

JEAN-MICHEL FOURNEAU

NIHAL PEKERGIN

DOMINIQUE VERCHÈRE

**Réseaux généralisés multiclassés avec
synchronisations cycliques**

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 32, n° 3 (1998),
p. 353-372

http://www.numdam.org/item?id=RO_1998__32_3_353_0

© AFCET, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSEAUX GÉNÉRALISÉS MULTICLASSES AVEC SYNCHRONISATIONS CYCLIQUES

par Jean-Michel FOURNEAU ⁽²⁾,
Nihal PEKERGIN ^(1, 2) et Dominique VERCHÈRE ^(1, 2)

Résumé. – Nous présentons un réseau de files d'attente généralisé multiclasse où un signal synchronise le service de plusieurs clients répartis sur une liste circulaire de files d'attente. Nous considérons uniquement des stations ayant une discipline de service temps partagé (processor sharing). Nous prouvons que l'existence d'une solution à un système de point fixe implique une distribution de probabilités stationnaires à forme produit. Ces réseaux peuvent avoir des applications en analyse de performance ou en fiabilité car les signaux peuvent modéliser des synchronisations dans les systèmes informatiques parallèles, des pertes de paquets dans les réseaux de communication ou des pannes provoquant la disparition des clients en service. © Elsevier, Paris

Mots clés : Réseaux de files d'attente, transitions synchronisées, distribution à forme produit, destructions de clients.

Abstract. – We present a generalized network of queues with multiple classes of customers where signals may delete customers in service according to a rooted circular list of queues. We only consider stations with processor sharing service discipline. We prove the steady-state distribution has a product form if the flow equations have a solution. These networks may be used to model synchronizations in parallel systems, losses of packets in networks, of failures with deletion of customers. © Elsevier, Paris

Keywords: Networks of queues, synchronized transitions, product form steady-state distribution, customer deletion.

1. INTRODUCTION

Les réseaux généralisés à forme produit ont été définis par Gelenbe dans [Gel90]. Depuis lors, de nombreux travaux ont été effectués dans le but de fournir des extensions supplémentaires aux réseaux généralisés à forme produit, et donc d'élargir leurs applications potentielles.

Dans ces réseaux, appelés G-réseaux, existent des clients et des signaux. Les clients représentent une entité demandant une quantité de service. Les signaux proviennent soit de l'extérieur soit de transformation d'un client

⁽¹⁾ CERMSEM, Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris, France.

⁽²⁾ PRiSM, Université de Versailles, 45 avenue des États Unis 78035 Versailles Cedex, France.

dans une station. Les signaux interagissent avec les clients dès leur arrivée dans une station. Les signaux ne sont jamais en attente et ne reçoivent jamais de service. Un signal issu d'une station i peut déplacer un client depuis une station j vers une autre station k ou vers l'extérieur du réseau. Dans ce cas, un signal change simultanément l'état de trois stations : la station i perd un client (-1) , la station j perd un client (-1) , la station k gagne un client $(+1)$. Cette transition d'état du G-réseau est appelée synchronisation de type $(-1, -1, +1)$. Ainsi les G-réseaux introduisent de nouvelles synchronisations plus complexes que celles des réseaux de type Jackson [Jac57]. Dans les réseaux de Jackson, les synchronisations sont du type $(-1, +1)$.

Plusieurs extensions de réseaux généralisés ont alors été développées, soit pour définir des effets plus complexes des signaux, soit pour introduire des classes de clients et éventuellement de signaux [FG92, FGS96] qui permettent une interaction plus fine entre clients et signaux.

Une extension vers des synchronisations plus fortes a été présentée indépendamment dans [Gel92] et [HNT94a]. Dans ces modèles, un signal déclenche la fin de service d'un groupe de clients de taille finie situé dans une station donnée. Ces réseaux introduisent les synchronisations du type $(-1, -r)$. Ces transitions correspondent au départ simultané de $r + 1$ clients à l'extérieur du réseau.

Les G-réseaux sont issus de la modélisation des réseaux de neurones à l'aide de la théorie des files d'attente. Dans [Gel90], les neurones, représentés par des stations, échangent des signaux d'excitation et des signaux d'inhibition. Les signaux d'excitation représentés par les clients augmentent le potentiel d'un neurone, c'est-à-dire la taille de la file d'attente associée à la station. Les signaux d'inhibition échangés par les neurones sont représentés par les signaux du G-réseau. D'autres applications à la modélisation de systèmes informatiques ont été proposées tel que l'effet d'un acquittement dans les protocoles [HNT94b], ainsi que des systèmes de production où les signaux représentent des pannes ou l'effet d'un contrôle de qualité [HF93]. Il est à noter que, dans ce dernier papier, l'effet d'une panne est de remettre la file à zéro et que ce mécanisme a été représenté par l'itération d'un signal qui déplace un client qui se transforme lui-même en signal pour l'itération suivante. Le résultat que nous montrons ici généralise ce mécanisme de destructions itérées en montrant qu'il peut être effectué de façon instantanée, avec des probabilités qui dépendent des classes et en itérant la destruction sur un cycle de stations. Chacun de ces trois points est une amélioration de [HF93] et des différents résultats obtenus par ailleurs.

Nous proposons donc une nouvelle dynamique associée aux réseaux de files d'attente généralisés avec plusieurs classes de clients. La quantité de service dépend de la classe associée à chaque client ; à l'intérieur d'une station, tous les clients sont en cours de service suivant une discipline de temps partagé, « processor sharing ». Les synchronisations liées à l'effet d'un signal associent un groupe de stations de service dans le G-réseau. Un signal provoque la fin de service de plusieurs clients appartenant à une liste ordonnée de stations. Chaque station appartient à au plus une liste. Les listes forment donc une partition des stations et elles permettent de définir des cycles dans le G-réseau.

