RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

PHILIPPE VALLIN

Détermination d’une période économique robuste dans le cadre du modèle de Wilson

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 33, n° 1 (1999), p. 47-67

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1999__33_1_47_0>

RAIRO Rech. Opér.
(vol. 33, n° 1, 1999, pp. 47-67)

DÉTERMINATION D'UNE PÉRIODE ÉCONOMIQUE ROBUSTE DANS LE CADRE DU MODÈLE DE WILSON (*)

par Philippe VALLIN (1)

Communiqué par Pierre TOLLA

Résumé. – *Nous proposons dans cette analyse d'étudier la fréquence optimale d'approvisionnement dans un contexte d'information imprécise. Le calcul classique de la période économique stipule que les paramètres de coûts et de demande sont parfaitement définis. Or, en pratique, cette estimation ponctuelle s'avère difficile, voire impossible. Nous proposons donc une solution généralement non optimale au sens classique, mais correspondant à une politique qui, quelles que soient les valeurs des paramètres économiques, ne s'éloigne pas trop de l'optimum. Le domaine de variations des paramètres traduit l'incertitude de la mesure, il conditionne le choix de la solution.*

Mots clés : Robustesse, période économique de commande, approvisionnement, gestion des stocks.

Abstract. – *This paper presents results about the optimal order interval in a context of fuzzy information about inventory management. The classical inventory model is based on well known cost and demand rate. In practice, this accurate estimation is very difficult to obtain, even impossible. Consequently, we propose a solution, not optimal in a classical sense, but allowing to choose an action which is not far from the optimal policy whatever the economic parameters may be. These parameters belong to a field which represents the error of estimation, this field is important to choose the solution.*

Keywords: Robustness, economic order interval, supply and inventory management.

1. INTRODUCTION

Le modèle classique de base de l'approvisionnement (le modèle dit « de Wilson » en France et à « quantité économique de commande » dans les pays anglo-saxons) permet, sous les hypothèses de régularité de la demande et de constance des paramètres économiques (Tersine, 1994) de calculer la quantité optimale à approvisionner. Puisque la demande par unité de temps est supposée constante et régulière, le calcul de la quantité optimale permet

(*) Reçu en janvier 1996.

(1) LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/99/01/$ 7.00

de déterminer la fréquence d'approvisionnement ou la période entre deux réapprovisionnements. C'est cette fréquence qui est la base de la politique d'approvisionnement dans l'entreprise.

La notion d'optimum se réfère au coût moyen par unité de temps, résultante du coût moyen d'approvisionnement et du coût d'immobilisation du stock constitué par l'approvisionnement cadencé.

En fonction du coût de stockage par unité de temps c_s, du coût de passation de commande c_p et du taux moyen de demande par unité de temps m, la période optimale entre deux approvisionnements, ou deux lancements, par la formule classique (*voir* par exemple Bourdonnais et Vallin, 1995):

$$T^* = \sqrt{\frac{2\,c_p}{mc_s}}$$

Le coût moyen par unité de temps associé à une politique de période T est :

$$g\,(T) = c_p/T + c_s\,m\,T/2.$$

À l'optimum, nous avons $g\,(T^*) = \sqrt{2\,c_s\,mc_p}$.

Nous savons qu'une des faiblesses d'une telle solution est l'incertitude qui règne sur la valorisation des paramètres (*voir* en particulier Lénard, 1995).

Non seulement la mesure reflète l'empirisme du système comptable de l'entreprise mais le concept même est parfois difficile à cerner. Que contient exactement le coût unitaire d'immobilisation du stock? Comment valoriser exactement le coût de passation lorsqu'on profite d'une commande à un fournisseur pour approvisionner plusieurs références en même temps ? Quelle valeur donner à la consommation future?

On rassure l'approvisionneur opérationnel en lui disant que l'optimum est assez plat (Silver et Peterson, 1985, p. 181) et que si l'erreur d'estimation d'un des paramètres est importante – disons 20 % – l'erreur sur T^* ne sera que de 10 % et que le coût ne déviera que de 2 % de la valeur optimale si tant est que cette valeur optimale, qui présuppose l'existence exacte des paramètres, existe.

Comme le soulignent Roy et Bouyssou (1993) dans leur approche de l'analyse robuste, cette étude de sensibilité qui consiste à étudier les variations de la solution en fonction des fluctuations des paramètres autour d'une valeur de référence implicite n'est pas totalement satisfaisante pour le décideur. Si cette analyse évalue les conséquences de tel ou tel choix, elle ne permet pas la prise de décision immédiate.

Il s'avère nécessaire d'inverser la démarche, c'est-à-dire de trouver une valeur de la variable de décision qui soit satisfaisante pour un champ le plus acceptable possible de paramètres.

L'analyse robuste consiste à donner au décideur des recommandations pour la plus large plage de paramètres possible, les limites de cette plage traduisant le champ d'incertitude dans lequel s'insère la décision.

Les recommandations s'appuient sur des conclusions qui seront qualifiées de robustes pour un champ $\boldsymbol{J}$ de paramètres s'il n'existe pas de jeu j de $\boldsymbol{J}$ qui conduise à les rejeter.

Les conclusions sont fondées sur l'analyse des résultats. Dans cet article les résultats sont appelés solutions satisfaisantes. Nous définirons plus précisément la notion de décision satisfaisante ci-dessous.

En pratique, la combinaison des différentes valeurs des paramètres d'un modèle génère un nombre de cas qu'il est impossible d'analyser individuellement dans un délai raisonnable.

Il paraît donc pertinent de choisir un ensemble comportant un nombre restreint de jeux de paramètres, de déterminer la solution satisfaisante, si elle existe, sur cet ensemble. Il est alors intéressant de se demander quel est le plus grand ensemble, au sens de l'inclusion, contenant le jeu de paramètres pour lequel la solution reste satisfaisante.

Après avoir présenté les principales définitions et critères utilisés (section 2), nous déterminerons la solution satisfaisante dans le cas où l'écart par rapport à la solution optimale s'exprime par une mesure relative (écart relatif, section 3) et dans le cas où l'écart absolu est pris comme critère (section 4). Dans la section 5 nous chercherons à déterminer la politique qu'il convient d'adopter quel que soit le critère et le niveau d'incertitude sur la mesure des paramètres économiques. Plus précisément, la sensibilité des différentes solutions sera étudiée en fonction de l'amplitude du champ de paramètres, et la robustesse de différentes solutions sera évaluée.

