

O. LAVIALLE

Recherche d'un quasi-ordre médian à partir d'un profil de relations floues

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 31, n° 3 (1997),
p. 311-330

http://www.numdam.org/item?id=RO_1997__31_3_311_0

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHE D'UN QUASI-ORDRE MÉDIAN À PARTIR D'UN PROFIL DE RELATIONS FLOUES (*)

par O. LAVIALLE ⁽¹⁾

Communiqué par Bernard Roy

Résumé. – *Nous présentons une démarche permettant de rechercher un quasi-ordre proche (au sens d'une distance que nous définirons) d'un profil de relations binaires ou floues codant des préférences individuelles sur un ensemble de n objets. Le principe de la recherche du quasi-ordre le plus proche du profil pour un ordre sous-jacent donné est étudié.*

Mots clés : Optimisation, quasi-ordre, aide multicritère à la décision, programmation dynamique.

Abstract. – A method for seeking and identifying a neighbouring semi-order of binary or fuzzy relations is proposed. The research of the nearest semi-order for a given underlying order is studied.

Keywords: Optimization, semi-order, multicriteria decision aid, dynamic programming.

1. INTRODUCTION

Le problème de l'agrégation d'opinions a été abordé dès la fin du XVIII^e siècle par Borda puis Condorcet dans le cadre de la théorie du vote.

Nous nous plaçons ici dans le cas où les préférences sont exprimées sous forme de relations binaires ou floues. Nous appelons relation floue une relation qui, à chaque couple d'objets, associe une valeur réelle de l'intervalle $[0, 1]$; cette valeur pour un couple (x_i, x_j) est le reflet de la plus ou moins grande confiance que l'on place dans l'assertion « x_i est préféré à x_j ». C'est le cas, par exemple, des matrices de surclassement issues d'une phase d'agrégation partielle d'opinions multicritères (Roy [1985]).

Nous recherchons une structure symbolisant une préférence collective en minimisant un éloignement par rapport à l'ensemble des relations.

(*) Reçu en février 1995.

(¹) E.N.I.T.A. de Bordeaux, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, BP 201
33175 Gradignan Cedex.

La NP-complétude des problèmes de recherche d'une telle structure à partir d'un profil de relations binaires a été démontrée par Wakabayashi [1986] lorsque la distance adoptée est celle de la différence symétrique (la structure recherchée est alors appelée structure médiane) et que la relation recherchée est un ordre total, un ordre partiel ou un préordre. Hudry [1989] a complété ces résultats en démontrant entre autres que le problème de la recherche d'un quasi-ordre médian était également NP-complet.

Peu de travaux ont apparemment été effectués sur la recherche du quasi-ordre médian d'un profil de relations. Michaud et Marcotorchino [1979], [1981] proposent une démarche issue de l'optimisation linéaire pour résoudre l'ensemble des problèmes de recherche de médianes, mais avec un nombre de contraintes impressionnant pour les quasi-ordres. Jacquet-Lagrèze [1975] propose une heuristique dans le cas particulier de l'approximation d'une relation binaire unique par un quasi-ordre. Citons encore Hudry [1989] qui propose d'utiliser un algorithme fondé sur la technique du recuit simulé.

Pour notre part, nous proposons de rechercher le quasi-ordre le plus proche du profil des relations de surclassement parmi les quasi-ordres ayant un ordre total sous-jacent identique. Nous présenterons rapidement les applications de ce principe d'amélioration locale.

2. NOTION DE DISTANCE

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des n objets soumis à évaluation. Pour chaque juge τ , la phase multicritère a conduit à l'élaboration d'une relation globale de préférence R_τ .

La relation R_τ qui exprime les préférences de l'individu τ sur les n objets est une relation binaire ou floue. Nous considérons par la suite que c'est une relation floue à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous pouvons associer à chaque relation R_τ une matrice de préférence A_τ carrée d'ordre n dont les termes sont à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous notons $\Pi = (R_1, \dots, R_\tau, \dots, R_T)$ le profil des T relations individuelles.

Soit R_τ une relation floue et R une relation binaire quelconque, nous posons : $\delta(R_\tau, R) = \sum_{i,j} |r_{ij}^\tau - r_{ij}|$ où r_{ij}^τ et r_{ij} sont les valuations des deux relations pour le couple (x_i, x_j) $r_{ij}^\tau \in [0, 1]$ et $r_{ij} \in \{0, 1\}$.

Chercher la relation qui minimise l'éloignement au profil Π au sens de la distance δ , c'est chercher R^0 telle que :

$$\Delta(\Pi, R^0) = \sum_{\tau=1}^T \delta(R_\tau, R^0) = \min_R \sum_{\tau=1}^T \delta(R_\tau, R).$$

Si les relations R_τ sont des relations binaires, R^0 est appelée la relation médiane du profil (*ie.* R^0 minimise la distance de la différence symétrique) (Barthélémy, Monjardet [1981]). Par extension, nous appellerons encore R^0 la relation médiane du profil dans le cas de relations floues.

Soit R^Π la relation valuée somme des relations R_τ : $r_{ij}^\Pi = \sum_{\tau=1}^T r_{ij}^\tau$

Il est immédiat que la relation médiane recherchée R^0 est telle que :

$$\Delta(\Pi, R^0) = T \times \left[\min_R \left(\sum_{iR_j} \left(1 - \frac{r_{ij}^\Pi}{T} \right) + \sum_{i\bar{R}_j} \frac{r_{ij}^\Pi}{T} \right) \right].$$

La recherche de la relation médiane d'un profil de relations floues est donc réduite à l'approximation d'une relation unique floue, « moyenne » de l'ensemble des relations du profil, par une relation binaire. Dans la suite, nous ne considérerons donc plus les relations individuelles, mais la relation R^Π et nous cherchons R^0 telle que : $\sum_{iR^0_j} (T - r_{ij}^\Pi) + \sum_{i\bar{R}^0_j} r_{ij}^\Pi$ soit minimum.