Dans la section suivante, nous définissons le formalisme associé à un G-réseau multiclasse avec synchronisations cycliques et nous montrons que la distribution stationnaire dépend, comme toujours pour des réseaux généralisés, de l'existence d'une solution à l'équation de flot. Nous abordons le problème complexe de l'existence d'un point fixe à ces équations ainsi que des cas particuliers où on peut démontrer que le système est toujours stationnaire. Des exemples d'application sont ensuite suggérés. Le but de ce papier n'est pas de faire une étude de cas utilisant les G-réseaux mais de présenter dans un formalisme rigoureux un résultat général et d'indiquer comment on peut calculer les solutions de l'équation de flot.

2. LE MODÈLE

Soit un G-réseau constitué de N stations de service. Chaque station est constituée d'un serveur et d'une file d'attente de capacité infinie. On note $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, l'ensemble des indices associés aux stations. A l'intérieur de ce réseau circulent des clients et des signaux. Un client entre dans le G-réseau pour recevoir une quantité de service sur différentes stations. Les clients se rangent dans la file d'attente où ils commencent à recevoir un service dès leur arrivée. Le serveur associé à chaque station fournit un service suivant une discipline temps partagé « processor sharing ». Tous les clients sont en service. On ne distingue pas les clients dans le serveur ou dans la file, en particulier pour les destructions.

Le trajet d'un client d'une station à une autre est représenté par une chaîne de Markov de routage et de transformation. Les clients circulant dans le réseau sont de différentes classes. Pour ce modèle, on considère une seule classe de signaux et T classes de clients. On note $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ l'ensemble des indices de classes.

Pour la station $i \in \mathcal{N}$, le vecteur ligne $\vec{n}_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, \dots, n_{i,T})$ représente un état donné de la file d'attente i où $n_{i,t}$ est le nombre de clients de classe t contenus dans la file i . Pour chaque station i , on définit une norme notée $|\vec{n}_i| = \sum_{t=1}^T n_{i,t}$, qui donne le nombre de clients présents dans la station i .

Les clients de classe t arrivent de l'extérieur dans la file i suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda_{i,t}$. Pour simplifier les équations d'équilibre, on suppose qu'il n'y a pas d'arrivée de signaux depuis l'extérieur.

Chaque client en attente est servi suivant un taux inversement proportionnel au nombre total de clients dans la file d'attente. On considère que la puissance totale du serveur ne varie pas avec le nombre de clients présents, c'est-à-dire que l'on ne considère pas les stations avec plusieurs serveurs. Les demandes de service sont distribuées selon des exponentielles mais elles peuvent être distinctes pour chaque classe de clients.

Supposons que la file i contienne $|\vec{n}_i| = \sum_{t=1}^T n_{i,t}$ clients, le taux de service des clients de classe t dans la station i est dépendant de l'état :

$$\mu_{i,t} \frac{n_{i,t}}{|\vec{n}_i|} 1_{\{|\vec{n}_i| > 0\}} \quad (1)$$

Sur le G-réseau, on construit une partition des stations en A ensembles : $\cup_{a=1}^A C_a = \mathcal{N}$. Chaque ensemble C_a de cette partition, définit un cycle orienté muni d'une racine. Cet ensemble est décrit par une liste ordonnée de files d'attente telle que :

$$C_a = \{c(a, 1), c(a, 2), \dots, c(a, L_a)\} \quad 1 \leq a \leq A \quad (2)$$

Le routage d'un signal est déterministe et préalablement défini par le cycle auquel il est envoyé. Si un signal est routé vers le cycle a alors il va provoquer le départ synchronisé d'un groupe de clients répartis sur les files d'attente associées aux stations constituant le cycle a de la façon suivante : le signal entre d'abord dans la station constituant la racine de l'ensemble C_a , i.e. la file d'indice $c(a, 1)$. Si cette première file d'attente de C_a n'est pas vide, le signal provoque le départ d'un client de la file $c(a, 1)$ vers l'extérieur du G-réseau et entre instantanément dans la station d'indice $c(a, 2)$. Le client détruit par le signal est choisi uniformément parmi les clients présents dans la file. Si la station $c(a, 2)$ n'est pas vide alors un client de celle-ci est déplacé vers l'extérieur du G-réseau et le signal entre instantanément dans la station d'indice $c(a, 3)$ et ainsi de suite. Lorsque le signal entre dans la dernière file d'attente de C_a , i.e. la file d'indice $c(a, L_a)$, le signal déclenche le départ d'un client vers l'extérieur et il

retourne instantanément dans la première file d'attente de l'ensemble C_a . Le signal répète cette action jusqu'à ce qu'il rencontre une station vide. Lorsque le signal entre dans une station vide, alors son effet est stoppé et il disparaît instantanément. Au cours de ces destructions itérées, les clients à détruire ont été, à chaque visite, choisis uniformément sur la population présente. La dynamique associée à un signal est résumée dans la figure 1. Pour simplifier les notations, dans chaque sous-ensemble C_a , on pose $c(a, 0) = 0$.

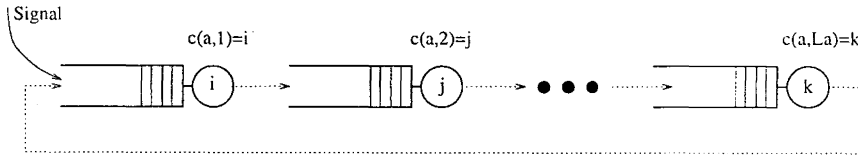


Figure 1. - Dynamique d'un signal entrant dans C_a .

