = \frac{T_i + 25}{4}$ | $n_i$              | $r_i$                                  | $P_i$                                        | $P_{11}$                                    |                                  |                    |
| — 41°            | — 4                        | 24                 | 1                                      | 0,04                                         | 0,045                                       | — 2,169                          | 10,55              |
| — 33°            | — 2                        | 24                 | 8                                      | 0,333                                        | 0,33                                        | — 1,350                          | 2,76               |
| — 25°            | 0                          | 24                 | 19                                     | 0,79                                         | 0,79                                        | — 1,930                          | 3,47               |
| — 23°            | 0,5                        | 24                 | 20                                     | 0,83                                         | 0,87                                        | — 2,880                          | 4,61               |
| — 21°            | 1                          | 24                 | 24                                     | 1,00                                         | 0,92                                        | — 4,792                          | 6,73               |
| — 17°            | 2                          | 24                 | 24                                     | 1,00                                         | 0,98                                        | — 18,180                         | 20,60              |

**Variables réduites**

$$t_m = \frac{DC - BE}{BD - AE} = -1,328$$

$$s = \frac{B^2 - AC}{BD - AE} = 1,473$$

**Précision avec un essai par température :**

$$\bar{\eta} = \frac{D}{A} = 0,493$$

$$\sigma_{\bar{\eta}}^2 = \frac{1}{A} = 0,4704$$

$$\sigma_b^2 = \frac{A}{AC - B^2} = 0,172$$

$$\sigma_s^2 = \sigma_b^2 s^4 = 0,81$$

$$\sigma_{t_m}^2 = s^2 (s^2 \bar{\eta}^2 \sigma_b^2 + \sigma_{\bar{\eta}}^2) = 1,217$$

$$\sigma_{t_s}^2 = \sigma_{t_m}^2 + \sigma_s^2 1,65 (1,65 - 2 \bar{\eta}) = 2,104$$

(1) Sur la droite de Henry ajustée à vue.

transition. — Méthode du maximum de vraisemblance

Eprouvettes modifiées (Étude I)

| $\frac{p_i}{Z_{1i}}$ | $(\eta_{1i} - \frac{p_{1i}}{Z_{1i}} + \frac{p_i}{Z_{1i}})$ | $w_{1i} = \frac{Z_{1i}^2}{p_{1i} Q_{1i}}$ | $w_{1i} \quad t_i$ | $w_{1i} \quad t_i^2$ | $w_{1i} \quad \eta_i$ | $w_{1i} \quad \eta_i \quad t_i$ |
|----------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|---------------------------------|
| 0,44                 | — 1,729                                                    | 0,2085                                    | — 0,834            | 3,336                | — 0,3605              | 1,4420                          |
| 0,91                 | — 0,440                                                    | 0,5930                                    | — 1,186            | 2,372                | — 0,2609              | 0,5218                          |
| 2,75                 | — 0,820                                                    | 0,5007                                    | 0                  | 0                    | 0,4106                | 0                               |
| 3,84                 | 0,960                                                      | 0,4035                                    | 0,202              | 0,101                | 0,3874                | 0,1937                          |
| 6,73                 | 1,938                                                      | 0,3005                                    | 0,300              | 0,300                | 0,5824                | 0,5824                          |
| 20,60                | 2,420                                                      | 0,1195                                    | 0,239              | 0,478                | 0,2892                | 0,5784                          |
|                      |                                                            | 2,1257                                    | — 1,279            | 6,587                | 1,0482                | 3,3183                          |
|                      |                                                            | A                                         | B                  | C                    | D                     | E                               |

## Résultats définitifs

|                        |                              |
|------------------------|------------------------------|
| $T_m = - 30^{\circ}31$ | $\sigma_{T_m} = 0^{\circ},9$ |
| $s = 5^{\circ}9$       | $\sigma_s = 0^{\circ},7$     |
| $T_s = - 20^{\circ}6$  | $\sigma_{T_s} = 1^{\circ},2$ |