3. QUASI-ORDRE

3.1. Définitions

La notion de quasi-ordre a été introduite par Luce [1956] sous le nom de « semi-order ». Cette structure, ainsi que celle d'ordre d'intervalles assez voisine, permet de représenter des préférences à seuil ; ce seuil est constant pour le quasi-ordre et variable pour l'ordre d'intervalles ⁽²⁾ (Scott, Suppes [1958], Fishburn [1970]). Voir Monjardet [1978] pour une étude complète de l'axiomatique des quasi-ordres.

⁽²⁾ Cette assertion est restrictive dans la mesure où un quasi-ordre peut être défini à partir d'une fonction f et d'un seuil φ non constant sous la simple condition que $f + \varphi(f)$ soit monotone non décroissante; dans ce cas, il est d'ailleurs toujours possible de revenir à un seuil constant par simple transformée monotone de f .

DÉFINITION 1 : Soit Q une relation binaire sur X^2 . Q est un quasi-ordre s'il existe une fonction f définie sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un réel $\varphi > 0$ tels que :

$$\forall i, j \quad i Q j \Leftrightarrow f(i) \geq f(j) - \varphi. \quad (1)$$

Nous pouvons interpréter φ comme un seuil d'indifférence. Si la valeur $f(i)$ attribuée à i est plus grande que la valeur attribuée à j et si la différence des deux valeurs est significative, alors i est « préféré » à j . Si la différence est inférieure à φ , on admet qu'il y a indifférence entre i et j (Fishburn [1985]).

A partir de la définition d'un quasi-ordre, nous pouvons définir :

- P , une relation de préférence stricte, telle que : $i P j \Leftrightarrow i Q j$ et $j \bar{Q} i$,
- I , une relation d'indifférence, telle que : $i I j \Leftrightarrow i Q j$ et $j Q i$.

Partant, (1) s'écrit :

$$\forall x_i, x_j \in X^2 \begin{cases} i I j & \Leftrightarrow |f(i) - f(j)| \leq \varphi \\ i P j & \Leftrightarrow f(i) - f(j) > \varphi \end{cases}$$

P est la « la partie stricte » de Q .

3.2. Intérêt de la structure de quasi-ordre

La transitivité de la relation de préférence stricte est évidente et nous ne remettons pas en cause son principe ⁽³⁾. En revanche, un intérêt de la structure de quasi-ordre réside dans la possibilité de considérer des relations d'indifférences non transitives; ceci est une conséquence directe et naturelle de l'effet de seuil :

$$\begin{aligned} &\text{soient } x_i, x_j, x_k \in X^3 \quad \text{tels que } f(i) > f(j) > f(k) \\ &\text{avec } f(i) - f(j) \leq \varphi, f(j) - f(k) \leq \varphi \quad \text{et} \quad f(i) - f(k) > \varphi \\ &\text{alors } i I j, j I k \text{ et } i P k. \end{aligned}$$

Chercher un quasi-ordre c'est admettre qu'un objet peut être faiblement préféré à un autre (*i.e.* trop faiblement pour parler de préférence stricte) et le deuxième faiblement préféré à un troisième, le premier étant « significativement » préféré au troisième.

⁽³⁾ Même si l'aspect multicritère du jugement implique la possibilité de non transitivité, notre objectif est un ordonnancement des objets.

La notion de seuil de préférence et celle (finalement voisine) de seuil de différenciation sont des notions essentielles dès lors que l'on travaille sur des résultats d'évaluation où la notion de seuil différentiel est implicite (analyse psychosensorielle par exemple).

Nous pouvons ajouter à la liste des arguments en faveur de la structure de quasi-ordre, le fait que ceux-ci contiennent les ordres totaux et préordres totaux et soient en nombre très supérieurs (Chandon, Lemaire, Pouget [1978], Dean, Keller [1968]). L'approximation au sens de la distance définie au point 2 ne peut donc être que meilleure.

Il est à noter que l'ordre d'intervalle possède des propriétés similaires à celles énoncées pour le quasi-ordre. Toutefois, l'ordre d'intervalle constitue une « relaxation » particulièrement forte d'un préordre total; en fait, la présence d'un seuil variable permet l'existence de configurations difficilement interprétables dans le cas d'une structure codant pour un ensemble de préférences.

A la lumière des arguments développés ci-dessus, il apparaît que la structure de quasi-ordre offre un compromis satisfaisant entre la volonté de hiérarchiser les objets et la proximité au profil.

4. QUASI-ORDRE A DISTANCE MINIMUM POUR UN ORDRE SOUS-JACENT DONNÉ

4.1. Définitions

Soit Q , un quasi-ordre donné; à Q correspondant un préordre total sous-jacent R unique défini par :

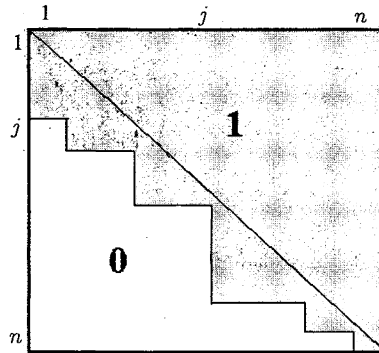
$$\forall x_i, x_j \in X^2 \ i R j \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_k \in X, & j P k \Rightarrow i P k \\ \text{et} \\ \forall x_k \in X, & k P i \Rightarrow k P j \end{cases}$$

Un préordre total est un ordonnancement total de classes au sein desquelles les éléments sont supposés indifférents. Deux éléments seront ici supposés indifférents dès que les relations les liant à tous les autres éléments seront identiques.