Ce modèle permet d'introduire des synchronisations de fin de service d'un groupe de clients répartis sur les stations d'un cycle C_a . Soit r le plus petit nombre de clients présents dans les stations appartenant au cycle C_a lorsque le signal entre dans la première file. Et soit p la première station dans l'ordre du cycle qui possède ce nombre de clients. Le nombre de clients supprimés est égal à $r + 1$ pour les files situées dans le cycle entre la racine et la station p (cette dernière étant exclue) et à r pour les autres files du cycle.

Ce modèle étend l'effet d'un signal à plusieurs clients répartis sur un nombre quelconque de files d'attente. Le nombre de files d'attente synchronisées dépend de la longueur L_a du cycle où il entre.

Après son service dans la station i , un client de classe t peut se transformer soit en client de classe u pour être routé vers la file j avec la probabilité $P_{ij,tu}$ soit en signal pour être routé vers un cycle d'indice a , $1 \leq a \leq A$, avec la probabilité $R_{i,t,a}$. Il peut également quitter le réseau avec la probabilité $d_{i,t}$. Ces probabilités de routage définissent une chaîne de Markov de routage. Les éléments de la matrice de transition de la chaîne de routage vérifient :

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T P_{ij,tu} + \sum_{a=1}^A R_{i,t,a} + d_{i,t} = 1 \quad (3)$$

Ce mécanisme est illustré dans la figure 2. Cette figure présente deux types de cycles pour les destructions de clients : un cycle de longueur 1 sur la file 2 et un cycle de longueur 3 sur les files i, j, k . Le cycle de longueur 1 permet de vider la file à l'arrivée d'un signal, ce qui montre que notre

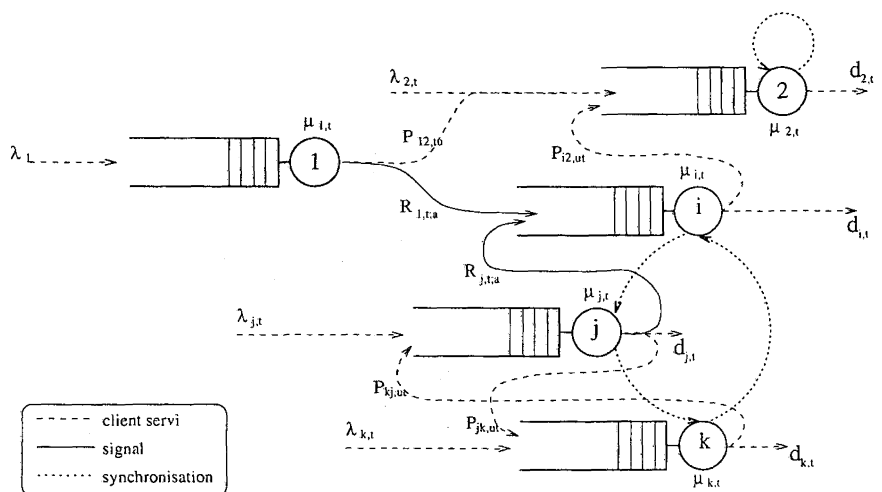


Figure 2. - Réseau généralisé avec 2 cycles.

résultat généralise le résultat de Fourneau, Kloul et Quessette sur les remises à zéro dans un réseau de files PS [JFQ95].

A la date \dot{t} , on note $\mathbf{n}(\dot{t})$ la matrice $N \times T$ décrivant l'état de ce G-réseau.

$$\mathbf{n}(\dot{t}) = \begin{pmatrix} \vec{n}_1(\dot{t}) \\ \vec{n}_2(\dot{t}) \\ \vdots \\ \vec{n}_N(\dot{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1,1}(\dot{t}) & n_{1,2}(\dot{t}) & \dots & n_{1,T}(\dot{t}) \\ n_{2,1}(\dot{t}) & n_{2,2}(\dot{t}) & \dots & n_{2,T}(\dot{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{N,1}(\dot{t}) & n_{N,2}(\dot{t}) & \dots & n_{N,T}(\dot{t}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

A partir de cette matrice, on construit une chaîne de Markov à temps continu et à espace d'états discrets associée à ce système $\{\mathbf{n}(\dot{t}); \dot{t} \geq 0\}$. Cette chaîne vérifie les équations de Chapman-Kolmogorov du G-réseau.

L'espace des états atteignables est : $\mathcal{S} = \{\mathbf{n}/n_{i,t} \geq 0, i \in \mathcal{N}, t \in T\}$. Les changements d'état sont dus à des arrivées et à des départs vers l'extérieur de clients ou à des migrations de clients à l'intérieur même du G-réseau ou enfin aux effets des signaux.

Pour $i \in \mathcal{N}$, on note $\vec{e}_i = (\mathbf{1}_{\{j=i\}})_{1 \leq j \leq N}$ le i -ème vecteur ligne unité et ${}^t(\vec{e}_i)$ la transposée du vecteur \vec{e}_i , i.e. le i -ème vecteur colonne unité de \mathbb{N}^N . On définit les matrices $\mathbf{e}_{i,t}$ de dimension $N \times T$ comme suit : pour $i \in \mathcal{N}$ et $t \in T$, tous les éléments de la matrice $\mathbf{e}_{i,t}$ sont nuls sauf l'élément de la i -ème ligne et de la t -ème colonne qui vaut 1.

Pour $i \in \mathcal{N}$, on note \vec{y}_i un vecteur ligne quelconque de \mathbb{N}^T tel que $\vec{y}_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T})$.

Dans toute la suite, on suppose que la chaîne de Markov $\{\mathbf{n}(t); t \geq 0\}$ est ergodique i.e. la distribution de probabilité limite des états de la chaîne tend vers une distribution d'équilibre qui est indépendante de la distribution initiale.