En conclusion (section 6) nous proposerons la politique qui nous paraît la plus adaptée dans un contexte d'incertitude.

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

2.1. Notations

Dans la suite nous noterons :

$j = (m, c_s, c_p)$ un jeu de paramètres,

$\boldsymbol{J} = \{j\}$ l'ensemble des jeux pris en compte,

$T^* (j)$ la solution optimale pour le jeu de paramètres j,

$R = \{T\}$ un ensemble des choix réalisables pour la période T (variable de décision),

$g (T, j)$ coût de gestion associé à la décision T pour le jeu j.

2.2. Définitions

L'écart relatif pour une décision T réalisable et un jeu j est:

$$D (T, j) = \frac{g (T, j) - g (T^* (j), j)}{g (T^* (j), j)}.$$

L'écart absolu est:

$$D (T, j) = g (T, j) - g (T^* (j), j).$$

Nous appellerons solution satisfaisante sur un ensemble de jeux de paramètres la valeur T_S qui minimise l'écart de coût maximum (le pire cas) sur ces jeux de paramètres. C'est le critère classique du regret maximum proposé par Savage, le regret étant ici l'écart relatif (section 3) ou absolu (section 4).

T_S est, par suite, la solution du problème

$$\underset{T \in R}{\mathrm{Min}} [\underset{j \in J}{\mathrm{Max}} (D (T, j))].$$

Pour ce type de modèle, le jeu de paramètres qui est *a priori* un triplet $j = (m, c_s, c_p)$ peut se résumer à un couple:

$$\alpha = \sqrt{2\, c_p} \qquad \text{et} \qquad \beta = \sqrt{m c_s}$$

c_p: est le coût de passation,

$m c_s / 2$: peut s'interpréter comme le coût de stockage d'un stock permettant de couvrir la demande pendant une unité de temps.

$$T^* \text{ s'exprime par } T^* = \alpha / \beta ; \tag{1}$$
$$g (T^* (j), j) = \alpha \beta ;$$
$$g (T, j) = 1/2 (\alpha^2 / T + T \beta^2)$$

3. CAS DE L'ÉCART RELATIF

L'écart relatif de coût, $D (T, J)$ peut donc s'exprimer uniquement en fonction de α, β et de T évidemment.

3.1. Expression de $D(T, J)$ en fonction de α et β : $D(T, \alpha, \beta)$

$D(T, \alpha, \beta)$ ne dépend que du rapport α/β.

En effet,

$$D(T, \alpha, \beta) = \frac{1/2\,(\alpha^2/T + T\,\beta^2) - \alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$= D(T, \alpha/\beta) = 1/2\,[T/(\alpha/\beta) + (\alpha/\beta)/T - 2]. \quad (2)$$

Un jeu de paramètres se résume donc à un seul point, la valeur du rapport α/β. La combinatoire des jeux de paramètres se réduit fortement.

L'ensemble J des jeux de paramètres à étudier est donc contenu dans un intervalle.

Bien que la solution optimale T^* soit fonction (calculé à partir) des paramètres α et β la relation (1) nous incite, par abus de langage, à définir J comme un intervalle de valeurs de T^* : $[T^*\,\min ; T^*\,\max]$.

$T^*\,\min$ et $T^*\,\max$ sont calculables à partir de J, ensemble de jeux de paramètres. $T^*_{\min} = \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\max}}$; $T^*_{\max} = \frac{\alpha_{\max}}{\beta_{\min}}$ où $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$, $\alpha_{\max}$, $\beta_{\max}$ sont respectivement les valeurs minimales et maximales que peuvent prendre les paramètres α et β sur J.

Nous noterons désormais $D(T, j)$ par $D(T, T^*)$. D'après la relation (1),

$$D(T, T^*) = 1/2\,(T/T^* + T^*/T - 2). \quad (3)$$

***D*(*T*, *T**) représente l'écart relatif de coût lorsqu'on prend la décision *T* dans un univers où *T** aurait été optimale** (au sens de la quantité économique).

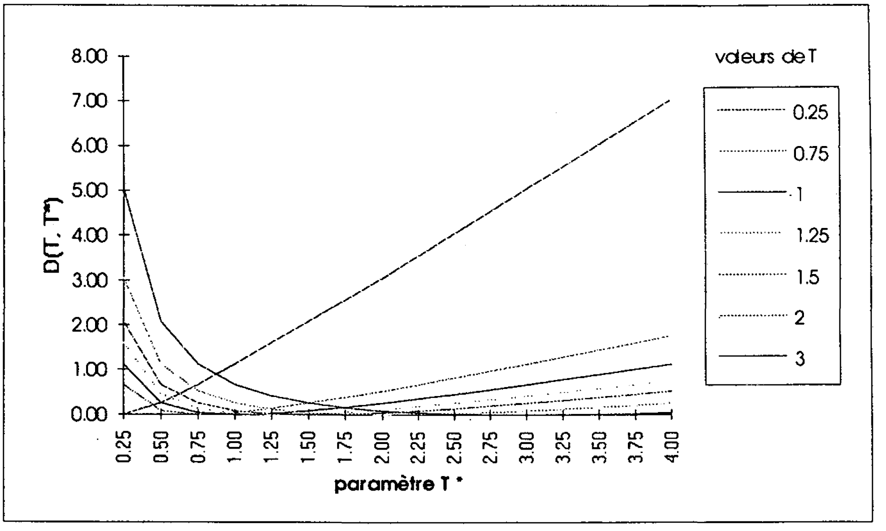
Lorsque $T = T^*$, $D(T, T^*) = 0$ évidemment.

3.2. Résultat n° 1

Pour un ensemble *R* d'actions réalisables donné, si T_S est une solution satisfaisante sur l'ensemble des deux points $J_0 = \{T^*\min, T^*\max\}$ alors T_S est satisfaisante pour l'intervalle $J = [T^*\min, T^*\max]$.

Le graphique ci-après présente l'écart de coût pour une solution T choisie en fonction du paramètre T^*. La solution satisafisante T_S correspond à la courbe dont le maximum sur T^* est le plus petit possible.

Parmi les valeurs de T présentées, $T = 1$ correspond à la courbe dont le maximum est le plus faible.



Graphique 1. – Famille des courbes $D(T, T^*)$ paramétrées par T.

Démonstration du résultat n° 1 :

Remarque préliminaire: une fonction convexe définie sur un ensemble convexe est continue et atteint son maximum sur la frontière de son domaine de définition.