Soit la matrice $A (n \times n)$ d'adjacence du graphe associé à un quasi-ordre donné.

Choisissons une permutation compatible avec le préordre sous-jacent (Jacquet-Lagrèze [1975]). Soit 1, 2, ..., n l'ordre des lignes et des colonnes ainsi obtenu.

Par suite, la matrice se présente sous forme d'un tableau en escalier (Menuet [1974]) :



Un ordre total O est compatible avec un préordre donné R dès que : $\forall x_i, x_j \ i O j \Rightarrow i R j$.

Pour un préordre total comptant m classes d'effectif n_i ($1 \leq i \leq m$), le nombre d'ordres compatibles est le produit du nombre de permutations possibles au sein de chaque classe, soit :

$$\prod_{i=1}^m n_i !$$

On appellera ordre sous-jacent d'un quasi-ordre Q tout ordre qui sera compatible avec le préordre sous-jacent de Q .

La caractérisation d'un quasi-ordre par une matrice en escalier a été précisée par Chandon, Lemaire et Pouget [1978]; nous reprendrons pour partie leurs notations et définitions.

DÉFINITION 2 : Un escalier sous-diagonal d'ordre (n, k) avec $1 \leq k \leq n$ est une double suite d'entiers de : $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$ telle que :

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q-1} < \alpha_q = n$$

$$0 < \beta_1 < \dots < \beta_{q-1} \leq \beta_q = k$$

$$\alpha_\ell \geq \beta_\ell \text{ pour tout } \ell < q$$

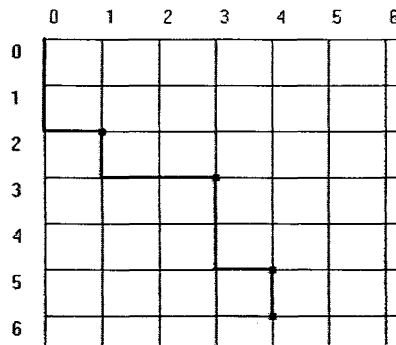
où q est un entier non nul – en fait $q \leq \min(n, k + 1)$ – qui représente le nombre de points nécessaires pour caractériser complètement un escalier sous-diagonal donné.

L'escalier est représenté par un chemin situé sous la diagonale principale. Les parties saillantes des marches sont les points de coordonnées $(0, 0)$,

$(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_{q-1}, \beta_{q-1})$; le point (α_q, β_q) étant le point d'arrêt du chemin qu'il soit « saillant » ou non (il est à noter que dans la définition initiale $\beta_{q-1} < \beta_q$ et le chemin se termine obligatoirement par une partie saillante). Un chemin est donc entièrement défini par son nombre de parties saillantes et la liste de celles-ci.

Chandon *et al.* proposent la représentation d'un escalier sous-diagonal dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en orientant l'axe vertical vers le bas.

Exemple : soit l'escalier sous-diagonal défini par la double suite $(2, 1) (3, 3) (5, 4) (6, 4)$, sa représentation est :



La proposition suivante (toujours due à Chandon *et al.*) achève de caractériser le rapprochement entre escaliers sous diagonaux et quasi-ordres :

PROPOSITION 1 : Soit un ordre O sur les n éléments d'un ensemble X . Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n candidats classés selon O . L'application qui à tout escalier sous-diagonal d'ordre (n, n) caractérisé par la double suite $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$ associe la relation de matrice $A = [a_{ji}]$ et définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ s'il existe } k \text{ tel que } \alpha_{k-1} < i \leq \alpha_k \text{ et } j > \beta_{k-1} \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{avec } \alpha_0 = 0)$$

est une bijection de l'ensemble des escaliers sous-diagonaux d'ordre (n, n) sur l'ensemble des quasi-ordres ayant O comme ordre sous-jacent.

4.2. Quasi-ordre à distance minimale pour un ordre sous-jacent donné

Soit un ordre O donné sur les n objets de X . Parmi les quasi-ordres ayant O comme ordre sous-jacent, nous nous proposons de rechercher celui qui minimise la distance au profil.

Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n candidats classés selon O et Q^0 le quasi-ordre recherché.

Par définition $\Delta(Q^0, \Pi) \leq \Delta(O, \Pi)$.

Soit A^0 la matrice de Q^0 , le gain en distance correspond à l'ensemble des « 1 » situés sous la diagonale dans A^0 . Nous pouvons écrire :

$$\Delta(Q^0, \Pi) - \Delta(O, \Pi) = \sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij}^0 (T - 2a_{ij}^\Pi) \leq 0.$$

Chercher Q^0 , c'est donc chercher parmi l'ensemble des quasi-ordres Q dont O est ordre sous-jacent celui qui minimise $\Delta(Q, \Pi)$ donc la quantité :

$$\Delta(Q, \Pi) - \Delta(O, \Pi) = \sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij} (T - 2a_{ij}^\Pi).$$

Soit un point de coordonnées (α, β) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $1 \leq \beta \leq \alpha \leq n$. Nous noterons $E_{\alpha\beta}$ l'ensemble des escaliers sous-diagonaux d'ordre (α, β) .

Soit $e \in E_{\alpha\beta}$, caractérisé par $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$. Nous pouvons associer à e , la relation de matrice A définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ s'il existe } k \text{ tel que } \alpha_{k-1} < i \leq \alpha_k \text{ et } j > \beta_{k-1} \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0)$$

Nous noterons une telle matrice $A = \phi(e)$.

Par suite, nous définissons le poids du chemin e par :

$$\zeta(e) = \sum_{\alpha \geq i > j \geq 1} a_{ij} (T - 2a_{ij}^\Pi).$$

Associations maintenant à tout point $(\alpha, \beta)_{1 \leq \beta \leq \alpha \leq n}$ le poids $\zeta(\alpha, \beta)$ défini par : $\zeta(\alpha, \beta) = \min_{e \in E_{\alpha\beta}} \zeta(e)$.