Pour chaque file d'attente d'indice i , $\rho_{i,t}$ décrit la charge moyenne due aux clients de classe t . A l'état stationnaire, $\rho_{i,t}$ est aussi la probabilité que la file i contienne au moins un client de classe t . Et $\sum_{t=1}^T \rho_{i,t}$ donne la probabilité que la station i soit non vide. On note cette probabilité :

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad \chi_i = \sum_{t=1}^T \rho_{i,t} \quad (5)$$

Si on isole la station i du réseau, le processus de sortie des clients servis dans la station i est un processus de Poisson et l'état de la file i est indépendant de l'évolution antérieure du processus de sortie des clients servis dans la station i (conséquence directe du théorème 3.3 de [CP93]). Par contre, lorsque la station i est dans le G-réseau, on ne connaît plus la nature du processus de sortie des clients de la station i vers les autres stations du réseau.

Dans le théorème suivant, sous réserve que la chaîne de Markov soit ergodique, nous donnons des conditions suffisantes pour que la distribution des probabilités stationnaires ait une forme particulière dite « distribution à forme produit ». La probabilité que la chaîne associée à ce G-réseau soit dans l'état \mathbf{n} est :

$$p(\mathbf{n}) = G \prod_{i=1}^N p_i(\vec{n}_i) \quad (6)$$

où $p_i(\vec{n}_i)$ est la probabilité marginale que la station i soit dans l'état \vec{n}_i et G est la constante de normalisation.

Remarque 1: Pour simplifier les notations, on pose $\chi_0 = 1$. Pour chaque cycle d'indice a , $c(a, 0) = 0$, on a donc $\chi_{c(a, 0)} = 1$. \square

On définit des fonctions permettant de changer de variables entre les stations d'indice $i \in \mathcal{N}$ et les stations appartenant aux cycles d'indice a :

- La fonction $b(\cdot)$ donne l'indice a du cycle auquel appartient la station i :

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad 1 \leq b(i) \leq A \quad (7)$$

Les ensembles C_a constituent une partition sur l'ensemble \mathcal{N} , donc une station n'appartient qu'à un seul cycle et il est possible de définir une telle fonction $b(\cdot)$.

• La fonction $f(\cdot)$ donne le rang de la station dans le cycle auquel elle appartient :

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad 1 \leq f(i) \leq L_{b(i)} \quad (8)$$

Si la station i est racine d'un cycle alors $f(i) = 1$.

• La fonction $c(a, \ell)$ donne l'indice de la station de rang ℓ dans le cycle a . Elle vérifie :

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad c(b(i), f(i)) = i \quad (9)$$

Avant d'énoncer le théorème, pour chaque cycle d'indice a construit sur le G-réseau et χ_i défini en (5), on pose :

$$\forall a \quad \Omega_a = \prod_{\ell=0}^{L_a} \chi_{c(a, \ell)} \quad (10)$$

et

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad \Gamma(i) = \prod_{\ell=0}^{f(i)-1} \chi_{c(b(i), \ell)} \quad (11)$$

La signification physique de l'expression (10) est la probabilité que toutes les stations appartenant au cycle a contiennent au moins un client. De même pour l'expression (11), $\Gamma(i)$ est la probabilité que toutes les stations en amont de la file i dans le cycle de la file i contiennent au moins un client. Il est à remarquer que si la file i est racine d'un cycle alors $\Gamma(i) = 1$.

Sur la base de ce formalisme nous énonçons notre résultat :

THÉORÈME 1: Si le système constitué de $N \times T$ équations non linéaires :

$$\rho_{i,t} = \frac{\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \rho_{j,u} \mu_{j,u} P_{ji,ut}}{\mu_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \rho_{j,u} \mu_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Gamma(i) \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (12)$$

où l'ensemble des solutions $\{\rho_{i,t}; i \in \mathcal{N}, t \in \mathcal{T}\}$ est tel que $0 \leq \chi_i < 1$ pour tout $i \in \mathcal{N}$ alors la chaîne de Markov associée à ce G-réseau possède une distribution stationnaire à forme produit donnée par :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{S} \quad p(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N (1 - \chi_i) |\vec{n}_i|! \prod_{t=1}^T \frac{\rho_{i,t}^{n_{i,t}}}{n_{i,t}!} \quad (13)$$

Pour clarifier la démonstration du théorème 1, nous présentons quelques lemmes techniques :

LEMME 1: Supposons que $\mathbf{n} + \sum_{i=1}^L {}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i$ et \mathbf{n} soient des états de \mathbb{S} , si la solution (13) est vérifiée alors on a :

$$\frac{p\left(\mathbf{n} + \sum_{i=1}^L {}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i\right)}{p(\mathbf{n})} = \prod_{i=1}^L \frac{(|\vec{n}_i| + |\vec{y}_i|)!}{|\vec{n}_i|!} \prod_{t=1}^T \frac{n_{i,t}!}{(n_{i,t} + y_{i,t})!} \rho_{i,t}^{y_{i,t}} \quad (14)$$

pour un ensemble de L vecteurs \vec{y}_i dans \mathbb{N}^T

Preuve: Le terme ${}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i$ est une matrice de $\mathbb{N}^{N \times T}$ où tous les éléments sont nuls sauf les éléments de la i -ème ligne. La i -ème ligne de la matrice ${}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i$ est égale au vecteur \vec{y}_i . On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^L {}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vdots \\ \vec{y}_L \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (15)$$

