RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SAMIR ESSID

Choix dans le risque et effet de certitude : un modèle axiomatique général

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 31, n° 3 (1997), p. 231-267

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1997__31_3_231_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 31, n° 3, 1997, p. 231 à 267)

CHOIX DANS LE RISQUE ET EFFET DE CERTITUDE : UN MODÈLE AXIOMATIQUE GÉNÉRAL (*)

par Samir ESSID ([1])

Communiqué par Jean-Yves JAFFRAY

Résumé. – *Devant l'incapacité du modèle de von Neumann et Morgenstern à prendre en compte l'effet de certitude, un modèle de traitement rationnel de l'incertain objectivement probabilisé a été établi par J.-Y. Jaffray. Cependant, ce modèle ne concerne que les choix dans l'ensemble des loteries (lois de probabilité à support fini). Nous proposons dans cet article une généralisation de ce dernier modèle au cas où l'ensemble de choix est l'ensemble de toutes les lois de probabilité sur l'espace des résultats. Nous construisons le modèle à partir de quatre axiomes ayant chacun une portée mathématique et une interprétation précises. Selon ce dernier modèle, les choix sont partiellement déterminés par un arbitrage entre le niveau de sécurité et l'utilité espérée.*

Mots clés : théorie de la décision, risque, utilité espérée, niveau de sécurité.

Abstract. – *Due to the inability of the classical model of von Neumann and Morgenstern to take into account the certainty effect, Jaffray has developed a model of rational behavior under objectively probabilized uncertainty. However, the latter model only covers the case of lotteries (probability distributions of finite support). In this paper, we propose a generalisation of this model to the case of arbitrary probability distributions, based on four axioms having a precise mathematical content and interpretation. We show that choices are partially determined by an arbitration between the level of security and the expected utility.*

Keywords : decision theory, risk, expected utility, security factor.

INTRODUCTION

La théorie de l'utilité espérée (EU) développée par von Neumann et Morgenstern [30] (vN-M) a été acceptée généralement comme un modèle normatif de choix rationnel (Keeney et Raiffa [23]) ; les individus rationnels devront obéir aux axiomes de cette théorie (vN-M) ; elle a été aussi largement appliquée comme modèle descriptif (Arrow [3], Friedman et Savage [17]). Sa popularité s'explique par sa simplicité : le calcul d'un seul nombre,

(*) Reçu en décembre 1994.

([1]) Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de Tunis, Avenue 7 novembre, Tunis 1060, Tunisie.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/97/03/$ 7.00

représentant un ensemble de données numériques, et sa comparaison à d'autres nombres calculés par la même expression permet au décideur de choisir sa décision optimale. A la suite de plusieurs expériences (Allais [1], Kahneman et Tversky [21], Cohen et Jaffray [5], Karmarkar [22], Cohen [6], etc.), il paraît admis aujourd'hui que le modèle EU, fort séduisant, ne peut décrire le comportement d'un homme réel en situation de risque. Beaucoup restent donc sceptiques quant à la portée de ce modèle.

Ainsi, devant la présence de lacunes du point de vue descriptif, d'autres modèles alternatifs de décision dans le risque ont été proposés afin de remédier aux principales insuffisances du modèle EU (Kahneman et Tversky [21], Chew [4], Quiggin [28], Machina [25], Segal [29], Yaari [31], Allais [2], Jaffray [20], Gilboa [18] et Cohen [6]).

Plusieurs auteurs ont attribué le fait que les individus se comportaient en contradiction avec le critère de maximisation de l'espérance mathématique d'utilité à l'existence de plusieurs effets dont l'un des principaux est l'effet de certitude. Des violations systématiques d'un des axiomes fondamentaux de la théorie EU peuvent s'expliquer en grande partie par l'existence de ce dernier phénomène psychologique qui a été largement discuté et illustré par plusieurs auteurs (Allais [1], Kahneman et Tversky [21], Lopes [24], McCord et de Neufville [27], etc.). Il joue aussi un rôle important dans l'existence des biais systématiques rencontrés au cours de l'évaluation des fonctions d'utilité (McCord et de Neufville [27], Cohen et Jaffray [5], Essid *et al.* [9], etc.). En particulier, Kahneman et Tversky [21] ont défini cet effet de certitude comme l'attirance des décideurs pour les résultats considérés comme certains par rapport aux résultats seulement hautement probables. Le paradoxe d'Allais et ses variantes illustrent de manière claire l'existence de cet effet de certitude.

Paradoxe d'Allais : L'expérience proposée initialement par Allais (1953) distinguait les deux situations de choix suivantes :

$$\begin{array}{ll} \qquad\qquad \text{I} & \qquad\qquad \text{II} \\ \text{A : 1 million de francs avec certitude} & \text{D : } 0,1 \text{ chance d'avoir 5 millions} \\ \text{B : } \begin{cases} 0,1 \text{ chance d'avoir 5 millions} \\ 0,89 \text{ chance d'avoir 1 million} \end{cases} & \text{C : } 0,11 \text{ chance d'avoir 1 million} \end{array}$$

La majorité des sujets préfèrent A à B dans I, vraisemblablement du fait que le fait de gagner avec certitude est prépondérant. En même temps, ils préfèrent D à C dans II : à gain minimum égal (nul), le gain maximum élevé de la perspective D, malgré sa faible probabilité, fait pencher la décision en faveur de D. Il paraît raisonnable d'être sensible au gain minimum garanti par chaque perspective : ce couple de préférences est cependant incompatible avec le modèle EU.