$$T_s = T_m + 1,65 \text{ s}$$

$$\sigma_{T_m}^2 = \frac{16 \times 1,217}{24} = 0,81$$

$$\sigma_s^2 = \frac{16 \times 0,81}{24} = 0,54$$

$$\sigma_{T_s}^2 = \frac{16 \times 2,104}{24} = 1,40$$

TABLEAU I bis

**Test de l'hypothèse d'une loi de Galton pour la variation de la probabilité  
de cassures résilientes**

| Tempé-<br>ture<br>$T_i$                                                                                                                                                   | Probabilité<br>lue (*) de<br>résilientes<br>$P_{2i}$ | $w_{2i} = \frac{Z_{2i}^2}{P_{2i} Q_{2i}}$ | $\frac{1}{Z_{2i}}$ | $P_{2i} - p_i$ | $\frac{P_{2i} - p_i}{Z_{2i}}$ | $\left(\frac{P_{2i} - p_i}{Z_{2i}}\right)^2$ | $w_{2i} \left(\frac{P_{2i} - p_i}{Z_{2i}}\right)^2$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------|----------------|-------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| — 41°                                                                                                                                                                     | 0,03                                                 | 0,159                                     | 14,76              | — 0,01         | — 0,15                        | 0,0225                                       | 0,00358                                             |
| — 23°                                                                                                                                                                     | 0,32                                                 | 0,5873                                    | 2,798              | — 0,01         | — 0,03                        | 0,0009                                       | 0,00053                                             |
| — 25°                                                                                                                                                                     | 0,81                                                 | 0,4785                                    | 3,685              | 0,02           | 0,07                          | 0,0049                                       | 0,00234                                             |
| — 23°                                                                                                                                                                     | 0,89                                                 | 0,361                                     | 5,320              | 0,06           | 0,32                          | 0,1024                                       | 0,03697                                             |
| — 21°                                                                                                                                                                     | 0,94                                                 | 0,251                                     | 8,380              | — 0,06         | — 0,50                        | 0,2500                                       | 0,06275                                             |
| — 17°                                                                                                                                                                     | 0,99                                                 | 0,072                                     | 37,5               | — 0,01         | — 0,37                        | 0,1369                                       | 0,00986                                             |
|                                                                                                                                                                           |                                                      |                                           |                    |                |                               |                                              | 0,11602                                             |
| $\chi^2 = 24 \times 0,11602 = 2,785$<br>Degrés de liberté : 3<br>Seuil à 5 % : $\chi_0^2 = 7,815$<br>$\chi^2 = 2,785$ , correspond à $P \approx 0,45$ , non significatif. |                                                      |                                           |                    |                |                               |                                              |                                                     |

(\*) Sur la droite de Henry déterminée par la méthode du maximum de vraisemblance.

On peut enfin tester l'hypothèse d'une variation de  $P$  avec  $T$  suivant la courbe de Galton au moyen du test de  $\chi^2$ . Il s'agit en effet d'examiner si un ensemble  $p_i$   $i = 1, 2, \dots, N$  de proportions observées chacune au cours de  $n_i$  essais est compatible avec l'hypothèse d'un ensemble de probabilités  $P_i$ .

Dans l'affirmative, l'expression  $\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{n_i (p_i - P_i)^2}{P_i Q_i}$  est distribuée sensiblement comme  $\chi^2$  avec non pas  $N$  mais seulement  $N - 2$  degrés de liberté car les  $P_i$  sont calculés à partir des estimations  $T_m$  et  $s$  de  $\theta$  et  $\sigma$ .

La loi de  $\chi^2$  étant une loi asymptotique, suivie rigoureusement quand les  $n_i$  sont infinis, il importe dans le décompte des degrés de liberté de ne pas tenir compte des températures pour lesquelles le nombre des cassures, soit fragiles, soit résilientes, est trop faible (inférieur à 3 ou même à 5).

On trouvera ci-dessus (tableaux I et I bis) un exemple complet de calculs numériques correspondant à la figure 6. Des tables permettent d'obtenir rapidement les quantités  $P_i$ ,  $w_i$  et  $Z_i$  et les calculs sont plus faciles lorsque les températures sont régulièrement espacées et les essais en nombre constant à chaque température.

Supposant ces conditions réalisées, nous avons recherché quel est l'ensemble de températures d'essai qui donne les estimations les plus précises pour un même nombre total  $N$  d'essais. Nous avons trouvé que les conditions les plus favorables étaient 4 températures espacées les unes des autres d'environ  $\sigma$  et disposées symétriquement par rapport à la valeur inconnue  $\theta_m$ .