En utilisant la distribution donnée en (13), on a :

$$\frac{p\left(\mathbf{n} + \sum_{i=1}^L {}^t(\vec{e}_i) \vec{y}_i\right)}{p(\mathbf{n})} = \frac{\prod_{i=1}^N (1 - \chi_i) (|\vec{n}_i| + |\vec{y}_i|)! \prod_{t=1}^T \frac{\rho_{i,t}^{n_{i,t} + y_{i,t}}}{(n_{i,t} + y_{i,t})!}}{\prod_{i=1}^N (1 - \chi_i) |\vec{n}_i|! \prod_{t=1}^T \frac{\rho_{i,t}^{n_{i,t}}}{n_{i,t}!}} \quad (16)$$

après simplification, la relation (14) est immédiate. □

LEMME 2: Pour un entier r donné, on a :

$$\sum_{\vec{y}_i \in \mathbb{N}^T} |\vec{y}_i|! \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_{i,t}!} \rho_{i,t}^{y_{i,t}} \mathbf{1}_{\{|\vec{y}_i|=r\}} = \chi_i^r \quad (17)$$

Preuve: Réécrivons le membre gauche de l'équation (17) sous forme explicite :

$$\sum_{y_{i,1}, \dots, y_{i,T} / \sum_{t=1}^T y_{i,t} = r} \frac{|\vec{y}_i|!}{y_{i,1}! y_{i,2}! \dots y_{i,T}!} \rho_{i,1}^{y_{i,1}} \rho_{i,2}^{y_{i,2}} \dots \rho_{i,T}^{y_{i,T}} \quad (18)$$

on reconnaît ici la somme des termes d'une loi multinômiale. On obtient :

$$\sum_{\vec{y}_i \in \mathbb{N}^T} |\vec{y}_i|! \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_{i,t}!} \rho_{i,t}^{y_{i,t}} \mathbf{1}_{\{|\vec{y}_i|=r\}} = (\rho_{i,1} + \rho_{i,2} + \dots + \rho_{i,T})^r \quad (19)$$

en utilisant l'équation (5), on retrouve l'égalité (17). \square

LEMME 3: Les équations ci-dessous:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_{i,t} &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mu_{i,t} \rho_{i,t} d_{i,t} \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i) \end{aligned} \quad (20)$$

sont compatibles avec le système (12).

Preuve: Nous allons montrer qu'en partant des équations (20), on trouve un système d'équations dont l'équation (12) est une solution. En utilisant la relation (3), on remplace $d_{i,t}$ par $1 - \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T P_{ij,tu} - \sum_{a=1}^A R_{i,t;a}$. Après avoir réarrangé les indices, on arrive au système suivant :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \\
 - \sum_{j=1}^T \sum_{u=1}^T \sum_{a=1}^A \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;a} \\
 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i)
 \end{aligned} \quad (21)$$

Dans le terme négatif du membre droit : $\sum_{a=1}^A \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;a}$ on somme sur tous les cycles définis sur le réseau. On change la variable a de façon à sommer sur toutes les stations racines d'un cycle. En effet, on remarque que $\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}} = A$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \\
 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}} \\
 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i)
 \end{aligned} \quad (22)$$

D'après la remarque associée à la définition de $\Gamma(i)$ donnée en (11), on sait que si la station d'indice $i \in \mathcal{N}$ est racine d'un cycle a , c'est-à-dire si $f(i) = 1$, alors $\Gamma(i) = 1$. Après quelques manipulations avec les indicatrices, l'équation (22) devient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \\
 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i) \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}} \\
 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \sum_{r=1}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}}
 \end{aligned} \quad (23)$$

On fait apparaître un facteur commun dans les termes du membre droit, les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Gamma(i) \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}} \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)} \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}} \end{aligned} \quad (24)$$

D'après les notations données en (10) et (11), l'explication des termes $\Gamma(i)$ et $\Omega_{b(i)}$ entraîne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \times \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r (\chi_{c(b(i),1)} \mathbf{1}_{\{f(i)=2\}} + \chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \mathbf{1}_{\{f(i)=3\}} + \dots \\ \dots + \chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \dots \chi_{c(b(i),L_{b(i)}-1)} \mathbf{1}_{\{f(i)=L_{b(i)}\}}) \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r (\chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \dots \chi_{c(b(i),L_{b(i)})} \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}}) \end{aligned}$$

Dans le membre droit, on somme sur toutes les files d'attente i du réseau. Chaque file i appartient à un seul cycle du réseau généralisé. Après quelques manipulations sur les indices des stations de chaque cycle, il est clair que :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N (\chi_{c(b(i),1)} \mathbf{1}_{\{f(i)=2\}} + \chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \mathbf{1}_{\{f(i)=3\}} + \cdots \\
 & \quad + \chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \cdots \chi_{c(b(i),L_{b(i)}-1)} \mathbf{1}_{\{f(i)=L_{b(i)}\}} \\
 & \quad + \chi_{c(b(i),1)} \chi_{c(b(i),2)} \cdots \chi_{c(b(i),L_{b(i)})} \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}}) \\
 & = \sum_{i=1}^N \chi_i \prod_{\ell=0}^{f(i)-1} \chi_{c(b(i),\ell)}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Les équations (25) deviennent alors :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} \right) = \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^N \chi_i \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r \prod_{\ell=0}^{f(i)-1} \chi_{c(b(i),\ell)} \tag{28}$$

En utilisant les notations (10), (11), et les conditions présentées dans le théorème 1, on obtient la somme de toutes les solutions $\rho_{i,t}$ donnée en (12). \square