Jaffray [20] et Gilboa [18] ont défini l'effet de certitude comme étant la conséquence de l'attention particulière portée par le décideur au résultat minimal offert par chaque décision, c'est-à-dire au niveau de sécurité qu'elle garantit. Ils ont proposé, indépendamment, un modèle axiomatique prescriptif de choix dans le risque compatible avec l'effet de certitude : le modèle (m, EU). L'axiomatique du modèle (m, EU) est une version affaiblie de celle de vN-M [30]. Pour chaque loterie (loi de probabilité à support fini) il existe une conséquence ou un gain « minimal » que le décideur est certain d'obtenir. Soit c_0 le gain minimal de la loterie donnant c_i avec probabilité p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La valeur de cette loterie est donnée chez Jaffray [20] par la fonction :

$$a(c_0) \sum_{i=1}^{n} p_i [(u(c_i) - u(c_0)] + v(c_0). \tag{1}$$

Cette dernière expression fait clairement apparaître le rôle du gain minimal dans l'évaluation des loteries. Ainsi, le modèle (m, EU) est un double critère combinant l'utilité espérée des loteries et leur niveau de sécurité. Le niveau de sécurité joue donc un rôle important. Dans le cas extrême il peut être déterminant, et ce n'est que lorsque les niveaux de sécurité des loteries sont équivalents qu'intervient l'utilité espérée afin de départager ces loteries.

Toutefois, le modèle (m, EU), qui généralise sur le plan formel le modèle EU et qui possède, par conséquent, une meilleure capacité descriptive que ce dernier, a été établi en prenant pour ensemble de choix l'ensemble des loteries. La généralisation du modèle (m, EU) à des lois de probabilité quelconques est l'objet de ce travail. La difficulté majeure est l'absence éventuelle de résultats minimaux pour les lois quelconques. Nous allons montrer qu'on peut surmonter cette difficulté en construisant une fonction d'utilité sur l'espace des résultats et en associant à toute loi un élément de l'image de l'ensemble des résultats par cette dernière fonction d'utilité. Nous commençons d'abord par présenter un système formé de quatre axiomes ayant chacun une portée mathématique et une interprétation précises. Les trois premières hypothèses ne sont autre que les axiomes de vN-M sous une forme affaiblie. Au début, nous caractérisons les préférences à niveau de sécurité donné, puis nous définissons ensuite les recouvrements des préférences et les recouvrements des préférences connexes, et enfin nous aboutissons à une représentation générale. Ainsi, selon le modèle proposé, les choix sont partiellement déterminés par un arbitrage entre le niveau de sécurité et l'utilité espérée.

LE MODÈLE

Un décideur est dit en situation de risque s'il doit choisir parmi des décisions dont le résultat dépendra de la réalisation ou non d'événements dont il connaît les probabilités. Chaque décision d induit sur l'ensemble des résultats $\mathcal{C}$ une mesure de probabilité image P_d.

Nous supposons qu'il existe une relation de préférence $\succsim^{\mathcal{D}}$ dans l'ensemble des décisions $\mathcal{D}$; cette relation induit sur l'ensemble $\mathcal{P}$ de toutes les lois sur $\mathcal{C}$ une relation de préférence que nous notons $\succsim$ définie par :

$$P \succsim Q \Leftrightarrow [\exists\, d,\, d' \in \mathcal{D} \text{ tel que } P = P_d,\, Q = P_{d'} \text{ et } d \succsim^{\mathcal{D}} d'].$$

Cette relation n'hérite des propriétés de $\succsim^{\mathcal{D}}$ que si, de plus,

$$P \succsim Q \Leftrightarrow [\forall d,\, d' \in \mathcal{D} \text{ tel que } P = P_d,\, Q = P_{d'}\ ,\, d \succsim^{\mathcal{D}} d'];$$

tout se passe alors comme si c'était sur l'espace $\mathcal{P}$ que le décideur exprime des préférences induits par les préférences sur l'espace des décisions.

Afin de généraliser le modèle (m, EU) de Jaffray aux lois quelconques, nous énonçons les hypothèses suivantes.

Axiome A1 : Les préférences du décideur dans $\mathcal{P}$, ensemble de toutes les lois de probabilité sur $\mathcal{C}$, ensemble des résultats muni d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de $\mathcal{C}$ contenant les singletons, s'expriment par le préordre large total $\succsim$.
De plus, les préférences dans le certain du décideur définies par la relation de préordre $\succsim_{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ dérivée de $\succsim$: $\forall\, c', c" \in \mathcal{C},\ c' \succsim_{\mathcal{C}} c" \Leftrightarrow I_{c'} \succsim I_{c''}$, où I_c est la loi certaine en c, sont telles que, pour tout c de $\mathcal{C}$, les intervalles $[c, \rightarrow [$ et $] \leftarrow, c]$ appartiennent à $\mathcal{A}$.

A toute loterie P $\left(\text{loi à support fini, prenant les valeurs } c_i \text{ avec probabilités } p_i\ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$, on peut associer un résultat c_P satisfaisant $P(\{c : c \succsim_{\mathcal{C}} c_P\}) = 1$ et $P(\{c_P\}) > 0$, que nous appellerons résultat minimum de la loterie P. Jaffray [20] accorde l'appellation de niveau de sécurité de la loterie P, à l'un quelconque des éléments de la classe d'équivalence de l'élément c_P de $\mathcal{C}$ relativement à la relation d'équivalence $\sim_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{C}$.

Comme une loi quelconque peut ne pas être bornée inférieurement, on ne peut pas toujours lui associer un c_P. Afin de généraliser cette dernière correspondance aux lois quelconques, nous sommes alors amenés à introduire dans $\mathcal{P}$ une relation binaire notée $\cong$ et à donner la définition suivante :

DÉFINITION 1 : Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, les lois P et Q *offrent le même niveau de sécurité*, ce que l'on note $P \cong Q$, lorsque : $\forall c \in \mathcal{C}$, $P([c, \rightarrow [) = 1 \Leftrightarrow Q([c, \rightarrow [) = 1$.