PROPOSITION 2 :

$$\zeta(\alpha, \beta) = \min(\zeta(\alpha, \beta - 1); \zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^\Pi)).$$

Preuve :

• Soit $e \in E_{\alpha, \beta-1}$ caractérisé par $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$. Prolongeons cet escalier jusqu'à (α, β) en un chemin e' .

$$e' \text{ est alors caractérisé par } (\alpha'_\ell, \beta'_\ell)_{1 \leq \ell \leq q} \text{ avec : } \begin{cases} \alpha'_\ell = \alpha_\ell, & \forall \ell \\ \beta'_\ell = \beta_\ell, & \forall \ell < q \\ \beta'_q = \beta_q + 1 = \beta. \end{cases}$$

Soit $A = \phi(e)$ et $A' = \phi(e')$. Pour tout $k = 1$ à q , $\alpha_k = \alpha'_k$ et $\beta_{k-1} = \beta'_{k-1}$.

Partant, pour tout couple (i, j) :

$$(\alpha_{k-1} < i \leq \alpha_k \text{ et } j > \beta_{k-1}) \Leftrightarrow (\alpha'_{k-1} < i \leq \alpha'_k \text{ et } j > \beta'_{k-1})$$

d'où $a_{ij} = a'_{ij}$ pour tout i et tout j et $A = A'$

$$\zeta(e') = \sum_{\alpha \geq i > j \geq 1} a'_{ij} (T - 2a_{ij}^{\Pi}) = \sum_{\alpha \geq i > j \geq 1} a_{ij} (T - 2a_{ij}^{\Pi}) = \zeta(e).$$

Nous en déduisons notamment :

$$\zeta(\alpha, \beta - 1) \geq \zeta(\alpha, \beta) \quad (2)$$

en effet, il existe $e \in E_{\alpha, \beta-1}$ tel que $\zeta(\alpha, \beta - 1) = \zeta(e)$ donc il existe $e' \in E_{\alpha, \beta}$ tel que $\zeta(e') = \zeta(\alpha, \beta - 1) = \zeta(e)$.

• Soit $e \in E_{\alpha-1, \beta}$ caractérisé par $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$. Prolongeons cet escalier jusqu'à (α, β) en un chemin e' .

e' est alors caractérisé par $(\alpha'_\ell, \beta'_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha'_\ell = \alpha_\ell, & \forall \ell < q \\ \beta'_\ell = \beta_\ell, & \forall \ell \\ \alpha'_q = \alpha_q + 1 = \alpha. \end{cases}$$

Soit $A = \phi(e)$ et $A' = \phi(e')$. Pour tout $k = 1$ à q , $\alpha_k \leq \alpha'_k$ et $\beta_{k-1} = \beta'_{k-1}$. Ainsi, pour tout couple (i, j) :

$$(\alpha_{k-1} < i \leq \alpha_k \text{ et } j > \beta_{k-1}) \Rightarrow (\alpha'_{k-1} < i \leq \alpha'_k \text{ et } j > \beta'_{k-1})$$

d'où $a_{ij} = 1 \Rightarrow a'_{ij} = 1$ (pour tout i et tout j).

Pour $i = \alpha'_q = \alpha$, $a_{ij} = 0$ et $a'_{ij} = 1$ si $j > \beta_{q-1} = \beta$ d'où

$$\zeta(e') - \zeta(e) = \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi})$$

et par suite :

$$\zeta(\alpha, \beta) \leq \zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi}) \quad (3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Leftrightarrow \zeta(\alpha, \beta) \leq \min(\zeta(\alpha, \beta - 1); \zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi})).$$

• Soit l'escalier sous-diagonal $e^0 \in E_{\alpha, \beta}$ tel que $\zeta(\alpha, \beta) = \zeta(e^0)$. e^0 passe soit par le point de coordonnées $(\alpha - 1, \beta)$, soit par $(\alpha, \beta - 1)$:

– si e^0 passe par $(\alpha, \beta - 1)$ alors il existe un chemin $e \in E_{\alpha, \beta-1}$ tel que $\zeta(e) = \zeta(e^0)$ et $\zeta(\alpha, \beta - 1) \leq \zeta(\alpha, \beta)$

– si e^0 passe par $(\alpha - 1, \beta)$ alors il existe un chemin $e \in E_{\alpha-1, \beta}$ tel que $\zeta(e) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi}) = \zeta(e^0)$ et $\zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi}) \leq \zeta(\alpha, \beta)$

d'où

$$\zeta(\alpha, \beta) \geq \min(\zeta(\alpha, \beta - 1); \zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi}))$$

COROLLAIRE 1 : Soit l'escalier sous-diagonal $e^0 \in E_{\alpha, \beta}$ tel que

$$\zeta(\alpha, \beta) = \zeta(e^0).$$

– Si $\zeta(\alpha, \beta - 1) = \zeta(\alpha, \beta)$ alors il existe un escalier $e \in E_{\alpha, \beta-1}$ se prolongeant en e^0 .

– Si $\zeta(\alpha - 1, \beta) + \sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi}) = \zeta(\alpha, \beta)$ alors il existe un escalier $e \in E_{\alpha-1, \beta}$ se prolongeant en e^0 .