Preuve du théorème 1: Nous prouvons que la distribution de probabilité à l'état stationnaire donnée en (13) dépendant des équations (12) vérifie les équations de balance globale pour chaque état atteignable de la chaîne de Markov. Les équations de balance globale pour chaque état \mathbf{n} de \mathcal{S} sont :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T p(\mathbf{n}) \left(\lambda_{i,t} + \mu_{i,t} \frac{n_{i,t}}{|\vec{n}_i|} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i|>0\}} \right) = \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{i,t}) \mu_{i,t} \frac{n_{i,t} + 1}{|\vec{n}_i| + 1} d_{i,t}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_{i,t}) \lambda_{i,t} \mathbf{1}_{\{n_{i,t}>0\}} \tag{2}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{j,u} - \mathbf{e}_{i,t}) \mu_{j,u} \frac{n_{j,u} + 1}{|\vec{n}_j| + 1} P_{ji,ut} \mathbf{1}_{\{n_{i,t} > 0\}} \quad [3]$$

$$+ \sum_{a=1}^A \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(a,1)} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(a,1)}| = r \end{smallmatrix} \right\}} \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(a,2)} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(a,2)}| = r \end{smallmatrix} \right\}} \dots \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(a,L_a)} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(a,L_a)}| = r \end{smallmatrix} \right\}} p \left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{j,u} + \sum_{\ell=1}^{L_a} {}^t(\vec{e}_{c(a,\ell)}) \vec{y}_{c(a,\ell)} \right) \mu_{j,u} \frac{n_{j,u} + 1}{|\vec{n}_j| + 1} R_{j,u;a} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_{c(a,1)}| = 0\}} \quad [4]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(b(i),1)} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(b(i),1)}| = r+1 \end{smallmatrix} \right\}} \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(b(i),f(i))} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(b(i),f(i))}| = r \end{smallmatrix} \right\}} \dots \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})} \in \mathbb{N}^{T/} \\ |\vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})}| = r \end{smallmatrix} \right\}} p \left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{j,u} + \sum_{\ell=1}^{L_{b(i)}} {}^t(\vec{e}_{c(b(i),\ell)}) \vec{y}_{c(b(i),\ell)} \right) \mu_{j,u} \frac{n_{j,u} + 1}{|\vec{n}_j| + 1} R_{j,u;b(i)} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i| = 0\}} \mathbf{1}_{\{f(i) > 1\}} \quad [5]$$

Le membre gauche représente les sorties de l'état \mathbf{n} et le membre droit représente les entrées dans l'état \mathbf{n} depuis un autre état atteignable \mathbf{n}' de l'ensemble \mathcal{S} .

Détaillons chaque terme du membre de droite :

- Le terme [1] est le flux de probabilité correspondant à une fin de service d'un client de classe t dans la file i . Le client est servi suivant un taux dépendant de l'état de la file i : $\mu_{i,t} \frac{n_{i,t} + 1}{|\vec{n}_i| + 1}$, il sort ensuite du réseau avec la probabilité $d_{i,t}$.
- Le terme [2], correspond au flux de probabilité de l'arrivée extérieure d'un client de classe t dans la file i à partir de l'état $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_{i,t}$. Dans ce cas, on aboutit toujours à un état d'arrivée \mathbf{n} où la station i contient au moins un client de classe t , i.e. $n_{i,t} > 0$.

- Le terme [3] correspond à la fin de service d'un client de classe u dans la station j . Ce dernier est ensuite routé vers la file i en tant que client de classe t avec la probabilité $P_{ji,ut}$.
- Le terme [4] est une fin de service d'un client de classe u dans la station j . Ce client est ensuite transformé en signal et il est routé vers le cycle a suivant la probabilité $R_{j,u;a}$. Ce signal vide complètement la station racine du cycle a : $|\vec{n}_{c(a,1)}| = 0$ (cette station est d'indice i tel que $f(i) = 1$). De plus ce signal synchronise la fin de service de r clients dans chaque file d'attente qui compose le cycle a . Les r clients de chacune des stations ℓ du cycle a sont répartis suivant le vecteur $\vec{y}_{c(a,\ell)}$. Ce terme inclut le cas où le signal entre dans une station racine vide, i.e. le signal n'a aucun effet sur les stations du cycle.
- Le terme [5] est identique au terme [4] sauf que la file racine contient au moins un client de plus que la file i , la file i sera vidée complètement. Le signal synchronise $r + 1$ clients dans toutes les files en amont de la file i dans le cycle d'indice $b(i)$. Pour la station i et toutes les stations de rang ℓ supérieur au rang de la file i i.e. $\ell \geq f(i)$, le signal synchronise la fin de service de r clients répartis sur un vecteur $\vec{y}_{c(b(i),\ell)}$ de \mathbb{N}^T . L'état atteint \mathbf{n} est tel que la station i est vidée de tous ses clients en cours de service : $n_{i,t} = 0$.

Dans le terme [4], on fait un changement d'indice. Plutôt que de sommer sur chaque cycle a du réseau, on somme sur toutes les files i racine d'un cycle a , i.e. les files i telles que $f(i) = 1$. Le terme [4] du membre droit se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_{c(b(i),1)} \in \mathbb{N}^T / \\ |\vec{y}_{c(b(i),1)}| = r \end{array} \right\}} \cdots \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})} \in \mathbb{N}^T / \\ |\vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})}| = r \end{array} \right\}} p \left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{j,u} + \sum_{\ell=1}^{L_{b(i)}} {}^t(\vec{e}_{c(b(i),\ell)}) \vec{y}_{c(b(i),\ell)} \right) \mu_{j,u} \frac{n_{j,u} + 1}{|\vec{n}_j| + 1} R_{j,u;b(i)} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i|=0\}} \mathbf{1}_{\{f(i)=1\}}$$

Il est alors possible de regrouper les termes [4] et [5]. On introduit la solution à forme produit (13). On remarque que si $n_{i,t} > 0$ alors $|\vec{n}_i| > 0$.