Axiome A2 (axiome d'indépendance) : (i) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ satisfont $P \cong Q$, $R \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in [0, 1]$:

$$P \succsim Q \quad \Leftrightarrow \quad \alpha P + (1-\alpha) R \succsim \alpha Q + (1-\alpha) R\ (^2).$$

(ii) Si les lois P', Q', P'' et $Q'' \in \mathcal{P}$ satisfont $P' \cong Q'$ et $P'' \cong Q''$, et $\alpha \in [0, 1]$:

$$[P' \succsim P'', Q' \succsim Q''] \quad \Rightarrow \quad \alpha P' + (1-\alpha) Q' \succsim \alpha P'' + (1-\alpha) Q'';$$

et, si $\alpha > 0$,

$$[P' \succ P'', Q' \succsim Q''] \quad \Rightarrow \quad \alpha P' + (1-\alpha) Q' \succ \alpha P'' + (1-\alpha) Q''.$$

Axiome A3 (axiome de continuité) : Si les lois P, Q et $R \in \mathcal{P}$ satisfont $P \succ Q \succ R$ et $P \cong R$, alors il existe α et β de $]0,1[$ tels que $\alpha P + (1-\alpha) R \succ Q \succ \beta P + (1-\beta) R$.

Introduisons la relation de dominance stochastique d'ordre 1 dans $\mathcal{P}$ (notée $\succsim_{\mathscr{d}}$) définie par :

$$P \succsim_{\mathscr{d}} Q \quad \Leftrightarrow \quad [\forall c \in \mathcal{C},\ P([c, \rightarrow [) \geq Q([c, \rightarrow [)];$$

sa partie asymétrique, $\succ_{\mathscr{d}}$, est donc caractérisable par :

$$P \succ_{\mathscr{d}} Q \quad \Leftrightarrow \quad [P \succsim_{\mathscr{d}} Q \text{ et il existe } c_0 \in \mathcal{C} \text{ tel que } P([c_0, \rightarrow [) > Q([c_0, \rightarrow [)].$$

Axiome A4 (axiome de dominance) : $\forall P, Q \in \mathcal{P}$:

(i) $P \succ_{\mathscr{d}} Q \Rightarrow P \succ Q$;

(ii) $P \succsim_{\mathscr{d}} Q \Rightarrow P \succsim Q$.

---

(2) $\alpha Q + (1-\alpha) R$ est la loi associant, à chaque événement A, la probabilité $\alpha Q(A) + (1-\alpha) R(A)$.

CARACTÉRISATION DES PRÉFÉRENCES A NIVEAU DE SÉCURITÉ DONNÉ

Représentation des préférences dans $\mathcal{P}_P$ par une utilité linéaire

([3]) Soit $P \in \mathcal{P}$; désignons par $\mathcal{P}_P = \{Q \in \mathcal{P} : Q \cong P\}$. $\mathcal{P}_P$ constitue l'ensemble des lois offrant le même niveau de sécurité que la loi P. Rappelons pour mémoire le théorème, variante du théorème de vN-M [30], dû à Herstein et Milnor [19].

THÉORÈME 1 : *Sous les axiomes du modèle EU (A1, A2(i), A3 et A4 sans les restrictions), il existe sur l'espace préordonné* $(\mathcal{P}, \succsim)$ *une fonction d'utilité linéaire, unique à une transformation affine strictement croissante près (à t.a.s.c. près).*

Puisque $\mathcal{P}_P$ est un ensemble convexe et que la restriction de la relation $\succsim$ à $\mathcal{P}_P$ satisfait les axiomes du modèle EU, nous pouvons alors énoncer comme conséquence du théorème 1 la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : *Il existe sur l'espace* $(\mathcal{P}_P, \succsim)$ *une fonction d'utilité linéaire, unique à t.a.s.c. près.*

Dans le modèle EU, on sait que des préférences représentables par une fonction d'utilité linéaire $U(.)$ s'expliquent par un critère d'utilité espérée, en ce sens que pour toute loi P de densité $p(.)$, $U(P) = \int_{\mathcal{C}} u(c)\, p(c)\, dc$, où la fonction $u(.)$ est appelée utilité de vN-M du décideur, et liée à $U(.)$ par : $\forall x \in \mathcal{C},\ u(x) = U(I_x)$.

Dans notre modèle, en vertu de la définition de la relation $\cong$ dans $\mathcal{P}$, la $\cong$-classe d'équivalence ($\cong$-c.é.) $\mathcal{P}_P$, admettant la loi P comme représentant, peut ne pas contenir de lois certaines (c'est le cas où la loi P n'est pas bornée inférieurement). Ainsi, pour pouvoir donner une représentation des préférences dans l'ensemble $\mathcal{P}_P$ par une utilité espérée, nous aurons besoin de la définition et du lemme suivants :

DÉFINITION 2 : Soit $\mathcal{P}_P$ la $\cong$-c.é. de la loi P de $\mathcal{P}$, le sous-ensemble, $\bigcap_{P([c, \rightarrow[)=1} [c, \rightarrow[$ de $\mathcal{C}$ sera appelé support de P et sera noté $\mathcal{C}_P$. Toutes les lois de $\mathcal{P}_P$ ont le même support que P.

([3]) Dans tout ce qui suit, nous supposerons vérifiés les axiomes A1 à A4 traduisant la rationalité du comportement du décideur en environnement risqué.

LEMME 1 : *Il existe une fonction d'utilité* $u_P(.)$ *sur* $(\mathcal{C}_P, \succsim_C)$ *définie par :*

$$u_P(c) = \frac{U_P(\mu I_c + (1-\mu) P)}{\mu} \tag{2}$$

où μ *est quelconque dans* $]0, 1[$ *et* $U_P(.)$ *est une utilité linéaire sur* $(\mathcal{P}_P, \succsim)$ *vérifiant* $U_P(P) = 0$.