Dans ces conditions, la précision des estimations varie peu avec l'échelonnement des températures et leur disposition par rapport à  $\theta_m$  (le décentrement vers la droite est toutefois préférable à celui vers la gauche pour l'estimation de  $\theta_s$ ).

On a alors

$$\sigma_{T_m} = \frac{1,5\sigma}{\sqrt{N}} \quad \sigma_{T_s} = \frac{3,1\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ce qui montre que pour les valeurs de  $\sigma$  de l'ordre de  $10^\circ\text{C}$  qui sont les nôtres, avec  $N = 100$  essais, les intervalles de confiance à 95 %, des températures de transition et de sécurité sont respectivement de l'ordre de  $\pm 3^\circ$  et  $\pm 6^\circ$ .

### B. — Méthode d'approximations successives.

Nous avons déjà indiqué que la méthode de ROBBINS et MONRO permet de déterminer la valeur  $x_0$  du paramètre  $x$  de la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $Y$ , telle que

$$E(Y/x) = M$$

où  $M$  est une valeur fixée à l'avance.

Cette méthode s'applique aussi bien à une variable  $Y$  continue qu'à une variable  $Y$  discrète, ce qui est le cas pour une proportion expérimentale.

Dans l'expérience pratique qui nous concerne, la méthode peut s'appliquer à la détermination d'une valeur  $\theta_f$  de la température  $\theta$  telle que la proportion moyenne (espérance mathématique de la proportion) des ruptures résilientes ait une valeur donnée  $f$  ; par exemple 50 %, si l'on recherche la température de transition ou 95 %, si l'on recherche la température de sécurité.

Nous allons indiquer brièvement en quoi consiste cette méthode.

Soient  $T_i$  les températures d'essai, dont nous allons voir comment elles se déduisent les unes des autres, et  $P_i$  les proportions d'éprouvettes résilientes observées à ces températures.

Si la dernière expérience a été effectuée à la température  $T_q$  et a donné une proportion  $p_q$ , l'expérience suivante (la  $q + 1^{\text{ème}}$ ) doit être effectuée à une température

$$T_{q+1} = T_q + \frac{1}{K_q} (f - p_q)$$

où  $K$  est une constante qui doit être choisie de façon à minimiser l'erreur commise sur l'estimation de la température cherchée. Lorsque la première température d'essai  $T_1$  n'est pas trop grossièrement différente de la température cherchée, on peut prendre pour  $K$  la pente de la courbe de régression au point  $(\theta_f, f)$ .

Dans le cas présent

$$K = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta_f - \theta_m)^2}{2\sigma^2}}$$

On obtient facilement la valeur de  $K$  en utilisant les tables de la loi de Gauss.

Dans le cas particulier de la détermination de la température de transition,  $f = 0,5$  et  $\theta_f = \theta_m$ . D'où

$$K = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Il est donc nécessaire de connaître l'ordre de grandeur du  $\sigma$  des aciers sur lesquels on opère pour obtenir une valeur satisfaisante de  $K$ .

Dans ces conditions, on démontre que la suite des valeurs  $T_1, T_2 \dots T_n \dots$  converge en probabilité vers  $\theta_f$ .

De plus, l'écart-type de l'erreur commise en estimant  $\theta_f$  par  $T_q$  est donnée de façon approchée par la formule

$$\sigma(T_{q+1}) = \frac{\sigma \sqrt{2\pi}}{\sqrt{m_q}} e^{-\frac{(\theta_f - \theta_m)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{f(1-f)}$$

où  $m$  est le nombre d'éprouvettes essayées à chaque température.

Cette estimation est affectée d'une légère erreur systématique qui décroît assez rapidement lorsque  $q$  augmente.