Après avoir regroupé les termes par indicatrice et utilisé le lemme 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\lambda_{i,t} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} d_{i,t}) = \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\rho_{i,t}} \left[\left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} \right) - \mu_{i,t} \right] \frac{n_{i,t}}{|\vec{n}_i|} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i| > 0\}} + \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \sum_{\left\{ \substack{\vec{y}_{c(b(i),1)} \in \mathbb{N}^{\mathbf{T}} / \\ |\vec{y}_{c(b(i),1)}| = r+1} \right\}} \dots \sum_{\left\{ \substack{\vec{y}_{c(b(i),f(i)-1)} \in \mathbb{N}^{\mathbf{T}} / \\ |\vec{y}_{c(b(i),f(i)-1)}| = r+1} \right\}} \times \\
 & \sum_{\left\{ \substack{\vec{y}_{c(b(i),f(i))} \in \mathbb{N}^{\mathbf{T}} / \\ |\vec{y}_{c(b(i),f(i))}| = r} \right\}} \dots \sum_{\left\{ \substack{\vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})} \in \mathbb{N}^{\mathbf{T}} / \\ |\vec{y}_{c(b(i),L_{b(i)})}| = r+1} \right\}} \prod_{\ell=1}^{L_{b(i)}} |\vec{y}_{c(b(i),\ell)}|! \times \\
 & \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_{c(b(i),\ell),t}!} \rho_{c(b(i),\ell),t}^{y_{c(b(i),\ell),t}} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i|=0\}}
 \end{aligned}$$

On utilise le résultat du lemme 2 dans le dernier terme et on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\lambda_{i,t} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} d_{i,t}) = \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{\rho_{i,t}} \left[\left(\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \mu_{j,u} \rho_{j,u} P_{ji,ut} \right) - \mu_{i,t} \right] \frac{n_{i,t}}{|\vec{n}_i|} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i| > 0\}} + \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \prod_{\ell=0}^{L_{b(i)}} (\chi_{c(b(i),\ell)})^r \prod_{h=0}^{f(i)-1} \chi_{c(b(i),h)} \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i|=0\}}
 \end{aligned}$$

On pose $\mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i|=0\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{|\vec{n}_i| > 0\}}$ dans le dernier terme du membre de droite. On suppose la solution en (12) vérifiée et on remplace $\rho_{i,t}$ par sa valeur dans le premier terme du membre de droite. En utilisant les notations (10) et (11), l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\lambda_{i,t} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} d_{i,t}) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i) \left(\sum_{t=1}^T \frac{n_{i,t}}{|\bar{n}_i|} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{|\bar{n}_i| > 0\}} \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i) \end{aligned}$$

Il est immédiat que le terme avec l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{|\bar{n}_i| > 0\}}$ est nul, on aboutit à l'équation :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\lambda_{i,t} - \mu_{i,t} \rho_{i,t} d_{i,t}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{j,u} \rho_{j,u} R_{j,u;b(i)} \Omega_{b(i)}^r \Gamma(i)$$

Le lemme 3 conclut la preuve. \square

Remarque 2: Si on suppose que les signaux peuvent entrer dans le G-réseau depuis l'extérieur alors on définit un taux d'arrivée extérieur de signaux pour chaque cycle a , ce taux est noté : λ_a^- .

Sous les hypothèses du théorème 1, le système (12) devient alors :

$$\rho_{i,t} = \frac{\lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \rho_{j,u} \mu_{j,u} P_{ji,ut}}{\mu_{i,t} + \left(\lambda_{b(i)}^- + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \rho_{j,u} \mu_{j,u} R_{j,u;b(i)} \right) \Gamma(i) \sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r} \quad (29)$$

$\forall i \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathcal{T}$

Pour un G-réseau multiclasse avec synchronisations cycliques, nous venons de montrer que l'existence d'une distribution stationnaire à forme produit est conditionnée par l'existence d'une solution $\rho_{i,t}$ au système de point fixe non linéaire (12). Nous donnons maintenant quelques indications sur l'état actuel de nos recherches dans ce domaine.

3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Sous des hypothèses générales, l'existence d'une solution soulève des problèmes techniques liés à la non continuité de l'opérateur de point fixe donné en (12) lorsque la série $\sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r$ diverge. En effet, la méthode employée jusqu'alors pour démontrer l'existence d'une solution est le théorème de Brouwer dont l'une des hypothèses est la continuité de l'opérateur de point fixe sur un compact. Or l'opérateur défini par l'équation (29) ne peut être prolongé par continuité, lorsque la série $\sum_{r=0}^{+\infty} \Omega_{b(i)}^r$ diverge, que si le terme $(\lambda_{b(i)}^- + \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^T \rho_{j,u} \mu_{j,u} R_{j,u;b(i)})$ est strictement positif.

On peut cependant démontrer l'existence de cette solution dans certains cas. Le cas le plus simple est celui où les taux d'arrivée des signaux venant de l'extérieur sont strictement positifs. i.e. $(\lambda_{b(i)}^- > 0)$. Un autre cas simple est illustré dans la figure 2. La file 1 émet des signaux vers les deux cycles, mais ne reçoit ni signaux ni clients du réseau. On peut donc montrer facilement que la charge dans cette file est définie, c'est-à-dire que l'équation de flot a une solution. Le taux de sortie des signaux issus de cette file est donc strictement positif. On peut ainsi conclure pour diverses topologies de réseau. Une preuve sous ces conditions est présentée dans [Ver97] mais elle n'est pas présentée ici par souci de concision.