Preuve : (i) Notons que $P_{\mathcal{P}}$ contient la loi $\mu I_c + (1-\mu) P$ pour tous c tel que $[c, \to[\subset \mathcal{C}_P$ et $\mu \in]0, 1[$. Or ce dernier mixage pourra encore s'écrire, $\forall \mu' \in [\mu, 1[$: $\left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) P + \frac{\mu}{\mu'} [\mu' I_c + (1-\mu') P]$. Par la proposition 1, il existe une fonction d'utilité linéaire $V(.)$ sur $(\mathcal{P}_P, \succsim)$. Par la linéarité de $V(.)$, on en déduit que :

$$\frac{V(\mu I_c + (1-\mu) P) - V(P)}{\mu} = \frac{V(\mu' I_c + (1-\mu') P) - V(P)}{\mu'}.$$

Ce rapport est donc indépendant de la valeur de μ dans $]0, 1[$. De plus, $V(.)$ est unique modulo une transformation affine strictement croissante (mod.t.a.s.c) ; nous prendrons par la suite l'utilité $U_P(.)$ sur $(\mathcal{P}_P, \succsim)$ définie par : $U_P(.) = V(.)$-$V(P)$, d'où $U_P(P) = 0$.

On peut donc définir une fonction à valeurs réelles, $u_P(.)$, sur $\mathcal{C}_P$ par l'expression (2).

(ii) $u_P(.)$ est bien une fonction d'utilité sur $(\mathcal{C}_P, \succsim_C)$.

Soit $c', c'' \in \mathcal{C}_P$ et soit $\mu \in]0, 1[$; notons que $c' \sim_C c'' \Leftrightarrow I_{c'} \sim I_{c''} \Leftrightarrow I_{c'} \cong I_{c''}$. D'où, par A2 (i) :

$$\begin{aligned} c' \sim_C c'' \quad &\Leftrightarrow \quad I_{c'} \sim I_{c''} \quad \Leftrightarrow \quad \mu I_{c'} + (1-\mu) P \sim \mu I_{c''} + (1-\mu) P \\ &\Leftrightarrow \quad U_P(\mu I_{c'} + (1-\mu) P) = U_P(\mu I_{c''} + (1-\mu) P) \\ &\Leftrightarrow \quad u_P(c') = u_P(c''). \end{aligned}$$

D'autre part, par A4 (i) :

$$\begin{aligned} c' \succ_C c'' \quad &\Leftrightarrow \quad I_{c'} \succ_{\mathscr{A}} I_{c''} \quad \Leftrightarrow \quad \mu I_{c'} + (1-\mu) P \succ_{\mathscr{A}} \mu I_{c''} + (1-\mu) P \\ &\Rightarrow \quad \mu I_{c'} + (1-\mu) P \succ \mu I_{c''} + (1-\mu) P \\ &\Leftrightarrow \quad U_P(\mu I_{c'} + (1-\mu) P) > U_P(\mu I_{c''} + (1-\mu) P) \\ &\Leftrightarrow \quad u_P(c') = u_P(c''). \quad \square \end{aligned}$$

Représentation des préférences dans $\mathcal{P}_P$ par une utilité espérée

Jaffray [20] a montré que les préférences dans l'ensemble $\mathcal{L}_c$ des loteries de niveau de sécurité c donné satisfont à la relation suivante : $R_1 \succsim R_2 \Leftrightarrow E_{R_1} u(.) \geq E_{R_2} u(.)$, $\forall R_1, R_2 \in \mathcal{L}_c$, où $u(.)$ est une utilité sur $(C, \succsim_C)$ unique à t.a.s.c. près et $E_R u(.)$ est l'espérance de $u(.)$ pour la loterie R. Nous allons à présent valider cette dernière relation pour les lois quelconques.

PROPOSITION 2 : *Sous les axiomes $A1$, $A2$ et $A3$, l'utilité $u_P(.)$ définie par l'expression* (2) *est une application mesurable de $(\mathcal{C}_P, \mathcal{A}_P)$ dans $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}_{\mathfrak{R}})$ où $\mathcal{A}_P$ est la trace de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{C}_P$, et $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}$ la tribu des boréliens de l'ensemble des réels $\mathfrak{R}$.*

Preuve : L'espace ordonné $(u_P(\mathcal{C}_P), \geq)$ étant représentable par une fonction d'utilité, est nécessairement parfaitement séparable. Ainsi, il existe un sous-ensemble $\mathcal{S}_P$ de $u_P(\mathcal{C}_P)$ au plus dénombrable tel que : $\forall x'$, $x'' \in u_P(\mathcal{C}_P)$, $x' < x'' \Rightarrow \exists s \in \mathcal{S}_P$ tel que : $x' \leq s \leq x''$.
Deux cas sont à traiter :

(i) Soit $x_P \in u_P(\mathcal{C}_P)$, d'où

$$u_P^{-1}(]-\infty, x_P]) = \{c \in \mathcal{C}_P : c_p \succsim_C c\} = \mathcal{C}_P \cap]\leftarrow, c_P]$$

où c_P est tel que $u_P(c_P) = x_P$.
Or par $A1$, $]\leftarrow, c_P] \in \mathcal{A}$ donc $u_P^{-1}(]-\infty, x_P]) \in \mathcal{A}_P$.

(ii) Soit $x_P \notin u_P(\mathcal{C}_P)$, ou bien x_P majore $u_P(\mathcal{C}_P)$ ou bien x_P ne majore pas $u_P(\mathcal{C}_P)$. Dans le premier cas : $u_P^{-1}(]-\infty, x_P]) = \mathcal{C}_P \cap \mathcal{C} \in \mathcal{A}_P$. Dans le cas contraire : $u_P^{-1}(]-\infty, x_P])$ est égal soit à $\bigcup\limits_{\substack{s \in \mathcal{S}_P \\ s < X_P}} u_P^{-1}(]-\infty, s])$ soit à $\bigcap\limits_{\substack{s \in \mathcal{S}_P \\ s > X_P}} u_P^{-1}(]-\infty, s[)$. Ainsi, dans les deux cas, on a bien $u_P^{-1}(]-\infty, x_P]) \in \mathcal{A}_P$ puisque $\mathcal{A}_P$ étant une tribu contenant $u_P^{-1}(]-\infty, s])$, pour tout $s \in \mathcal{S}_P$.