PROPOSITION 3 : $\zeta(n, n) = \Delta(Q^0, \Pi) - \Delta(O, \Pi)$

$\zeta(n, n) = \min_{e \in E_{n, n}} (\sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij} (T - 2a_{ij}^{\Pi}))$ avec e caractérisé par $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{1 \leq \ell \leq q}$ et $A = [a_{ij}]$ définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ s'il existe } k \text{ tel que } \alpha_{k-1} < i \leq \alpha_k \text{ et } j > \beta_{k-1} \\ = 0 \text{ sinon} \quad (\text{avec } \alpha_0 = 0) \end{cases}$$

D'après la Proposition 1, l'application associant un escalier sous-diagonal à la matrice d'un quasi-ordre est une bijection.

Il existe donc $e^0 \in E_{n, n}$ unique associé à Q^0 , tel que, par définition de Q^0 :

$$\zeta(e^0) = \sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij}^0 (T - 2a_{ij}^{\Pi}) = \min_{e \in E_{n, n}} (\sum_{n \geq i > j \geq 1} a_{ij} (T - 2a_{ij}^{\Pi}))$$

Par les Propositions 2 et 3, nous pouvons calculer $\Delta(Q^0, \Pi)$. L'existence de l'escalier sous-diagonal e^0 correspondant est donné par le Corollaire 1.

4.3. Algorithme

Le principe de l'algorithme reprend point par point ce qui vient d'être énoncé. La première étape consiste à construire de manière itérative les poids relatifs aux points sous-diagonaux depuis $(0, 0)$ jusqu'à (n, n) . Ensuite, l'escalier correspondant à Q^0 est construit en cherchant à chaque point de coordonnées (α, β) l'antécédent parmi $(\alpha - 1, \beta)$ et $(\alpha, \beta - 1)$. A

chaque point, nous sommes donc capables d'associer le meilleur chemin en fonction des chemins optimaux associés à ces prédecesseurs (points situés immédiatement au dessus et à gauche); en cela l'algorithme relève bien entendu de la programmation dynamique.

Initialisation des poids

Pour $\alpha = 1$ à n

le poids $(\alpha, 0)$ est calculé directement par $\zeta(\alpha, 0) = \sum_{\alpha \geq i > j > 0} (T - 2a_{ij}^{\Pi})$

Pour $\alpha = 1$ à n et $\beta = 1$ à α

le poids $\zeta(\alpha, \beta)$ est initialisé par : $\sum_{\alpha > j > \beta} (T - 2a_{\alpha j}^{\Pi})$

Calcul des $\zeta(\alpha, \beta)$

Pour $\alpha = 1$ à n et $\beta = 1$ à α

$$\zeta(\alpha, \beta) = \min(\zeta(\alpha, \beta - 1); \zeta(\alpha - 1, \beta) + \zeta(\alpha, \beta))$$

$m(\alpha, \beta) = 1$ si $\zeta(\alpha, \beta) = \zeta(\alpha, \beta - 1)$ (marquage permettant de repérer l'escalier e^0)

$= 0$ sinon

Construction des arcs sous-diagonaux de Q^0

$\alpha = \beta = n$

Tant que $\alpha > 0$

si $m(\alpha, \beta) = 0$ alors $\alpha = \alpha - 1$

sinon

pour $k = \beta$ à α

$$q_{k\beta}^0 = 1$$

$\beta = \beta - 1$

Chacune des trois phases tourne en $O(n^2)$.

4.4. Exemple

L'exemple présenté est issu d'une épreuve de jugement sensoriel multicritère effectuée sur des jus de pommes. 7 jus de pommes (numéroté de 1 à 7) ont été évalués par 12 juges.

La matrice A^Π est de la forme :

$$A^\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 4 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 11.42 & 10.71 & 9.55 & 9.98 & 10.03 & 9.12 \\ 9.15 & 12 & 9.94 & 8.35 & 8.20 & 9.80 & 9.43 \\ 7.26 & 9.31 & 12 & 8.30 & 7.33 & 8.80 & 8.33 \\ 7.37 & 7.54 & 8.84 & 12 & 7.67 & 8.86 & 8.49 \\ 5.39 & 6.09 & 6.31 & 6.01 & 12 & 6.53 & 6.58 \\ 6.54 & 8.19 & 8.49 & 8.61 & 8.16 & 12 & 9.68 \\ 0.90 & 0.00 & 2.32 & 5.38 & 2.16 & 7.41 & 12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

où l'ordre (6 4 3 7 2 1 5) adopté pour les colonnes n'est pas l'ordre total médian mais un ordre fourni par une heuristique dite de « construction itérative » (Lavalie [1994]).

Nous allons chercher le quasi-ordre le plus proche du profil qui respecte cet ordre.

A la fin de la deuxième phase de l'algorithme, nous obtenons l'ensemble des poids des coordonnées sous-diagonales :

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0							
1	0	0						
2	-6.3	-6.3	-6.3					
3	-15.44	-15.44	-15.44	-15.44				
4	-26.94	-26.94	-26.94	-26.94	-26.94			
5	-26.54	-27.76	-27.76	-27.76	-27.76	-27.76		
6	-46.52	-46.66	-46.66	-46.66	-46.66	-46.66	-46.66	
7	-10.86	-21.2	-33.2	-40.56	-41.8	-49.48	-49.48	-49.48

Les flèches représentent, pour chaque point (α, β) , l'information donnée par $m(\alpha, \beta)$ dans l'algorithme : en remontant les flèches depuis le point de coordonnées (n, n) nous pouvons construire Q^0 , le quasi-ordre à distance minimum du profil ayant l'ordre sous-jacent considéré ici.

La phase 3 entraîne finalement la construction de la matrice A^0 suivante :

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous retrouvons ici la matrice du quasi-ordre :

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & 4 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

où chaque trait horizontal représente un ensemble d'objets non dissociés. Les quatre premiers jus de pommes sont donc non dissociés ($x_i I x_j$ pour tout i et $j \in \{6, 4, 3, 7\}$), le premier (n° 6) étant, par exemple, préféré strictement aux 3 derniers.