Une autre approche qui a donné des résultats partiels sur ce problème est l'hyperstabilité telle que Gelenbe l'avait définie dans ses premiers travaux sur la stabilité des G-réseaux. Un G-réseau est hyperstable si, en éliminant les signaux, il est stable et atteint son équilibre stationnaire à forme produit.

Il reste que le problème général de la stabilité n'est pas encore résolu et doit faire l'objet de futures recherches pour s'affranchir de cette limite quant à la continuité lorsque la série diverge et que l'on ne peut pas démontrer directement que le taux d'arrivée des signaux est non nul.

En ce qui concerne l'algorithme de calcul des solutions, on a également des résultats partiels. Nos expériences nous ont montré que l'itération du système de point fixe en contraignant la charge totale à rester inférieure à 1 converge presque toujours. L'exception la plus notable est le cas des cycles de taille 1. Et même en se limitant à des cycles plus grands, la convergence ne peut être prouvée. Il faudrait donc généraliser à ces nouvelles dynamiques de signaux l'algorithme de calcul des solutions $\rho_{i,t}$ par encadrement proposé dans [Fou91] et qui a été prouvé pour des G-réseaux plus simples. En

attendant une telle preuve, difficile, l'itération sur l'équation de point fixe constitue une heuristique efficace.

Les cycles de longueur 1 ont une autre propriété très intéressante. On a pu démontrer dans [JFQ95] que la condition d'existence de la forme produit est toujours vérifiée, c'est-à-dire que la condition de stationnarité $\sum_t \rho_{i,t} < 1$ est toujours vraie, et ceci pour toutes valeurs des intensités de service et d'arrivées. La seule condition est que le taux d'arrivée des signaux soit strictement positif.

Citons enfin quelques applications potentielles de ce nouveau résultat. Le caractère novateur est la destruction instantanée de plusieurs clients dans plusieurs stations.

Par exemple, la nature cyclique de l'effet d'un signal suggère des applications potentielles dans les mécanismes de "polling" utilisés dans les autocommutateurs. Nous cherchons également à montrer que ce mécanisme permet de donner une borne sur le temps de séjour dans une file avec une discipline Round Robin pondérée. Cette discipline fait partie des disciplines « équitables » dont l'utilisation pour divers protocoles est proposée afin de mieux garantir les performances des réseaux large bande.

Ce type de résultats nous semble également pouvoir être appliqué à la modélisation de chaînes d'assemblage dans les systèmes de production et plus généralement à tout système où on opère une opération de rassemblement de clients. A chaque niveau d'un système d'assemblage, un cycle donné peut représenter une zone de regroupement. La longueur d'un cycle est le nombre L_a de composants nécessaires à la construction d'un élément dans la chaîne de montage. Les points bien pris en compte par ce modèle à base de G-réseau sont le départ instantané des clients des files et la discipline de service PS associée à des temps de service dépendant de la classe. Par contre, la durée d'assemblage est nulle et l'opération a lieu même si tous les composants ne sont pas présents. Encore une fois, la synchronisation dans des G-réseaux n'est pas une synchronisation forte, au sens des réseaux de Petri par exemple. C'est bien ce qui explique que les solutions à forme produit sont beaucoup plus fréquentes pour des réseaux généralisés que pour des réseaux de Petri. Plus généralement, les G-réseaux ont permis de montrer que beaucoup de mécanismes provoquant le départ simultané de plusieurs clients peuvent être analysés par des modèles à forme produit. La nouveauté apportée par les G-réseaux réside principalement dans ces départs synchronisés de façon « molle ». C'est dans ce cadre qu'il faut espérer utiliser l'ensemble des résultats sur les réseaux généralisés.

BIBLIOGRAPHIE

- [CP93] X. CHAO and M. PINEDO, On generalized networks of queues with positive and negative arrivals. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1993, 7, pp. 301-334.
- [FG92] J. M. FOURNEAU and E. GELENBE, Multiclass G-networks. In *ORSA Conference: Computer Science and Operation Research: new developments in their interface*, Williamsburg (USA), January 1992.
- [FGS96] J. M. FOURNEAU, E. GELENBE and R. SUROS, G-networks with multiple class negative and positive customers. *Theoretical Computer Science*, 1996, 155, pp. 141-156.
- [Fou91] J. M. FOURNEAU, Computing the steady-state distribution of networks with positive and negative customers. In *13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics*, 1991.
- [Gel90] E. GELENBE, Random neutral networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation*, 1990, 1 (4), pp. 502-510.
- [Gel92] E. GELENBE, G-networks with signals and batch removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1992, 7, pp. 335-342.
- [HF93] M. HERNÁNDEZ and J.-M. FOURNEAU, Modelling defective parts in a flow using G-networks. In *Second International Workshop on Performability Modelling of Computer and Communication Systems*, Mont Saint-Michel (France), June 1993.
- [HNT94a] W. HENDERSON, B. S. NORTHCOTE and P. G. TAYLOR, Geometric equilibrium distributions for queues with interactive batch departures. *Annals of Operations Research*, 1994, 48, pp. 493-511.
- [HNT94b] W. HENDERSON, B. S. NORTHCOTE and P. G. TAYLOR, Networks of customer queues and resource queues. In *ITC 14*, 1994.
- [Jac57] J. R. JACKSON, Networks of waiting lines. *Operations Research*, 1957, 5, pp. 518-52.
- [JFQ95] L. KLOUL, J. M. FOURNEAU and F. QUESSETTE, Multiple class G-networks with jumps back to zero. In *Mascots'95*, Durham, North Carolina, USA, Janvier 1995.
- [Ver97] D. VERCHÈRE, *Contribution à de nouvelles méthodes analytiques d'évolution de performance de systèmes informatiques : forme produit pour réseaux généralisés à temps continu et à temps discret*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1997, soumise.