Dans la suite nous supposerons que J, l'ensemble des jeux de paramètres est un ensemble convexe. Notre analyse peut toujours faire intervenir la fermeture convexe de J.

Par hypothèse T_S est satisfaisante sur J_0, donc T_S est solution de

$$\underset{T \in R}{\text{Min}} [\text{Max } (D(T, T^* \min) ; D(T, T^* \max))].$$

Or, pour tout T donné de R, $D(T, T^*)$ est une fonction convexe et continue de T^*, il s'ensuit que:

$$D(T, T^*) \leq \text{Max}[D(T, T\min) ; D(T, T\max)]$$

d'où

$$\underset{T^* \in J}{\text{Max}} D(T, T^*) = \text{Max}[D(T, T\min) ; D(T, T\max)].$$

La fonction $D(T, T^*)$ prend son maximum en T^* sur les bords de l'intervalle J pour T fixé et Ts est solution de $\text{Min}_{T \in R} [\text{Max}_{T^* \in J} (D(T, T^*))]$ donc satisfaisante pour J.

En conclusion, trouver une solution satisfaisante pour un ensemble de paramètres revient à trouver une solution satisfaisante pour deux jeux extrêmes de paramètres.

En revenant aux paramètres économiques et logistiques initiaux, il suffit de tester que Ts est satisfaisante pour les deux jeux :

$$j_{\min} = \{c_p \text{ minimum}, m \text{ maximum}, cs \text{ maximum}\}$$

et

$$j_{\max} = \{c_p \text{ maximum}, m \text{ minimum}, cs \text{ minimum}\}$$

puisque ces deux jeux nous conduisent à T^* min et T^* max.

Exemple numérique : l'ensemble des jeux de paramètres est composé de 9 jeux exprimés en fonction de mc_s et c_p,

l'ensemble des T réalisables est 3, 4, 5 et 6.

Pour déterminer la solution Ts, il suffit d'étudier uniquement les lignes 3 ($T^* = 6.5$) et 7 ($T^* = 2.5$).

La solution satisfaisante correspond à la colonne du tableau des écarts de coûts relatifs qui présente le maximum le plus faible, colonne correspondant à $T = 4$.

mc_s	c_p	T^*	$T =$ 3	$T =$ 4	$T =$ 5	$T =$ 6		
12.80	100	4.0	0.04	0.00	0.03	0.09		
12.80	200	5.6	0.20	0.06	0.01	0.00		
12.80	***270***	***6.5***	***0.31***	***0.12***	***0.03***	***0.00***		
20.00	100	3.2	0.00	0.03	0.11	0.21		
20.00	200	4.5	0.08	0.01	0.01	0.04		
20.00	270	5.2	0.15	0.03	0.00	0.01		
31.35	***100***	***2.5***	***0.01***	***0.11***	***0.24***	***0.40***		
31.35	200	3.6	0.02	0.01	0.06	0.14		
31.35	270	4.2	0.05	0.00	0.02	0.07		
	Max(D(T,T*) T*		0.31	0.12	0.24	0.40	**Ts =**	**4**

T*max 6.5

T*min 2.5

3.3. Résultat n° 2

Pour le critère de l'écart relatif, dans le cas où R est continu, la solution satisfaisante T_r pour un ensemble $Jo = \{T^*\min, T^*\max\}$ de

paramètres, est donnée par l'expression :

$$Tr = \sqrt{T^* \min T^* \max}$$

Tr est moyenne géométrique des deux valeurs extrêmes des solutions optimales classiques calculées sur J.

Hypothèse HR : Faisons l'hypothèse que l'ensemble R des décisions réalisables contient $J = [T^* \min, T^* \max]$. En dehors de toute contrainte sur R, cette hypothèse n'est pas très restrictive, elle traduit simplement la cohérence entre l'ensemble des paramètres et le choix des décisions possibles.

Soit Tr la décision caractérisée par $D(Tr, T^* \min) = D(Tr, T^* \max)$ alors :

- $Tr = \sqrt{T^* \min T^* \max}$

$$D(Tr, T^* \min) = D(Tr, T^* \max) = \frac{T^* \max + T^* \min}{2\sqrt{T^* \min T^* \max}} - 1 = D(J)$$

- Tr est solution satisfaisante, elle appartient à R

Tr est solution satisfaisante, car quel que soit $T \neq Tr$, $\mathrm{Max}\{D(T, T^* \min); D(T, T^* \max)\} > D(J)$.

Démonstration :

Montrons que

$$D(T, T^* \min) > D(Tr, T^* \min) = D(J) \quad \text{pour tout } T > Tr \qquad \text{(i)}$$

$$D(T, T^* \max) > D(Tr, T^* \max) = D(J) \quad \text{pour tout } T < Tr. \qquad \text{(ii)}$$

D'après (3) : $2D(T, T^* \min) = (T/T^* \min + T^* \min / T - 2)$.

Cette fonction de T, définie et dérivable sur $T > 0$, est strictement croissante en T pour $T > T^* \min$.

Sa dérivée, $D'(T, T^* \min) = 1/T^* \min - T^* \min / T^2$ est strictement positive.

Donc puisque $T > Tr > T^* \min$ la propriété (i) est vérifiée.

De même $D(T, T^* \max)$ est décroissante pour tout $T < T^* \max$ d'où (ii) puisque $Tr < T^* \max$.

Pour l'exemple numérique étudié plus haut : $T_r = \sqrt{2,5 \times 6,5} = 4$.

En pratique, cette approche nous semble intéressante. Lors de la mise en place d'une politique d'approvisionnement, les gestionnaires expriment quelques difficultés à valoriser le coût de lancement et encore plus le coût d'immobilisation dont la définition n'est, dans la majorité des cas, pas très bien cernée.

En revanche, un praticien sera capable de donner des bornes extrêmes raisonnables de la fréquence d'approvisionnement. Par exemple, il dira qu'il est absurde de commander plus fréquemment qu'une fois par semaine et qu'un approvisionnement supérieur à 2 mois de consommation génère trop de stock.

La solution satisfaisante T_r est alors $\sqrt{1 \times 8,6} \approx 3$ semaines (sur la base de 4,3 semaines par mois).

Remarques :

T_r, moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique $(T^* \max + T^* \min)/2$, l'écart étant d'autant plus sensible que l'amplitude est importante, ce résultat devrait faire plaisir aux inconditionnels des flux tendus.