Nous démontrerions de même que $u_P^{-1}([x_P, +\infty]) \in \mathcal{A}_P$. □

LEMME 2 : *Pour tout P de $\mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{P}_P$ est stable par combinaison linéaire convexe au plus dénombrable.*

Preuve : Il faut montrer que pour une suite de réels positifs, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, tel que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = 1$ et pour une suite de lois $(P_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{P}_P$, la loi

$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n$ est bien un élément de $\mathcal{P}_P$.

Soit $c \in \mathcal{C}$, $P([c, \rightarrow [) = 1 \Rightarrow P_n([c, \rightarrow [) = 1$, car $P_n \in \mathcal{P}_P$, $\forall n \geq 1$.

D'où $R([c, \rightarrow [) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n\right)([c, \rightarrow [) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = 1$.

Réciproquement si $R([c, \rightarrow [) = 1$ alors $P_n([c, \rightarrow [) = 1$, $\forall n \geq 1$. Ainsi, $R \in \mathcal{P}_P$. $\square$

LEMME 3 : *Sous les axiomes A1 à A4, l'utilité $U_P(.)$ sur $(\mathcal{P}_P, \succsim)$ est une fonction bornée.*

Preuve : (i) Montrons d'abord le résultat suivant : pour toute loi P de $\mathcal{P}_P$, il existe une loi L de $\mathcal{P}$ à support dénombrable telle que $L \succsim P$. Distinguons deux cas :

1^er^ cas : s'il existe c_0 tel que $\mathcal{C}_P = [c_0, \rightarrow [$, alors $\mathcal{P}_P = \mathcal{P}_{I_{c_0}}$.

Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}_P$ telle que $c_n \succsim_{\mathcal{C}} c_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, et $u_P(c_n) \uparrow \operatorname{Sup}_{c \in \mathcal{C}_P} u_P(c) \in \Re \cup \{+\infty\}$.

Nous définissons la loi L comme suit : $L(\{c_n\}) = P([c_{n-1}, c_n[)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$;

$$0 < L(\{c_0\}) = 1 - \sum_{n \geq 1} L(\{c_n\}).$$

2^e^ cas : sinon $P([c, \rightarrow [) < 1$ pour tout $c \in \mathcal{C}_P$.

Soit $(c_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathcal{C}_P$ telle que $c_n \succsim_{\mathcal{C}} C_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Nous définissons la loi L comme suit : $L(\{c_n\}) = P([c_{n-1}, c_n[)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$;

$$L(\{c_0\}) = P(] \leftarrow, c_0[).$$

(ii) Montrons que $U_P(.)$ est bornée supérieurement.

Supposons que ce n'est pas le cas; il existe alors une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{P}_P$ telle que $U_P(P_n) \geq 2^{n+1}$ et $P_{n+1} \succsim P_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Soit $P \in \mathcal{P}_P$ telle que $U_P(P) = 0$. D'après le (i), d'une part il existe une loi L à support dénombrable telle que $L \succsim_{\mathcal{d}} P$, et d'autre part pour tout $n = 1, 2, \ldots$, il existe une loi L_n à support dénombrable telle que $L_n \succsim_{\mathcal{d}} P_n$. Posons $A =$ support de $L = \{x_m, m \geq 1\}$, $A_n =$ support de $L_n = \{x_m^{(n)}, m \geq 1\}$ et $B_n = A \cup A_n = \{z_m^{(n)}, m \geq 1\}$. Nous définissons la loi L_n^* à support B_n par : $L_n^*([z_i^{(n)}, \rightarrow [) = \operatorname{Sup}(L([z_i^{(n)}, \rightarrow [), L_n([z_i^{(n)}, \rightarrow [))$, pour tout

$i = 1, 2, \ldots$. La loi L_n^* vérifie : $L_n^* \succsim_d L$ et $L_n^* \succsim_d L_n$, d'où, $L_n^* \succsim_d P_n$ et $L_n^* \succsim_d P$ puisque d'une part $L \succsim_d P$ et d'autre part $L_n \succsim_d P_n$.

Définissons à présent la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ de lois de $\mathcal{P}_P$ par : $Q_n = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} L_n^*$, ainsi $Q_n \succsim_d \frac{1}{2} P_n + \frac{1}{2} P$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Par A4 (ii) : $Q_n \succsim \frac{1}{2} P_n + \frac{1}{2} P$ et par suite : $U_P(Q_n) \geq 2^n$, $Q_{n+1} \succsim Q_n$ et $Q_n \succsim_d P$. La loi $Q = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} Q_n \in \mathcal{P}_P$ d'après le lemme 2, et a pour utilité :

$$
\begin{aligned}
U_P(Q) &= U_P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} Q_n\right) \\
&= U_P\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} Q_n + \frac{1}{2^N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-N}} Q_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} U_P(Q_n) + \frac{1}{2^N} U_P\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-N}} Q_n\right), \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Or, $U_P(Q_n) \geq 2^n$, $\forall n \geq 1$; la loi $Q_N^* = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-N}} Q_n \in \mathcal{P}_P$ d'après le lemme 2, et vérifie $Q_N^* \succsim_d P$ puisque $Q_n \succsim_d P$, $\forall n \geq 1$; ainsi $U_P(Q_N^*) \geq U_P(P) = 0$, $\forall N \geq 1$.

Enfin : $U_P(Q) \geq N + \frac{1}{2^N} U_P(P) = N$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible puisque le membre de droite peut être arbitrairement grand.