5. RECHERCHE D'UN QUASI-ORDRE PROCHE D'UN PROFIL DE RELATIONS

Nous présentons brièvement les possibilités d'applications de la méthode présentée au paragraphe 4. Pour plus de détails sur chacune de ces applications et sur les performances des algorithmes, voir Lavialle [1996].

5.1. Utilisation de quelques ordres particuliers

Nous venons de décrire une méthode qui permet de trouver le quasi-ordre le plus proche d'un profil de relations binaires ou floues à partir d'un ordre sous-jacent donné. Il est bien entendu que cette méthode doit être initialisée par un ordre.

La première idée est d'initialiser l'algorithme avec un ordre particulier possédant de bonnes caractéristiques; les ordres qui ont été utilisés sont l'ordre des scores et l'ordre médian.

Pour l'ordre des scores, l'idée poursuivie est d'obtenir un algorithme très simple et peu coûteux. Pour cela, nous proposons d'utiliser, comme point de départ à une amélioration locale, l'ordre induit par les scores décroissants.

Le score d'un objet dans le profil Π se définit par : $s(i) = \sum_{j \neq i} a_{ij}^{\Pi}$.

Naturellement, nous pouvons chercher, comme ordre de base, le meilleur ordre possible, c'est-à-dire l'ordre le plus proche au sens de la distance que nous utilisons.

Pour cela, il est possible d'utiliser un algorithme arborescent (Barthélemy, Guénoche et Hudry [1989]) qui nous donne tout ou partie des solutions optimales. Nous remarquons que le meilleur ordre au sens de la distance utilisée est rarement sous-jacent au quasi-ordre le plus proche; par suite, les solutions dégagées ne sont pas très satisfaisantes.

5.2. Deux algorithmes fondés sur le recuit simulé

Hudry [1989] propose l'utilisation d'un recuit simulé pour rechercher un ordre ou directement un quasi-ordre à partir d'un profil de relations binaires.

L'algorithme proposé est dérivé d'un algorithme de recherche de l'ordre à distance minimum d'un profil de relations binaires. Hudry [1989] le généralise à la recherche des quasi-ordres, nous le généralisons ici au cas d'un profil de relations floues.

Chaque objet x_i est représenté par un intervalle sur la droite réelle, que nous noterons $[f(i) - \varphi/2, f(i) + \varphi/2]$.

En terme de solution initiale, nous adopterons là encore le quasi-ordre à distance minimum ayant l'ordre des scores comme ordre sous-jacent. Partant de ce quasi-ordre il est possible de construire une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un réel positif φ tels que :

$$\forall x_i, \quad x_j \in X^2 \text{ i } Q j \quad \Leftrightarrow \quad f(i) \geq f(j) - \varphi$$

où Q est le quasi-ordre initial.

Les transformations utilisées consistent à multiplier la longueur des intervalles par un facteur allant de 0,5 à 2 ou à recalculer la coordonnée $f(i)$ d'un produit i donné dans l'intervalle $[\min_i f(i) - \varphi; \max_i f(i) + \varphi]$.

Au vu des résultats expérimentaux et des indications bibliographiques (Hudry [1989]), nous avons opté pour un nombre d'étapes égal à 50, un nombre d'essais par étape égal à $5n$. La température initiale est calculée d'après la méthode de Aragon et coll. [1985]; le taux de décroissance est égal à 0,9.

Nous proposons également un nouvel algorithme en utilisant le principe de recherche d'un ordre et en associant à chaque ordre ainsi analysé la distance au meilleur quasi-ordre correspondant; cet algorithme consiste donc à rechercher le meilleur ordre sous-jacent (Lavialle [1996]).

L'idée de cet algorithme est d'utiliser le recuit simulé non pas pour chercher directement un quasi-ordre mais pour chercher un « bon » ordre sous-jacent.

Pour cela nous utilisons l'algorithme décrit précédemment mais simplement appliqué à la recherche d'ordre; à chaque essai, nous cherchons un ordre S' dans le voisinage de S , l'ordre courant, puis nous calculons le quasi-ordre à distance minimum du profil ayant S' comme ordre sous-jacent; la distance correspondante devient l'évaluation $\phi(S')$.

La transformation utilisée pour chercher S' dans le voisinage de S consiste à choisir un objet dans l'ordre S puis à le replacer au hasard, à une autre position.

Les paramètres utilisés ainsi que le principe du calcul de T_{ini} sont identiques à ceux du premier algorithme.

5.3. Résultats expérimentaux

Nous sommes capables pour des tailles de problème allant jusqu'à 15 produits (dans certains cas) de trouver la solution optimale à la recherche du quasi-ordre médian par l'intermédiaire d'un algorithme arborescent (Lavialle [1994]). Cette solution nous permettra de fournir une borne inférieure à laquelle les solutions des heuristiques pourront être aisément comparées.

Nous disposons également d'une borne supérieure grâce à l'utilisation, dans chacun des algorithmes, de la phase de recherche du quasi-ordre. Cette phase nous garantit une distance au profil inférieure ou égale à la distance entre le profil et la solution consistant à mettre l'ensemble des produits à égalité.

Chaque distance sera donc exprimée par un indice θ défini par :

$$\theta = \frac{\Delta(\Pi, Q) - \Delta(\Pi, Q^0)}{\Delta(\Pi, Q^{\max}) - \Delta(\Pi, Q^0)}$$

où Q est la solution donnée par l'heuristique,

Q^0 est la solution optimale donnée par l'algorithme arborescent,

$Q^{\max}$ est le quasi-ordre dans lequel tous les produits sont à égalité.