T_r dépend de $T^* \min$ et de $T^* \max$, dans le cas où $T^* \min = T^* \max$, cas où les jeux de paramètres ne conduisent à aucune ambiguité sur T^* alors $T_r = T^*$, on retrouve le résultat classique.

Si T_r est solution satisfaisante pour le couple ($T^* \min$, $T^* \max$), elle n'est pas nécessairement satisfaisante pour le couple ($T^{*\prime} \min$, $T^{*\prime} \max$) même si $[T^{*\prime} \min, T^{*\prime} \max] \subset [T^* \min, T^* \max]$. Toute information supplémentaire permet de modifier T_r.

Par exemple, en reprenant le contexte du paragraphe 3.2, supposons qu'à la suite d'une analyse plus précise on estime la borne inférieure du coût de passation c_p à 200 et non 100 unités monétaires, la borne supérieure restant inchangée. Dans ce cas les nouvelles valeurs des périodicités extrêmes sont $T^{*\prime} \max = T^* \max = 6,5$ et $T^{*\prime} \min = 3,6 > T^* \min$. La nouvelle valeur de T_r est 4,8 (au lieu de 4,0). L'information supplémentaire sur le coût de passation (l'amplitude d'indétermination est réduite de 60 %) permet de réajuster T_r qui augmente de 20 %.

4. CAS DE L'ÉCART ABSOLU

Nous reprenons la même démarche en prenant comme critère l'écart absolu défini par :

$$D(T, j) = g(T, j) - g(T^*(j), j).$$

Nous conserverons les mêmes notations que dans la partie précédente.

En fonction de α et β le critère devient

$$D(T;\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(\alpha^2/T+T\beta^2-2\alpha\beta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}}-\beta\sqrt{T}\right)^2.$$

Il dépend maintenant de deux paramètres indépendants,

$$\alpha\in[\alpha\min,\ \alpha\max]=I\alpha;\qquad \beta\in[\beta\min,\ \beta\max]=I\beta.$$

L'ensemble des jeux de paramètres $\boldsymbol{J}$ est $\boldsymbol{J}=I\alpha\times I\beta$.

4.1. Résultat n° 3

Pour un ensemble *R* d'actions réalisables donné, si *Ts* est une solution satisfaisante sur l'ensemble des deux points *Jo* = $\{T^*\min,\ T^*\max\}$ alors *Ts* est satisfaisante pour le rectangle *J* = $I\alpha\times I\beta$.

Démonstration: Pour T fixé $D(T;\alpha,\beta)$ est une fonction convexe en α et β comme composition d'une fonction linéaire en α et β et d'une fonction convexe (x^2). $D(T;\alpha,\beta)$ prend donc sa valeur maximum sur le bord de $\boldsymbol{J}$, plus précisément

soit sur le point $j_1=(\alpha\max,\ \beta\min)$,

soit sur le point $j_2=(\alpha\min,\ \beta\max)$.

Comme dans la première partie, par abus de langage nous appellerons respectivement j_1 et j_2 les points $T^*\max$ et $T^*\min$ compte tenu de la relation (1). Bien que T^* ne dépende que du rapport α/β, seuls les points j_1 et j_2 de $\boldsymbol{J}$ conduisent aux valeurs $T^*\max$ et $T^*\min$.

Nous avons donc pour tout T de R la relation:

$$\operatorname*{Max}_{j\in J}(D(T,j))=\operatorname{Max}[D(T,T^*\min);D(T,T^*\max)].$$

4.2. Résultat n° 4

Pour le critère de l'écart absolu, dans le cas où *R* est continu, la solution satisfaisante *Ta* pour un ensemble *Jo* = $\{T^*\min,\ T^*\max\}$ de paramètres est donnée par l'expression:

$$Ta=\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{\beta_{\max}+\beta_{\min}}=\frac{(\alpha_{\max}+\alpha_{\min})/2}{(\beta_{\max}+\beta_{\min})/2}.$$

Cette solution n'est pas très éloignée de la solution optimale calculée sur la moyenne des paramètres extrémaux (*cf.* paragraphe 5), ce que fait sans doute l'« approvisionneur moyen » sans savoir qu'il obtient ainsi une solution robuste pour le critère de l'écart absolu.

Démonstration : Sous l'hypothèse HR,

$$Ta = (\alpha \max + \alpha \min)/(\beta \max + \beta \min)$$

est élément de R car on a clairement $T^* \min < Ta < T^* \max$.

Montrons que Ta est solution satisfaisante pour ***Jo*** donc pour ***J***.

Comme dans le développement précédent nous avons l'égalité :

$$D(Ta, T^* \max) = D(Ta, T^* \min) = D(J)$$

car Ta est solution de l'équation

$$\frac{\alpha_{\max}}{\sqrt{T}} - \beta_{\min}\sqrt{T} = -\left(\frac{\alpha_{\min}}{\sqrt{T}} - \beta_{\max}\sqrt{T}\right).$$

Montrons, ici encore que :

$$D(T, T^* \min) > D(Ta, T^* \min) = D(J) \quad \text{pour tout } T > Ta \quad \text{(i)}$$

$$D(T, T^* \max) > D(Ta, T^* \max) = D(J) \quad \text{pour tout } T < Ta \quad \text{(ii)}$$

$D(T, T^* \max) = 1/2((\alpha_{\max}/\sqrt{T}) - \beta_{\min}\sqrt{T})^2$ est une fonction décroissante de T tant que $((\alpha_{\max}/\sqrt{T}) - \beta_{\min}\sqrt{T}) > 0$ donc tant que $T < T^* \max$ et *a fortiori* pour $T < Ta$ d'où la relation (ii).

De même, $D(T, T^* \min)$ est une fonction croissante pour

$$T > Ta > T^* \min \text{ d'où (i)}.$$

Donc Ta n'est jamais dominée par une quelconque solution T sur Jo, Ta est donc solution satisfaisante.

Remarque : On peut également prouver que cette solution est inférieure à $1/2(T^* \min + T^* \max)$.