### Exemple I.

Pour la température de transition, on trouve

$$\frac{\sigma(T_{q+1})}{\sigma} = \frac{1,25}{\sqrt{mq}}$$

Dans le cas concret où

$$m = 5 \quad q = 5 \quad mq = 25 \quad \sigma = 10^\circ \text{C}$$

il vient

$$\sigma(T_{q+1}) = 2,5^\circ$$

### Exemple II.

Pour la température de sécurité :  $f = 0,95$   $\theta_f - \theta_m = 1,65$  d'où la formule générale

$$\sigma(T_{q+1}) = \frac{2,13 \sigma}{\sqrt{mq}}$$

$$\text{Pour } m = 6 \quad q = 6 \quad \sigma = 10^\circ \text{C}$$

$$\sigma(T_{q+1}) = 3,5^\circ$$

La méthode d'approximations successives que nous venons d'exposer conduit par conséquent à d'assez bons résultats, mais il est bon de rappeler qu'il faut éviter de prendre une première température  $T_1$  trop éloignée de la zone de transition.

Nous donnons (Tableau II) un exemple d'application de cette méthode à l'acier étudié. Malgré un écart de  $10^\circ \text{C}$  entre la température de départ et la température cherchée, on voit que l'estimation obtenue est bonne. (Par la méthode des probits, on trouve  $T_m = -30^\circ 3$ .)

La température  $T_6$  déduite des résultats de l'essai n° 5 effectué à  $-31^\circ 8$  est égale à  $-33^\circ$ . C'est l'estimation cherchée. Ce serait la température d'essai suivante si l'on désirait poursuivre le processus.

TABLEAU II

| Essai N | Températures successives | Fragiles | Résilientes |
|---------|--------------------------|----------|-------------|
| 1       | $-20^\circ$              | 0        | 5           |
| 2       | $-30^\circ$              | 2        | 3           |
| 3       | $-31^\circ$              | 3        | 2           |
| 4       | $-30^\circ,3$            | 1        | 4           |
| 5       | $-31^\circ,8$            | 1        | 4           |

### VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE.

Une importante série d'essais a été décidée à la suite des résultats préliminaires obtenus. Ils furent sériés en groupes et avaient pour but :

1° D'étudier de plus près les distributions bimodales de la résilience dans la zone de transition (groupe 3) et les distributions aux extrémités inférieure et supérieure de cette zone (groupe 4) ;

2° De tester que la courbe de variation de la proportion des ruptures résilientes en fonction de la température ne diffère pas significativement de la courbe « en S » de Galton (groupe 1) ;

3° De comparer à l'éprouvette UF classique, à faces rectifiées et entaille percée, une éprouvette à entaille et faces fraisées qui présente l'avantage d'être d'un prix de revient bien inférieur à celui de l'éprouvette classique (groupes 1, 3, 4).

## CONDUITE DES ESSAIS.

La réalisation de l'étude impliquait l'usinage d'un grand nombre d'éprouvettes et il nous a fallu utiliser plusieurs morceaux de larget d'acier Martin effervescent à bas Carbone (0,05 %).

Dans chaque morceau de larget, de 1 m environ, il a été possible d'usiner 88 éprouvettes modifiées (M) et 38 éprouvettes normales (N) et, à chaque groupe d'essais, on a fait correspondre un ensemble de largets déterminés.

Afin d'éviter la présence d'erreurs systématiques particulièrement gênantes pour le tracé d'une courbe « en S » (erreurs sur les proportions obtenues aux diverses températures) et pour la comparaison de deux courbes « en S », nous avons tiré au hasard, dans chaque groupe, les éprouvettes à essayer à chaque température en nous imposant, en même temps, de prélever autant d'éprouvettes dans chaque larget.

L'éprouvette modifiée fut ainsi étudiée en utilisant 2 largets appelés A et B et en cassant 24 éprouvettes à chaque température, soit 12 pour chacun des largets A et B.

Pour chaque température d'essai, maintenue constante par un appareil de régulation, on fit alterner des groupes d'éprouvettes N et des groupes d'éprouvettes M, de façon à éliminer toute erreur systématique dans la comparaison des 2 types d'éprouvettes à une même température.

### Essais du groupe I.

Ils ont porté sur 106 éprouvettes N et 144 éprouvettes M cassées à raison de 24 par température.

#### DISTRIBUTIONS OBSERVÉES.

Les distributions observées sont toutes bimodales de  $-41^{\circ}$  à  $-23^{\circ}$  sur les éprouvettes M et de  $-41^{\circ}$  à  $-25^{\circ}$  sur les éprouvettes N (figure 7, Histogramme du Groupe I) et la proportion d'éprouvettes résilientes augmente avec la température.