(iii) De la même manière, nous montrerions que $U_P(.)$ est bornée inférieurement; dans le premier cas, I_{c_0} est dominée par tout P; dans le deuxième cas, on construit une loi L à support dénombrable, dominée par P, par le procédé suivant : $L(\{c_n\}) = P([c_{n-1}, c_n[)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ □

LEMME 4 : *Sous les axiomes A1 à A4, l'utilité* $u_P(.)$ *définie sur* $(\mathcal{C}_P, \succsim_c)$ *par l'expression* (2) *est bornée.*

Preuve : Si l'utilité $u_P(.)$ n'était pas bornée, il existerait une suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ de lois de $\mathcal{P}_P$ tel que : $Q_n = \frac{1}{2} I_{c_n} + \frac{1}{2} P$, $\forall n \geq 1$, où $(c_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{C}_P$ telle que $c_{n+1} \succsim_C c_n$ et $u_P(c_n) \geq 2^{n+1}$, $\forall n \geq 1$. D'où $U_P(Q_n) = \frac{1}{2} u_P(c_n) \geq 2^n$ et par la suite $U_P(Q_n) \uparrow +\infty$, ce qui est impossible puisque la fonction $U_P(.)$ est bornée (lemme 3). □

PROPOSITION 3 : *Sous les axiomes A1 à A4, pour tous $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{P}_P$ et $\mu \in]0, 1[$:*

$$R(A) = 1 \Rightarrow \mu(\operatorname*{Inf}_{c \in A} u_P(c)) \leq U_P(\mu R + (1-\mu) P) \leq \mu(\operatorname*{Sup}_{c \in A} u_P(c)).$$

Preuve : Posons $a = \operatorname*{Inf}_{c \in A} u_P(c)$ et $b = \operatorname*{Sup}_{c \in A} u_P(c)$

Montrons que $U_P(\mu R + (1-\mu) P) \leq \mu b$, $\forall \mu \in]0, 1[$.

(i) S'il existe $c \in \mathcal{C}_P$ tel que $u_P(c) \leq b$ et $R(A \cap]\leftarrow, c]) = 1$ alors $R(]\leftarrow, c]) = 1$; de plus, $\forall \alpha \in]0, 1[$ et $\forall \mu \in]0, 1[$

$$\mu(\alpha I_c + (1-\alpha) R) + (1-\mu) P \succsim_{\mathscr{A}} \mu R + (1-\mu) P.$$

En effet, posons :

$$G = \mu(\alpha I_c + (1-\alpha) R) + (1-\mu) P$$

et

$$H = \mu R + (1-\mu) P.$$

Soit $x \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \text{si } c \succsim_{\mathcal{C}} x,\ & G([x, \rightarrow[) - H([x, \rightarrow[) \\ &= \alpha\mu + \mu(1-\alpha) R([x, \rightarrow[) - \mu R([x, \rightarrow[) \\ &= \alpha\mu(1 - R([x, \rightarrow[)) \geq 0; \end{aligned}$$

si $x \succ_{\mathcal{C}} c$, alors $R([x, \rightarrow[) = 0$, d'où $G([x, \rightarrow[) - H([x, \rightarrow[) = 0$.

Ainsi, $G \succsim_{\mathscr{A}} H$; par suite, par A4 (ii), $G \succsim H$, soit encore, $\forall \mu \in]0, \alpha[$:

$$\mu[\alpha I_c + (1-\alpha) P] + (1-\mu)\left[\frac{1-\alpha}{1-\mu}[\mu R + (1-\mu) P] + \frac{\alpha-\mu}{1-\mu} P\right] \succsim H.$$

En tenant compte du fait que $U_P(.)$ est une utilité, on obtient :

$$U_P\Bigg(\mu[\alpha I_c + (1-\alpha) P] + (1-\mu)\left[\frac{1-\alpha}{1-\mu}[\mu R + (1-\mu) P] + \frac{\alpha-\mu}{1-\mu} P\right]\Bigg) \geq U_P(H),$$

par la linéarité de $U_P(.)$ et par la définition de $u_P(.)$, on écrit alors :

$$\alpha\mu\, u_P(c) + (1-\alpha)\, U_P(\mu R + (1-\mu) P) \geq U_P(\mu R + (1-\mu) P),$$

soit encore, $\alpha\mu\, u_P(c) \geq \alpha\, U_P(\mu R + (1-\mu) P)$, d'où enfin :

$$U_P(\mu R + (1-\mu) P) \leq \mu\, u_P(c) \leq \mu\, b.$$

(ii) Dans le cas contraire, il existe une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{C}_P$ telle que $(u_P(c_n))_{n\geq 1}$ tend vers $b' \leq b$ et que la suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ définie par : $A_n = A \cap]\leftarrow, c_n]$ vérifie la relation $0 < R(A_n) < 1$, $\forall n \geq 1$, et $(R(A_n))_{n\geq 1}$ tend vers 1. Nous introduisons pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les lois R_n et Q_n définies par :

$$\forall G \in \mathcal{A}, \quad R_n(G) = \frac{R(G \cap A_n)}{R(A_n)} \qquad \text{et} \qquad Q_n(G) = \frac{R(G \cap A_n^c)}{R(A_n^c)}.$$

Remarquons d'une part que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R = R(A_n) R_n + R(A_n^c) Q_n$ et d'autre part, étant donné un réel μ de $]0, R(A_n)[$, il existe un entier n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow R(A_n) > \mu$.