En effet, compte tenu de la positivité des coefficients, la relation

$$Ta = (\alpha_{\max} + \alpha_{\min})/(\beta_{\max} + \beta_{\min}) \leq 1/2(\alpha_{\min}/\beta_{\max} + \alpha_{\max}/\beta_{\min})$$

est équivalente à

$$2(\alpha_{\max} + \alpha_{\min})\beta_{\max}\beta_{\min} \leq (\alpha_{\min}\beta_{\min} + \alpha_{\max}\beta_{\max})(\beta_{\max} + \beta_{\min}),$$

soit

$$\alpha_{\min}\beta_{\min}(\beta_{\max} - \beta_{\min}) \leq \alpha_{\max}\beta_{\max}(\beta_{\max} - \beta_{\min})$$

relation toujours vérifiée puisque par définition

$$\alpha_{\min} \leq \alpha_{\max} \qquad \text{et} \qquad \beta_{\min} \leq \beta_{\max}.$$

5. RECOMMANDATION POUR LE CHOIX D'UNE PÉRIODICITÉ D'APPROVISIONNEMENT

Dans un contexte d'information imprécise, le gestionnaire peut choisir entre différentes formules de fréquence d'approvisionnement. Dans cette section nous analysons l'impact des principales politiques en termes de sensibilité par rapport à l'imprécision des paramètres économiques et à l'incertitude sur l'adéquation des critères au problème posé. En définitive nous recommandons le choix de la politique Tr qui apparaît la plus robuste.

5.1. Périodicités prises en compte

Nous nous intéressons dans la suite aux conséquences du choix de périodes caractéristiques sur les deux critères (relatif et absolu) que nous avons étudiés précédemment.

Les périodes qui nous paraissent caractéristiques sont, pour un jeu de paramètres $J = I\alpha \times I\beta$:

T^* min et T^* max, les deux périodes extrêmes,

$Tm = (T^* \min + T^* \max)/2$, la périodicité moyenne,

$Tc = \sqrt{((\alpha_{\min}^2 + \alpha_{\max}^2)/2)/((\beta_{\min}^2 + \beta_{\max}^2)/2)}$, qui représente la valeur de T calculée en prenant la valeur moyenne, centrée, de chaque paramètre c_p et mc_s,

Ta: solution satisfaisante pour le critère absolu (*cf.* 4),

Tr: solution satisfaisante pour le critère relatif (*cf.* 3).

Nous étudions dans la suite l'évolution relative de ces périodes et la variation des valeurs des critères en fonction de l'incertitude qui pèse sur l'évaluation des paramètres.

5.2. Expression des périodes en fonction de l'incertitude des paramètres

Traduisons l'incertitude de mesure des paramètres α et β par deux coefficients $\rho \geq 1$ et $\mu \geq 1$ qui caractérisent l'amplitude de l'intervalle dans lequel se situent ces deux paramètres. Nous poserons:

$$\alpha_{\max} = \rho\alpha_{\min} \qquad \text{et} \qquad \beta_{\max} = \mu\beta_{\min}.$$

En fonction des deux bornes minima et des coefficients ρ et μ les périodes retenues ci-dessus s'expriment par:

$$T_{\max} = \varphi \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}}$$

$$T_{\min} = \frac{1}{\mu} \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}}$$

$$T_r = \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

$$T_a = \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}} \sqrt{\frac{1+\varphi}{1+\mu}}$$

$$T_m = \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}} \left(\varphi + \frac{1}{\mu}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$T_c = \frac{\alpha_{\min}}{\beta_{\min}} \sqrt{\frac{1+\varphi^2}{1+\mu^2}}$$

Remarquons que pour un rapport $\alpha_{\min}/\beta_{\min}$ fixé les périodes ne dépendent que des ratios d'incertitudes ρ et μ. La solution T_r, ne dépend que du rapport des deux coefficients. C'est-à-dire que T_r ne dépend pas de l'incertitude proprement dite mais de l'incertitude relative des deux coefficients.

5.3. Résultat n° 5

Seul un rapport d'incertitude $\neq 1$ conduit à des périodicités différentes.

***T_r* n'est pas très sensible aux variations de ce rapport.**

Si $\rho = \mu = 1$ toutes ces périodes sont égales puisqu'il n'y a pas d'incertitudes sur la valeur des paramètres, on retrouve le modèle classique.

Si $\rho = \mu$, $Tr = Ta = Tc$, un même coefficient d'incertitude conduit à adopter la même politique quel que soit le critère;

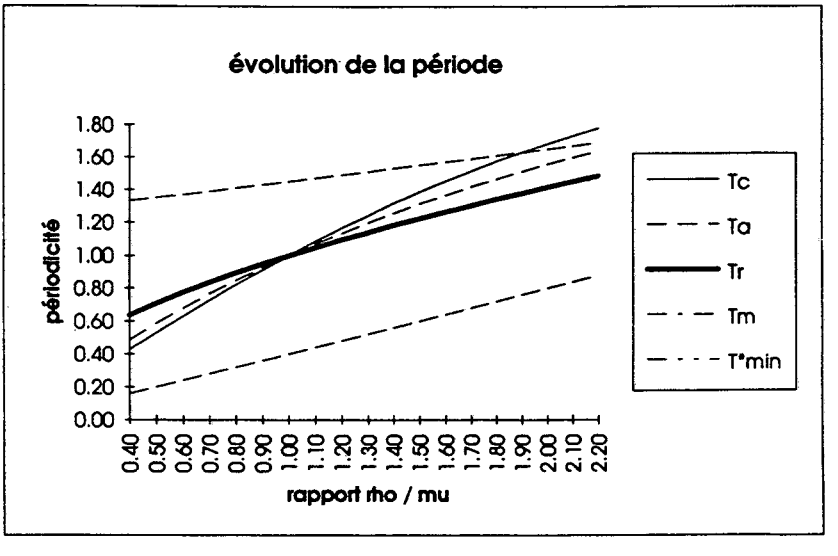
si $\mu > \rho$ alors $T_c < T_a < T_r$ et si $\mu < \rho$ alors $T_c > T_a > T_r$.

D'autre part nous avons vu que T_m est toujours un majorant de T_a et T_r.

Dans les graphiques 2 et 3 suivants sont présentées les évolutions des différentes périodes en fonction du rapport ρ/μ, le rapport $\alpha_{\min}/\beta_{\min}$ étant conventionnellement fixé à 1.