On remarquera, en outre, que les moyennes des valeurs de la résilience relatives à chaque catégorie (fragile ou résiliente) augmentent légèrement avec la température.

A  $-21^{\circ}$  et à  $-17^{\circ}$ , la bimodalité disparaît et les histogrammes des résiliences sont placés dans une position qui prolonge celles des histogrammes des catégories résilientes obtenues entre  $-41^{\circ}$  et  $-23^{\circ}$ . Il en est de même de l'histogramme des résiliences à  $-12^{\circ}$  basé sur les ruptures de 65 éprouvettes.

A l'autre extrémité de la zone de transition, à  $-50^{\circ}$ , l'histogramme obtenu basé sur 20 éprouvettes M se trouve cette fois dans le prolongement obtenu en extrapolant vers les basses températures les positions des histogrammes des catégories fragiles de la zone de transition.

D'autres caractéristiques mesurables sur l'éprouvette qui sont en corrélation avec la résilience donnent lieu à des résultats semblables et l'aspect de la cassure, visible à l'œil nu ou grossi au moyen d'un appareil de projection, montre d'ailleurs que les résultats obtenus à  $-50^{\circ}$  se rattachent sans discontinuité à la catégorie fragile de la zone de transition, tandis que les résultats obtenus à  $-12^{\circ}$  se rattachent de la même façon à la catégorie résiliente.

#### VARIATION DE LA PROPORTION DES RUPTURES RÉSILIENTES.

Les résultats obtenus sur les deux types d'éprouvettes, classées selon le mode de rupture, sont donnés dans le tableau III. Les figures 5 et 6 montrent que la proportion des ruptures résilientes semble varier avec la température suivant une courbe « en S », fait qui a été confirmé par le test de  $\chi^2$  appliqué aux courbes estimées par la méthode du maximum de vraisemblance.

On trouvera (Tableau III) les estimations des températures de transition et des écarts-types accompagnées de leurs intervalles de confiance à 95 % obtenues par la méthode des probits, et l'estimation de la température de transition obtenue par la méthode de ROBBINS et MONRO.

TABLEAU III  
Méthode des probits

|                   | Nombre<br>d'éprouvettes | Température<br>de transition  | Température<br>de sécurité    | Ecart-type                  |
|-------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Eprouvettes N . . | 106                     | $-31^{\circ}2 \pm 2^{\circ}2$ | $-19^{\circ}8 \pm 3^{\circ}7$ | $6^{\circ}9 \pm 2^{\circ}$  |
| Eprouvettes M . . | 144                     | $-30^{\circ}3 \pm 1^{\circ}8$ | $-20^{\circ}6 \pm 2^{\circ}4$ | $5^{\circ}9 \pm 1^{\circ}4$ |

## Méthode de ROBBINS et MONRO

|                   | Nombre total<br>d'éprouvettes | Température<br>de transition |
|-------------------|-------------------------------|------------------------------|
| Eprouvettes M . . | 25                            | $-33^{\circ} \pm 3^{\circ}$  |