Ainsi, la loi K définie par $K = \mu R + (1-\mu) P$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} K &= \mu [R(A_n) R_n + R(A_n^c) Q_n] + (1-\mu) P \\ &= \mu [R(A_n) R_n + R(A_n^c) P] \\ &\quad + (1-\mu)\left[\frac{R(A_n^c)}{1-\mu}[\mu Q_n + (1-\mu) P] + \frac{R(A_n)-\mu}{1-\mu} P\right], \end{aligned}$$

d'où, d'une part en appliquant la fonction $U_P(.)$ et en utilisant le fait qu'elle est bornée supérieurement, c'est-à-dire qu'il existe m tel que $U_P(S) \leq m$, $\forall S \in \mathcal{P}_P$, et d'autre part du fait que $R(A_n) R_n + R(A_n^c) P \in \mathcal{P}_P$ et vérifie $U_P(R(A_n) R_n + R(A_n^c) P) \leq u_P(c_n)$, donc :

$$\begin{aligned} U_P(K) &= \mu\, U_P(R(A_n) R_n + R(A_n^c) P) + R(A_n^c)\, U_P(\mu Q_n + (1-\mu) P) \\ &\leq \mu\, u_P(c_n) + (1 - R(A_n))\, m \leq \mu\, b + (1 - R(A_n))\, m \leq \mu\, b. \end{aligned}$$

L'inégalité $U_P(K) \geq \mu\, a$ se démontrerait de façon symétrique. □

Nous donnons à présent le résultat qui exprime la représentation des préférences dans $\mathcal{P}_P$ par une utilité espérée.

THÉORÈME 2 : *Sous les axiomes* A1 *à* A4, *l'espace* $(\mathcal{P}_P, \succsim)$ *est représentable par une fonction d'utilité* $U_P(.)$ *de la forme :*

$$R \to U_P(R) = \int_{\mathcal{C}_P} u_P(c)\, dR(c) \tag{3}$$

où $u_P(.)$ est la fonction d'utilité sur $(\mathcal{C}_P, \succsim_C)$ définie par l'expression (2).

Preuve : Soit $\alpha = \operatorname{Inf}_{c \in \mathcal{C}_P} u_P(c)$ et $\beta = \operatorname{Sup}_{c \in \mathcal{C}_P} u_P(c)$; α et β existent puisque d'après le lemme 4 la fonction $u_P(.)$ est bornée dans $\mathcal{C}_P$ où $P \in \mathcal{P}_P$ avec $U_P(P) = 0$. Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, nous formons les ensembles suivants :

$$A_{1,n} = \left\{ c \in \mathcal{C}_P : \alpha \leq u_P(c) \leq \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} \right\};$$

$$A_{i,n} = \left\{ c \in \mathcal{C}_P : \alpha + \frac{(i-1)(\beta - \alpha)}{n} < u_P(c) \leq \alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{n} \right\}, \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n.$$

D'après la proposition 2, la fonction $U_P(.)$ est mesurable, d'où $A_{i,n} \in \mathcal{A}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Pour chaque $c \in A_{i,n}$, posons $f_n(c) = \alpha + \dfrac{(i-1)(\beta - \alpha)}{n}$; la suite de fonctions $(f_n(.))_{n \geq 1}$ ainsi définie converge uniformément vers $u_P(.)$; de plus les fonctions $f_n(.)$ sont simples, ainsi :

$$\int_{\mathcal{C}_P} u_P(c)\, dR(c) = \operatorname{Sup}\{E(f_n, R), n = 1, 2, \ldots\}$$

existe dans $\mathfrak{R}$ pour tout $R \in \mathcal{P}_P$.

Nous introduisons, pout tout $i = 1, 2, \ldots, n$, et pour tout μ de $]0, 1[$, les lois suivantes :

$$\widehat{R} = \mu R + (1 - \mu) P \qquad \text{et} \qquad \widehat{Q}_i = \mu Q_i + (1 - \mu) P,$$

où $R = \sum_{i=1}^{n} R(A_{i,n}) Q_i$ avec Q_i définie par : $Q_i(G) = \dfrac{R(A_{i,n} \cap G)}{R(A_{i,n})}$, $\forall G \in \mathcal{A}$ et $\forall i = 1, 2; \ldots, n$.

Remarquons que $Q_i(A_{i,n}) = 1$, d'où par la proposition 3 :

$$\mu \left[\alpha + \frac{(i-1)(\beta - \alpha)}{n}\right] \leq U_P(\widehat{Q}_i) \leq \mu \left[\alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{n}\right], \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

qui est équivalent à :

$$\mu R(A_{i,n}) \left[\alpha + \frac{(i-1)(\beta - \alpha)}{n}\right] \leq R(A_{i,n}) U_P(\widehat{Q}_i) \leq \mu R(A_{i,n}) \left[\alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{n}\right],$$

d'où, puisque $\sum_{i=1}^{n} R(A_{i,n})\, U_P(\widehat{Q}_i) = U_P(\widehat{R}) = \mu\, U_P(R)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} R(A_{i,n}) \left[\alpha + \frac{(i-1)(\beta-\alpha)}{n}\right] \leq U_P(R)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} R(A_{i,n}) \left[\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{n}\right].$$

La limite commune des sommes ci-dessous est : $\int_{\mathcal{C}_P} u_P(c)\, dR(c)$.

Enfin, il est aisé de voir que la propriété d'être de la forme (3) détermine la fonction d'utilité $U_P(.)$ mod. t.a.s.c et qu'il en est de même pour la fonction $u_P(.)$. □

Relation entre les représentations des préférences par une utilité espérée dans les divers $\mathcal{P}_P$

Considérons deux $\cong$-c.é. différentes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ admettant respectivement pour représentant P_1 et P_2. D'après le théorème 2, chacun de ces deux ensembles totalement préordonnés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est représentable par une fonction d'utilité linéaire.

A présent, nous nous intéressons à la relation qui existe entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Pour $i = 1, 2$, notons $U_i(.)$ l'utilité sur $(\mathcal{P}_i, \succsim)$ qui a la forme $U_i(P) = \int_{\mathcal{C}_i} u_i(c)\, dP(c)$, $\forall\, P \in \mathcal{P}_i$, où $u_i(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{C}_i, \succsim_{\mathcal{C}})$ associée à $(\mathcal{P}_i, \succsim)$ définie par l'expression (2) avec $\mathcal{C}_i = \bigcap_{P_i([c, \rightarrow[)=1} [c, \rightarrow [$.

LEMME 5 : *Si Non* $[P_1 \cong P_2]$, *alors : soit* $\mathcal{C}_1 \subsetneqq \mathcal{C}_2$ *soit* $\mathcal{C}_2 \subsetneqq \mathcal{C}_1$.