ρ = 2.5

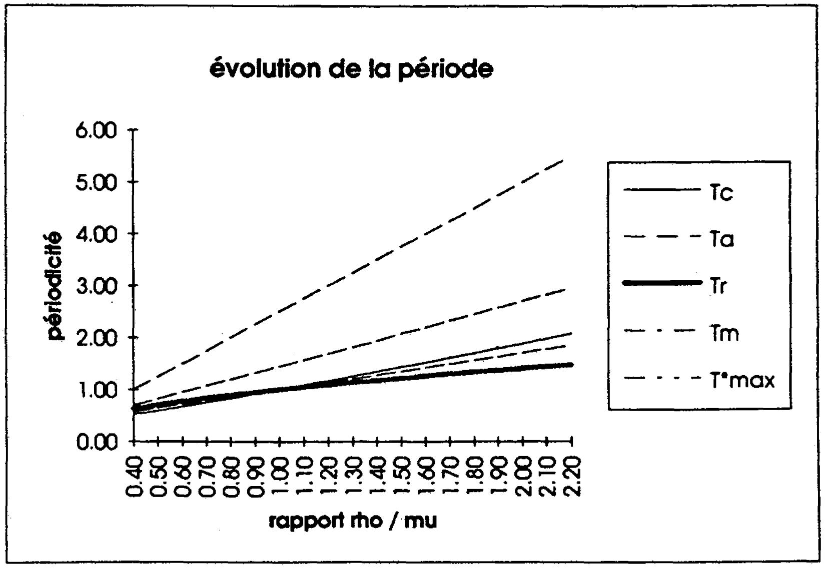
ρ / μ	Tc	Ta	Tr	Tm	T*min	μ
0.40	0.43	0.48	0.63	1.33	0.16	6.25
0.50	0.53	0.58	0.71	1.35	0.20	5.00
0.60	0.63	0.68	0.77	1.37	0.24	4.17
0.70	0.73	0.77	0.84	1.39	0.28	3.57
0.80	0.82	0.85	0.89	1.41	0.32	3.13
0.90	0.91	0.93	0.95	1.43	0.36	2.78
1.00	1.00	1.00	1.00	1.45	0.40	2.50
1.10	1.08	1.07	1.05	1.47	0.44	2.27
1.20	1.17	1.14	1.10	1.49	0.48	2.08
1.30	1.24	1.20	1.14	1.51	0.52	1.92
1.40	1.32	1.26	1.18	1.53	0.56	1.79
1.50	1.39	1.31	1.22	1.55	0.60	1.67
1.60	1.45	1.37	1.26	1.57	0.64	1.56
1.70	1.51	1.42	1.30	1.59	0.68	1.47
1.80	1.57	1.47	1.34	1.61	0.72	1.39
1.90	1.63	1.51	1.38	1.63	0.76	1.32
2.00	1.68	1.56	1.41	1.65	0.80	1.25
2.10	1.73	1.60	1.45	1.67	0.84	1.19
2.20	1.78	1.64	1.48	1.69	0.88	1.14



Graphique 2. – Évolution des différentes périodicités en fonction du rapport d'incertitude ρ/μ pour une valeur de ρ fixée (à 2,5).

$\mu =$ 2.5

ρ / μ	Tc	Ta	Tr	Tm	T*max
0.40	0.53	0.57	0.63	0.70	1.00
0.50	0.59	0.64	0.71	0.83	1.25
0.60	0.67	0.71	0.77	0.95	1.50
0.70	0.75	0.79	0.84	1.08	1.75
0.80	0.83	0.86	0.89	1.20	2.00
0.90	0.91	0.93	0.95	1.33	2.25
1.00	1.00	1.00	1.00	1.45	2.50
1.10	1.09	1.07	1.05	1.58	2.75
1.20	1.17	1.14	1.10	1.70	3.00
1.30	1.26	1.21	1.14	1.83	3.25
1.40	1.35	1.29	1.18	1.95	3.50
1.50	1.44	1.36	1.22	2.08	3.75
1.60	1.53	1.43	1.26	2.20	4.00
1.70	1.62	1.50	1.30	2.33	4.25
1.80	1.71	1.57	1.34	2.45	4.50
1.90	1.80	1.64	1.38	2.58	4.75
2.00	1.89	1.71	1.41	2.70	5.00
2.10	1.98	1.79	1.45	2.83	5.25
2.20	2.08	1.86	1.48	2.95	5.50



Graphique 3. – Évolution des différentes périodicités en fonction du rapport d'incertitude ρ/μ pour une valeur de μ fixée (à 2,5).

Cette analyse confirme que parmi les périodicités T_c, T_a, T_r, qui s'avèreront les moins risquées (*cf.* paragraphe 5.4), c'est la périodicité T_r qui se révèle la moins sensible à la variation du rapport d'incertitudes sur les paramètres du modèle. Pour une variation du rapport ρ/μ de 5,5 la période T_r ne varie que dans un rapport de l'ordre du double (2,3).

5.4. Impact d'un mauvais choix sur les critères d'écart de coûts relatif ou absolu

Résultat n° 6 : Parmi les périodicités qui dégradent le moins les deux critères, T_r apparaît comme la solution la plus robuste.

Nous avons étudié dans les parties 3 et 4 deux critères permettant d'évaluer la pertinence d'une périodicité choisie T dans un contexte où le coût de gestion dépend de paramètres économiques dont les évaluations sont imprécises.

Ces critères étaient fondés sur l'écart de coût maximum (le pire cas) entre le coût optimal obtenu si on dispose d'une information parfaite (en utilisant donc la périodicité optimale) et le coût obtenu en choisissant la périodicité T. Deux cas ont été étudiés selon que cet écart est exprimé en valeur absolue ou relative. Nous avons montré que pour chaque cas il existait une solution appelée « satisfaisante » qui minimise le pire cas, c'est-à-dire l'écart maximum obtenu lorsque les paramètres varient dans leur intervalle d'incertitude.

Il est difficile de trancher entre la notion d'écart relatif ou absolu, la pertinence de cette mesure dépend du niveau des coûts mis en jeu et du poids de ces coûts dans le contexte économique géré. Il nous paraît donc pertinent d'étudier les conséquences du choix quel que soit le critère pris comme référence.

Nous proposons dans cette section de mesurer le risque encouru en choisissant l'une des périodes ci-dessus pour chacun des critères (absolu ou relatif) en fonction de l'amplitude du champ de décision possible mesurée par le rapport $T^* \max / T^* \min$.

Évidemment, le risque est minimum pour la solution « satisfaisante » appropriée au critère correspondant, mais le choix de T_a pour le critère relatif (pour lequel T_r est satisfaisante) est-il acceptable ou non ?