### — Groupe 1.

#### Histogramme des Résiliences.

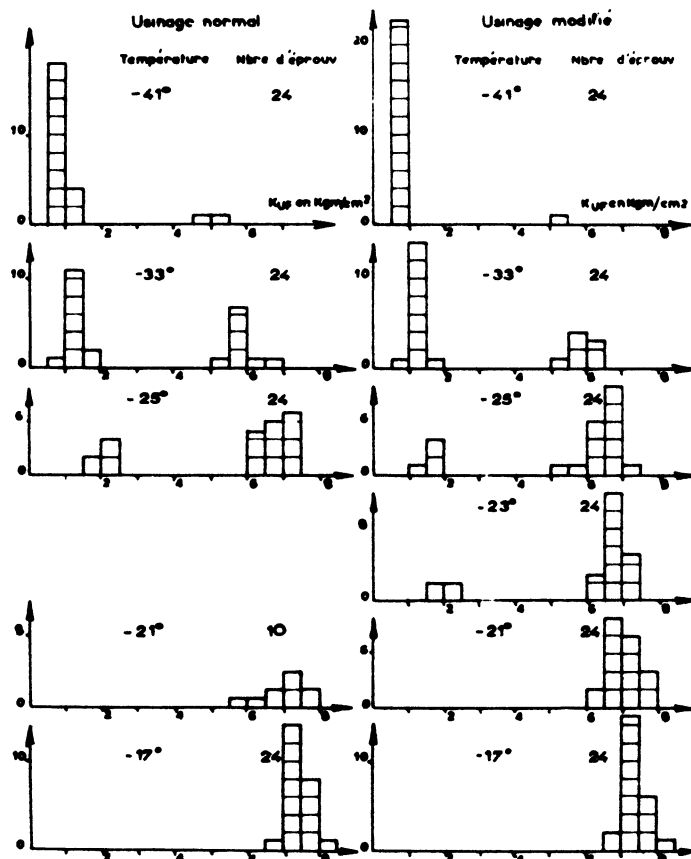


Fig. 7

On notera que les 2 types d'éprouvettes ne diffèrent pas du point de vue de la position et de la forme de leurs courbes « en S » respectives.

### Essais du groupe 4.

L'étude de la forme des distributions de la résilience à des températures inférieures ou supérieures à celles de la zone de transition (à  $-12^{\circ}$  et  $-50^{\circ}$  par exemple) nous a permis de conclure à la normalité.

### Essais du groupe 3.

L'hypothèse de la normalité des distributions relatives à chaque catégorie (fragile ou résiliente) prise séparément est également valable comme le prouvent les anamorphoses galtoniennes des résultats d'essais de 152 éprouvettes M à  $-30^{\circ}$  (figure 9) et les histogrammes (figure 8).