Deux types de jeux d'essais ont été utilisés pour évaluer les performances des heuristiques :

- Des matrices de préférences ont été directement construites de manière aléatoire. Ces matrices ne sont pas, bien entendu, caractéristiques des matrices

de préférences classiques en ce sens que le nombre de « conflits » y est généralement très important. Ces jeux de données seront nommés « jeux aléatoires ».

– Des ensembles de notes multicritères ont été tirés au sort. L'utilisation de la phase d'agrégation partielle d'ELECTRE III (Skalka, Bouyssou, Vallée [1992]) a ensuite conduit à construire des matrices de préférences plus classiques. Les jeux de données ainsi produits seront nommés « jeux Electre ».

Dix jeux d'essais de chaque type ont été tirés au sort pour des tailles de problèmes allant de 6 à 11 produits pour les jeux aléatoires et de 6 à 15 produits pour les jeux-Electre.

Pour chaque jeu de données quatre algorithmes ont donc été testés :

– Le premier consiste à rechercher l'ordre des scores sur la matrice du profil. Cet ordre est non nécessairement unique en théorie mais toujours dans les jeux utilisés (matrices floues). Dans un second temps, la phase de recherche quasi-ordre est utilisée. Le temps de calcul est très inférieur à la seconde (matériel utilisé : PC 486 à 66 MHz).

– Le deuxième algorithme utilise l'ordre médian du profil. Un seul ordre est recherché sur le profil des matrices floues; cet ordre est supposé unique (ce qui n'est, en théorie, pas toujours le cas). Le temps de calcul nécessaire pour les problèmes étudiés n'est pas très élevé (de l'ordre de 2 secondes au maximum pour les jeux aléatoires de taille 11).

– Le circuit simulé proposé par Hudry et recherchant directement le quasi-ordre conduit à des temps de calcul voisin de 5 secondes pour les problèmes de taille 15.

– Pour le second recuit, la recherche du quasi-ordre à chaque essai augmente le temps de calcul (12 secondes pour des problèmes de taille 15).

Jeux « aléatoires »

Nous avons indiqué à la figure 2, sous forme de Box-Plot⁽⁴⁾, les distributions des indices θ obtenus pour chacun des algorithmes sur l'ensemble des jeux d'essais aléatoires.

Les deux algorithmes les moins performants sont ceux qui ont pour principe l'amélioration locale de l'ordre des scores d'une part (Scores) et de l'ordre médian d'autre part (OrdMed).

⁽⁴⁾ Représentation graphique des statistiques de rang sur une série de données (min, max, médiane, 1^{er} et 3^e quartile).

Le recuit simulé permettant une recherche directe du quasi-ordre (Hudry [1989]) (Rec1) donne des résultats sensiblement plus performants.

Le recuit simulé permettant la recherche du meilleur ordre sous-jacent (Rec2) est, de loin, la plus efficace des heuristiques en terme de distance à la solution optimale. Sur les jeux d'essais aléatoires, il a conduit à la solution optimale dans près de 80 % des cas (tableau I) avec, dans le pire des cas un indice de distance égal à 0,28.

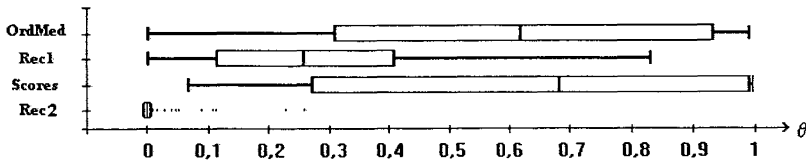


Figure 2. - Distribution des indices de performance - Jeux aléatoires.

TABLEAU I

	Performances des algorithmes (en %)				
	$\theta = 0$	$0 < \theta < 0,25$	$0,25 \leq \theta < 0,5$	$0,5 \leq \theta < 0,75$	$0,75 \leq \theta$
OrdMed	0	17	20	20	43
Scores	0	17	13	30	40
Rec1	0	47	37	13	3
Rec2	77	20	3	0	0

Jeux « Electre »

Compte tenu des coefficients et des seuils choisis au cours de la phase de surclassement, nous obtenons des matrices de préférences au sein desquelles les contradictions (*i.e.* les circuits par exemple) sont moins nombreux que dans les matrices aléatoires.

Disons simplement que ces jeux « Electre » sont censés représenter des jeux de données obtenus plus classiquement. De fait, la première conséquence en est que la borne supérieure fixée en mettant l'ensemble des produits à égalité est ici moins intéressante que dans le premier cas; le quasi-ordre correspondant est, en effet, toujours une très mauvaise solution.

La figure 3 donne les distributions des indices de distance pour les quatre heuristiques.

Pour ces jeux plus réalistes, il s'avère que le recuit simulé recherchant le meilleur ordre sous-jacent est une heuristique extrêmement efficace, puisqu'il a conduit à l'obtention de la solution optimale dans 99 cas sur 100.

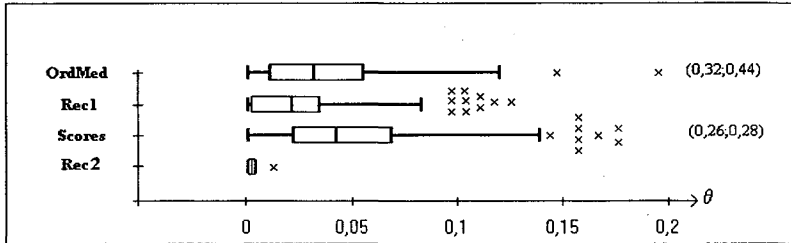


Figure 3. – Distribution des indices de performance – Jeux « ELECTRE ».

Étude de la stabilité des solutions pour les heuristiques fondées sur le circuit simulé

Les solutions données par l'utilisation du principe du recuit simulé sont, par nature, aléatoires. Ainsi, dans les deux points précédents, nous avons indiqué la performance obtenue en appliquant chaque recuit simulé une et une seule fois pour chaque jeu d'essai.