Nous noterons respectivement $Da\,(T\,;\alpha,\ \beta)$ et $Dr\,(T,\ T^*)$ l'écart de coût absolu et relatif calculé pour une périodicité choisie T et un jeu de paramètres

α, β ou $T^* = \alpha/\beta$. D'après ce qui précède:

$$Dr(T, T^*) = 1/2\,(T/T^* + T^*/T - 2)$$

$$Da(T\,; \alpha, \beta) = 1/2\,\alpha\beta\,(T/T^* + T^*/T - 2).$$

Les analyses des paragraphes 3 et 4 montrent que pour T donné le maximum de Da ou Dr est atteint pour T^* min ou T^* max.

Plus précisément,

si $T > Tr$ (resp. $T < Tr$) alors Dr atteint son maximum pour $T^* = T^*\min$ (resp. $T^* = T^*\max$).

si $T > Ta$ (resp. $T < Ta$) alors Da atteint son maximum pour $T^* = T^*\min$ (resp. $T^* = T^*\max$).

Expression du maximum de Da pour $T = Tr$, $T = Tm$, $T = T^*\max$, $T = Ta$, $T = Tc$.

Étudions le cas $\mu > \rho$, alors d'après 5.2.

a) $Tr > Ta$, le maximum de $Da(Tr, T^*)$ est donc atteint pour $T^* = T^*\min$, il s'exprime en fonction de $T^*\max/T^*\min$ par:

$$Da(Tr, T^*\min) = \alpha_{\min}\,\beta_{\max}\left(\sqrt{\frac{T^*\min}{T^*\max}} + \sqrt{\frac{T^*\max}{T^*\min}} - 2\right) \times \frac{1}{2}.$$

b) $Tm > Ta$, le maximum de $Da(Tm, T^*)$ est donc atteint pour $T^* = T^*\min$, il s'exprime en fonction de $T^*\max/T^*\min$ par:

$$\begin{aligned} Da(Tm, T^*\min) = {} & \alpha_{\min}\,\beta_{\max} \\ & \times \left(\frac{1 + (T^*\max/T^*\min)}{2}\right. \\ & \left. + \frac{2}{1 + (T^*\max/T^*\min)} - 2\right) \times \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) $T^*\max > Ta$, le maximum de $Da(T^*\max, T^*)$ est donc atteint pour $T^* = T^*\min$, il s'exprime en fonction de $T^*\max/T^*\min$ par:

$$\begin{aligned} Da(T^*\max, T^*\min) = {} & \alpha_{\min}\,\beta_{\max} \\ & \times \left(\frac{T^*\min}{T^*\max} + \frac{T^*\max}{T^*\min} - 2\right) \times \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) Pour $T = Ta$, le maximum est atteint indifféremment pour T^* min ou T^* max. $Ta = T^*\max.\,(1 + (1/\rho))/(1 + \mu)$; $Da(Ta, T^*\min)$ s'exprime alors non seulement en fonction du rapport $T^* \max / T^* \min$ mais également en fonction de μ/ρ (puisque $T^* \max / T^* \min = \mu\rho$).

Dans l'expression numérique nous avons choisi $\mu/\rho = 1,5$; l'incertitude relative sur le coût de stockage de couverture est plus importante que celle liée à la passation de commande.

e) $Tc < Ta$, le maximum de $Da(Tc, T^*)$ est donc atteint pour $T^* = T^* \max$. En exprimant Tc en fonction de $T^* \min$,

$$Tc = T^*_{\min} \times \sqrt{\frac{1+\rho^2}{1+1/\mu^2}},$$

le maximum de Da s'exprime en fonction du rapport $T^* \max / T^* \min$ mais, ici aussi, en fonction du rapport μ/ρ.

Le tableau et graphique 4 présentent l'évolution de Da maximum pour différentes périodicités. Il est supposé que le choix des unités des paramètres est tel que $\alpha_{\min} \beta_{\max} = 1$. Dans ce cas, $Da(T, T^* \min) = Dr(T, T^* \min)$.

Les trois périodicités Tr, Ta, Tc ont des performances comparables même pour des valeurs extrêmes telles que $T^* \max / T^* \min = 6$. En pratique ce rapport devrait rester inférieur à 3, Tr et Tc ont alors des performances équivalentes.

Le tableau et graphique 5 présentent l'évolution de Dr maximum pour les différentes périodicités. Ici encore on retrouve les trois périodicités dominantes Tr évidemment, suivie de Ta puis de Tc. Notons que pour la plage $T^* \max / T^* \min < 3$, Tr se dégrade moins pour le critère Da que Ta pour le critère Dr.

6. CONCLUSION

Dans le cadre du modèle classique de la recherche de la périodicité économique (modèle de Wilson), il semble intéressant de tenir compte dans le choix de la fréquence d'approvisionnement de l'incertitude des données de base. Nous avons vu que pour trouver une solution qui réduit le risque d'un mauvais choix, il suffit d'étudier les deux solutions extrêmes. Pour des raisons d'efficacité, de stabilité, de ressources en information et de simplicité de calcul, nous proposons de choisir comme périodicité d'approvisionnement :

$$Tr = \sqrt{T^* \min \times T^* \max}.$$

Cette politique est « satisfaisante » pour le critère de l'écart relatif. Elle ne s'écarte pas sensiblement de la solution « satisfaisante » du critère de l'écart

Tmax / Tmin	Da(Tr, T*min)	Da(Tmax, T*min)	Da(Tm, T*min)	Da(Tc, T*max)	Da(Ta, T*min)
1.00	0.00	0.00	0		
1.25	0.01	0.02	0.01		
1.50	0.02	0.08	0.02	0.02	0.02
1.75	0.04	0.16	0.05	0.04	0.03
2.00	0.06	0.25	0.08	0.06	0.05
2.25	0.08	0.35	0.12	0.08	0.07
2.50	0.11	0.45	0.16	0.10	0.09
2.75	0.13	0.56	0.20	0.12	0.11
3.00	0.15	0.67	0.25	0.15	0.13
3.25	0.18	0.78	0.30	0.17	0.14
3.50	0.20	0.89	0.35	0.19	0.16
3.75	0.23	1.01	0.40	0.21	0.18
4.00	0.25	1.13	0.45	0.23	0.20
4.25	0.27	1.24	0.50	0.25	0.22
4.50	0.30	1.36	0.56	0.28	0.24
4.75	0.32	1.48	0.61	0.30	0.26
5.00	0.34	1.60	0.67	0.32	0.28
5.25	0.36	1.72	0.72	0.34	0.29
5.50	0.39	1.84	0.78	0.36	0.31
5.75	0.41	1.96	0.84	0.37	0.33
6.00	0.43	2.08	0.89	0.39	0.35