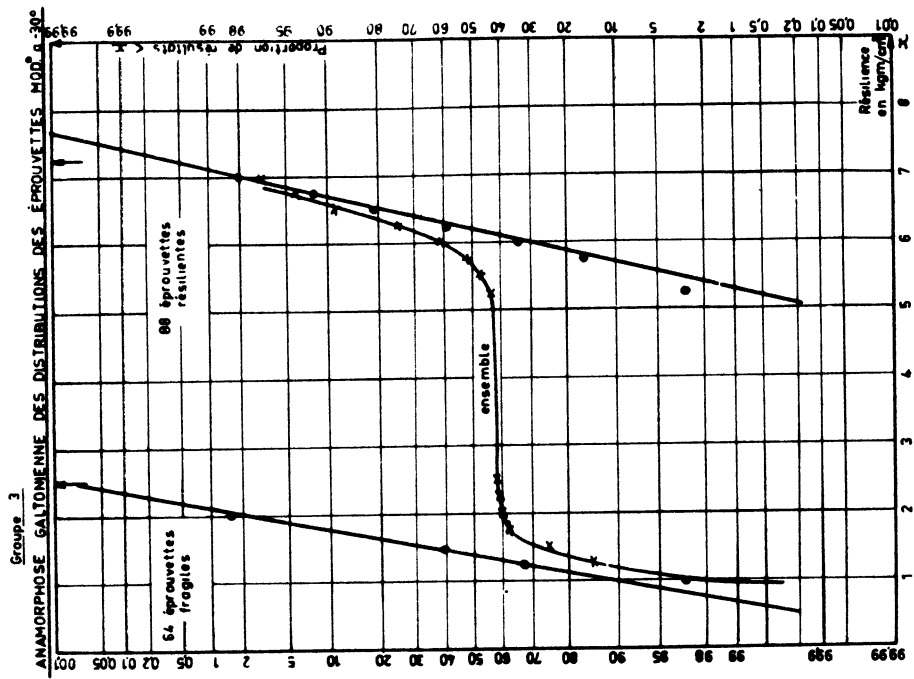


Fig. 9

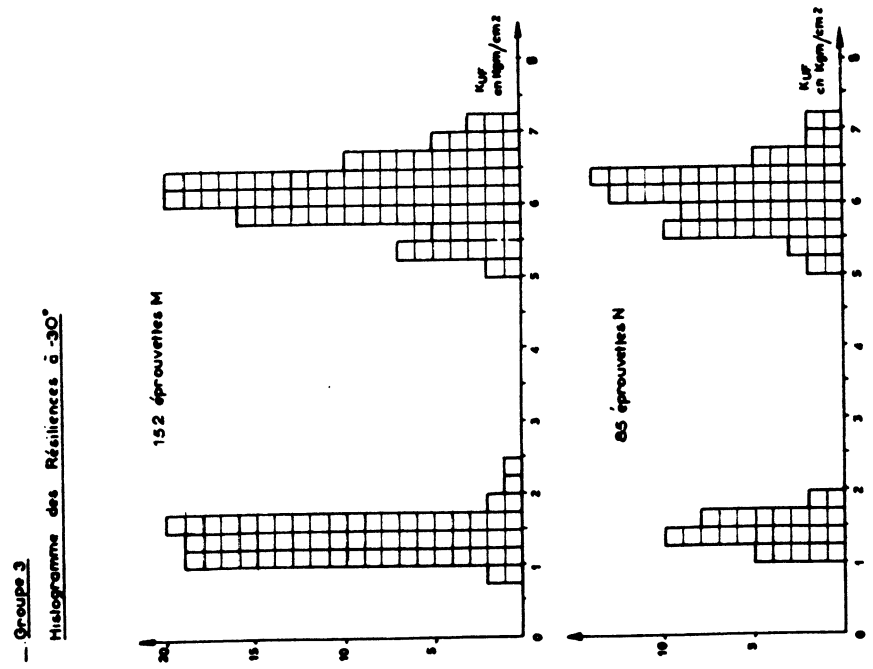


Fig. 8

Il nous a donc été possible de comparer à une même température les moyennes et les dispersions des résiliences des éprouvettes M et N, par les méthodes classiques qui supposent la normalité (tests de Student et de Snédécour).

Aucune des différences entre moyennes n'est significative et la dispersion relative à l'éprouvette modifiée, usinée avec beaucoup moins de soin que l'éprouvette normale, n'est significativement supérieure à celle relative à l'éprouvette normale que dans un seul cas. Cette observation a d'ailleurs été faite dans le domaine fragile où la valeur numérique de la résilience a beaucoup moins d'importance, aux yeux des techniciens, que dans le domaine résilient.

Il est donc possible de conclure que, pour la nuance d'acier étudiée, l'éprouvette M beaucoup plus économique peut être substituée à l'éprouvette classique.

Il va de soi que, sur tous les aciers où l'on peut observer la présence des deux modes de ruptures, ce genre de comparaisons est possible.

## CONCLUSION.

L'étude des distributions de la résilience dans la zone de transition d'un acier Martin doux effervescent nous a permis de conclure à l'existence de deux modes de rupture correspondant aux deux parties des distributions bimodales observées.

La variation de la proportion de ruptures selon l'un quelconque des deux modes a lieu conformément à la courbe « en S » de Galton, intégrale de la courbe « en cloche » de Gauss.

Ces constatations permettent de définir d'une manière précise la zone de transition en position et en étendue au moyen de deux paramètres  $\theta_m$  et  $\sigma$  et d'effectuer des comparaisons statistiques des estimations des températures de transition ou de sécurité.

Il en résulte que des comparaisons objectives entre aciers ou entre types d'éprouvettes deviennent possibles avec une sensibilité connue, fonction du nombre d'éprouvettes utilisées, de la disposition des essais et de la méthode utilisée (Probits ou ROBBINS et MONRO).

Il est possible de remplacer l'éprouvette UF classique par une éprouvette « modifiée » d'un prix de revient 4 à 5 fois moindre.

Nous tenons à remercier le personnel de l'IRSID qui a collaboré à cette étude et à signaler que des résultats tout à fait semblables ont été obtenus indépendamment et à peu près simultanément par MM. WANDERBECK, H. D. WILDE, R. M. LINDSAY et C. DANIEL (1).

Enfin, un compte rendu plus détaillé des études expérimentales a été donné dans l'article de la Revue de Métallurgie : « La température de transition de la résilience des aciers doux » (2).

---

(1) Welding Journal (Juillet 1953). Research supplement, p. 325.

(2) R. BORIONE, J. ULMO, F. BASTENAIRE : Revue de Métallurgie.