Nous nous proposons ici de reprendre chaque jeu de données du type aléatoire pour essayer de cerner la stabilité des solutions fournies.

Chaque jeu est testé à cinq reprises pour chaque algorithme. Nous notons γ l'indice de stabilité défini par :

$$\gamma = \frac{\max_i \Delta(\Pi, Q_i) - \min_i \Delta(\Pi, Q_i)}{\Delta(\Pi, Q^{\max}) - \min_i \Delta(\Pi, Q_i)}$$

où Q_i est le quasi-ordre trouvé lors de la i -ième répétition ($i = 1$ à 5).

γ représente l'écart relatif maximum entre la meilleure et la moins bonne solution trouvée lors des 5 essais.

Le tableau II indique la répartition des indices sur 60 jeux d'essais utilisés pour chacune des deux heuristiques.

Le recuit simulé recherchant le meilleur ordre sous-jacent donne donc la plupart du temps des solutions très voisines. Ceci confirme les bonnes performances mises en évidence lors des deux précédents paragraphes.

TABLEAU II

Répartition des indices de stabilité sur 60 jeux d'essais.

Indice γ	Algorithme de recherche directe	Algorithme de recherche du meilleur ordre sous-jacent
[0; 0.2]	8	53
dont 0	0	29
[0.2; 0.4]	17	7
[0.4; 0.6]	16	0
[0.6; 0.8]	13	0
[0.8; 1]	6	0

5.4. Conclusion

Dans ce papier, une méthode de recherche d'un quasi-ordre d'un profil de relations de préférences a été présentée. L'apport essentiel concerne la possibilité de trouver le quasi-ordre le plus proche du profil pour un ordre sous-jacent donné. Cette procédure a été utilisée pour améliorer des ordres particuliers (ordres des scores, ordre médian); elle a également été implantée au sein d'un algorithme de recuit simulé qui recherche le meilleur ordre sous-jacent. Parallèlement, un autre recuit simulé permettant la recherche directe d'un quasi-ordre proche du profil a été testé.

L'algorithme le plus efficace est sans conteste l'algorithme fondé sur le principe du recuit simulé et recherchant le meilleur ordre sous-jacent. Pour les jeux complètement aléatoires, il a conduit à la solution optimale dans près de 80 % des cas; pour les jeux Electre, il n'a été mis en défaut qu'une seule fois pour 100 jeux.

BIBLIOGRAPHIE

- C. R. ARAGON, D. S. JOHNSON, L. A. MACGEACH et C. SCHEVON, Optimisation by simulated annealing: an experimental evaluation, *Actes du 12^e Colloque International de Programmation Mathématique*, Boston, 1985.
- J. P. BARTHÉLEMY, A. GUÉNOCHE et O. HUDRY, Median linear orders: heuristics and a branch and bound algorithm, *European Journal of Operational Research*, 1989, n° 42, p. 313-325.
- J. P. BARTHÉLEMY et B. MONJADET, The median procedure in cluster analysis and social choice theory, *Mathematical Social Sciences*, 1981, 1, p. 235-267.
- J. L. CHANDON, J. LEMAIRE et J. POUGET, Dénombrement des quasi-ordres sur un ensemble fini, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1978, n° 62, p. 61-80.

- R. A. DEAN et G. KELLER, Natural partial order, *Canadian Journal of Mathematics*, 1968, 20, p. 535-554.
- P. C. FISHBURN, *Utility theory for decision making*, John Wiley and Sons, New York, 1970.
- P. C. FISHBURN, *Interval orders and interval graphs, a study of partially ordered sets*, John Wiley and Sons, New York, 1985.
- O. HUDRY, Recherche d'ordres médian : complexité, algorithmique et problèmes combinatoires Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, spécialité Informatique, Paris, 1989, 141 p.
- E. JACQUET-LAGREZE, La modélisation des préférences : préordres, quasi-ordres et relations floues, Thèse de doctorat du 3^e cycle de Mathématiques Appliquées, Université de Paris-V, 1975, 241 p.
- O. LAVIALLE, Décision sensorielle multicritère : classement de produits soumis à des jugements hédoniques multicritères, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux-I, spécialité Informatique, 1994, 168 p.
- O. LAVIALLE, Quelques solutions algorithmiques pour la recherche d'un quasi-ordre proche d'un profil de relations floues, (à paraître), 1996.
- R. D. LUCE, Semi-orders and a theory of utility discrimination, *Econometrica*, 1956, 24, p. 178-191.
- J. F. MARCOTORCHINO et P. MICHAUD, Heuristic approach of the similarity aggregation problem, *Methods of Operational Research*, 1981, n° 43, p. 395-404.
- J. MENUET, *Quasi-ordres et modélisation des préférences*, SEMA (Metra International), Direction Scientifique, Note de travail, 1974, n° 198.
- P. MICHAUD et J. F. MARCOTORCHINO, Modèles d'optimisation en analyse des données relationnelles, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1979, n° 67, p. 7-38.
- B. MONJARDET, Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1978, n° 63, p. 51-82.
- B. ROY, *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Collection Gestion, Economica, Paris, 1985, 423 p.
- D. SCOTT et P. SUPPES, Foundational aspects of theorie of measurement, *The Journal of Symbolic Logic*, 1958, n° 2, p. 113-128.
- J. M. SKALKA, D. BOUYSSOU et D. VALLÉE, ÉLECTRE III et IV : aspects méthodologiques et guide d'utilisation, Document du Lamsade, Université de Paris-Dauphine, 4^e édition, 1992, n° 25, 102 p.
- Y. WAKABAYASHI, Aggregation of binary relations: algorithmic and polyhedral investigations, Thèse de doctorat de l'Université d'Augsburg, 1986, 191 p.