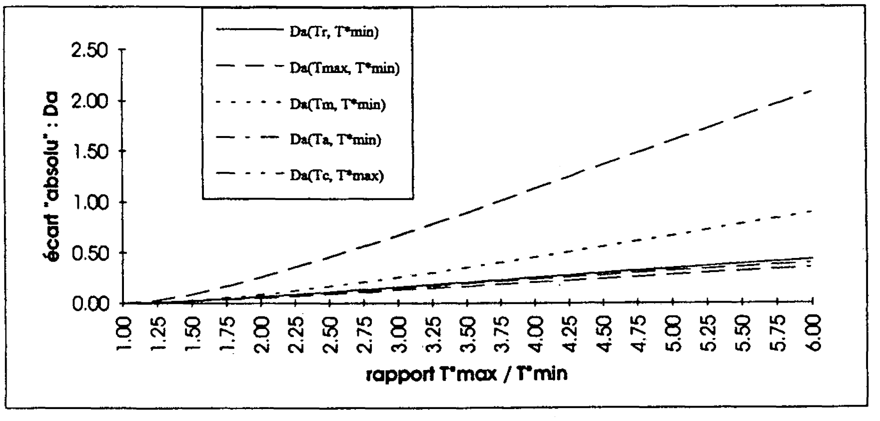


Tableau et Graphique 4. – Évolution du maximum de l'écart absolu pour les différentes périodicités caractéristiques en fonction de l'amplitude du champ d'incertitude ($T\max/T\min$).

absolu (*cf.* paragraphe 5.4). Elle peut se calculer avec la seule évaluation des périodes extrêmes sans passer par des calculs de moyennes. Sa valeur n'est pas très sensible aux ajustements de paramètres, la remise en cause de cette politique sera donc peu fréquente.

Il semble intéressant d'approfondir cette notion de robustesse, que devient la solution robuste dans le cas où des contraintes supplémentaires apparaissent sur les conditionnements, sur les seuils d'achats permettant des réductions de prix de revient, sur la durée de vie des produits ?

Tmax / Tmin	Dr(Tr, T*min)	Dr(Tmin, T*max)	Dr(Tm, T*min)	Dr(Tc, T*max)	Dr(Ta, T*max)
1.00	0.00	0.00	0		
1.25	0.01	0.02	0.01		
1.50	0.02	0.08	0.02	0.03	0.02
1.75	0.04	0.16	0.05	0.06	0.05
2.00	0.06	0.25	0.08	0.09	0.07
2.25	0.08	0.35	0.12	0.12	0.10
2.50	0.11	0.45	0.16	0.15	0.13
2.75	0.13	0.56	0.20	0.19	0.16
3.00	0.15	0.67	0.25	0.22	0.19
3.25	0.18	0.78	0.30	0.25	0.22
3.50	0.20	0.89	0.35	0.28	0.25
3.75	0.23	1.01	0.40	0.32	0.27
4.00	0.25	1.13	0.45	0.35	0.30
4.25	0.27	1.24	0.50	0.38	0.33
4.50	0.30	1.36	0.56	0.41	0.36
4.75	0.32	1.48	0.61	0.44	0.39
5.00	0.34	1.60	0.67	0.47	0.41
5.25	0.36	1.72	0.72	0.50	0.44
5.50	0.39	1.84	0.78	0.53	0.47
5.75	0.41	1.96	0.84	0.56	0.49
6.00	0.43	2.08	0.89	0.59	0.52

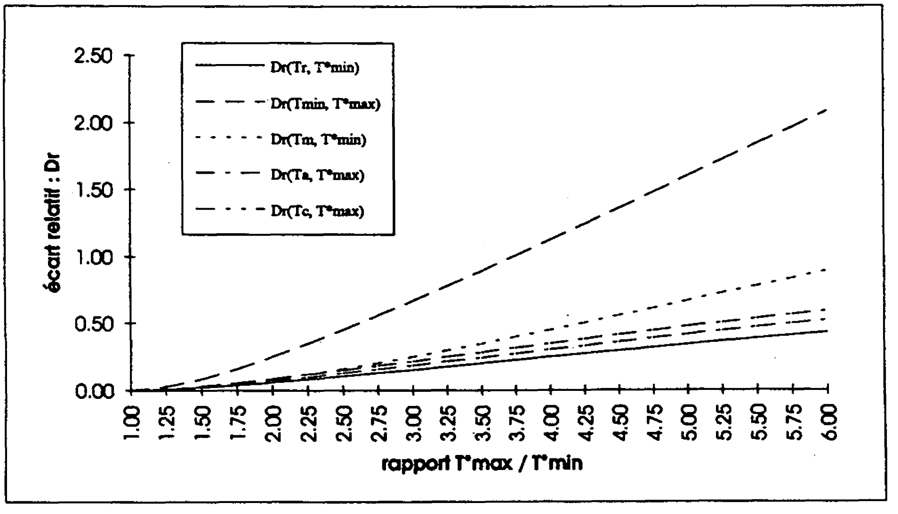


Tableau et Graphique 5. – Évolution du maximum de l'écart relatif pour les différentes périodicités caractéristiques en fonction de l'amplitude du champ d'incertitude ($T\max/T\min$).

La gestion de nombreuses références passe par la définition de classes homogènes de gestion définies à partir de critères tels que le chiffre d'affaires, la fréquence de sortie, le délai d'approvisionnement, le coefficient de variation de la demande. Toutes ces informations sont soumises à des erreurs de mesures. La notion de robustesse peut conduire à revoir les frontières des classes en visant une simplification de la typologie.

Enfin, en parallèle avec les critères de coûts, il nous semble intéressant d'appliquer le concept de robustesse à la notion de qualité de service.

BIBLIOGRAPHIE

R. BOURBONNAIS et P. VALLIN, Comment optimiser les approvisionnements, *Economica*, 1995.

V. GIARD, Gestion de production, 2e éd., *Economica*, 1988.

J. D. LÉNARD, Approche multicritère de la gestion des approvisionnements, Document n° 87 du LAMSADE, Université Paris Dauphine.

B. ROY et D. BOUYSSOU, Aide multicritère à la décision : méthodes et cas, *Economica*, 1993.

E. A. SILVER et R. PETERSON, Decision system for inventory management and production planning, 2e éd., John Wiley, 1985.

R. J. TERSINE, Principes of inventory and materials management, 4e éd., Prentice Hall, 1994.