LEMME 6 : *Étant donné* $\mathcal{C}_2 \subsetneqq \mathcal{C}_1$, *il existe deux réels* α *et* β *avec* $\alpha > 0$ *tels que :*

$$u_2(.) = \alpha\, \overline{u}_1(.) + \beta \tag{4}$$

où $\overline{u}_1(.)$ *représente la restriction de* $u_1(.)$ *à* $\mathcal{C}_2$.

Preuve : D'après le théorème 2, puisque la propriété d'être de la forme (3) détermine la fonction $u_2(.)$ mod. t.a.s.c, pour vérifier la propriété (4), il suffit de montrer que la fonction $\overline{u}_1(.)$ est une utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}_2, \succsim_{\mathcal{C}})$ associée à $(\mathcal{P}_2, \succsim)$.

Pour cela, d'une part il est facile de montrer que $\overline{u}_1(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{C}_2, \succsim_{\mathcal{C}})$; d'autre part, $\forall Q_2, R_2 \in \mathcal{P}_2$

$$\begin{aligned} Q_2 \succsim R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad U_2(Q_2) \geq U_2(R_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_2} u_2(c)\, dQ_2(c) \geq \int_{\mathcal{C}_2} u_2(c)\, dR_2(c). \end{aligned}$$

Par A2 (i) :

$$\begin{aligned} Q_2 \succsim R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \mu P_1 + (1-\mu) Q_2 \succsim \mu P_1 + (1-\mu) R_2 \\ &\Leftrightarrow \quad U_1(\mu P_1 + (1-\mu) Q_2) \geq U_1(\mu P_1 + (1-\mu) R_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \mu \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dP_1(c) + (1-\mu) \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dQ_2(c) \\ &\qquad \geq \mu \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dP_1(c) + (1-\mu) \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dR_2(c) \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dQ_2(c) \geq \int_{\mathcal{C}_1} u_1(c)\, dR_2(c) \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_2} \overline{u}_1(c)\, dQ_2(c) \geq \int_{\mathcal{C}_2} \overline{u}_1(c)\, dR_2(c). \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que $\overline{U}_2(.)$ définie sur $(\mathcal{P}_2, \succsim)$ par :

$$\overline{U}_2(P) = \int_{\mathcal{C}_2} \overline{u}_1(c)\, dP(c),$$

est une utilité linéaire ; d'où que $\overline{u}_1(.)$ est une utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}_2, \succsim_{\mathcal{C}})$. Mais puisque toute utilité de vN-M est unique mod. t.a.s.c, il existe alors α et β avec $\alpha > 0$ tels que : $u_2(.) = \alpha\, \overline{u}_1(.) + \beta$. $\square$

Comme conséquence immédiate de ces deux derniers lemmes, nous allons à présent définir une fonction d'utilité sur l'espace totalement préordonné $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}})$. Pour ce faire, soit $\overline{c}$ non $\precsim_{\mathcal{C}}$-meilleur résultat de $\mathcal{C}$. Le théorème 2 nous indique qu'il existe une utilité linéaire $\overline{U}(.)$ sur l'espace $(\mathcal{P}_{\overline{c}}, \succsim)$ où $\mathcal{P}_{\overline{c}} = \{P \in \mathcal{P} : P \cong I_{\overline{c}}\}$, et une utilité $\overline{u}(.)$ sur $([\overline{c}, \rightarrow [, \succsim_{\mathcal{C}})$ définie par :

$$\overline{u}(x) = \frac{\overline{U}(\mu I_x + (1-\mu) I_{\overline{c}})}{\mu}, \tag{5}$$

où $\mu \in]0, 1[$ et telles que : $\overline{U}(P) = \int_{[\overline{c}, \rightarrow [} \overline{u}(c)\, dP(c)$, $\forall P \in \mathcal{P}_{\overline{c}}$, avec $\overline{U}(I_{\overline{c}}) = 0$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathcal{C}$ tel que $\overline{c} \succsim_C x$, il existe au moins une $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_x$ telle que $x \in \mathcal{C}_x = \bigcap_{P_x([y, \rightarrow[)=1} [y, \rightarrow [$ où P_x est un représentant de $\mathcal{P}_x$. Ainsi, par le théorème 2, il existe deux fonctions d'utilité $U_x(.)$ sur $(\mathcal{P}_x, \succsim)$ et $u_x(.)$ sur $(\mathcal{C}_x, \succsim_C)$ telles que :

$$U_x(P) = \int_{\mathcal{C}_x} u_x(c)\, dP(c) \qquad \text{et} \qquad u_x(y) = \frac{U_x(\mu I_y + (1-\mu) P_x)}{\mu}.$$

D'après la preuve du lemme 6, la restriction de $u_x(.)$ à $[\overline{c}, \rightarrow [$ est une utilité de vN-M; d'où il existe deux réels $\overline{\alpha}_x$ et $\overline{\beta}_x$ avec $\overline{\alpha}_x > 0$ tels que $\overline{u}(.) = \overline{\alpha}_x\, u_x(.)_{|[\overline{c}, \rightarrow[} + \overline{\beta}_x$, qui peut s'écrire :

$$\overline{u}(.) = \overline{\alpha}_x\, [u_x(.)_{|[\overline{c}, \rightarrow[} - u_x(\overline{c})].$$

La fonction $v_x(.)$ définie par :

$$v_x(.) = \overline{\alpha}_x\, [u_x(.) - u_x(\overline{c})] \tag{6}$$

est bien une fonction d'utilité sur $(\mathcal{C}_x, \succsim_C)$; de plus, elle coïncide avec $\overline{u}(.)$ sur $[\overline{c}, \rightarrow [$. Nous associons ainsi à chaque x de C tel que $\overline{c} \succsim_C x$ une fonction $v_x(.)$ définie sur $\mathcal{C}_x$, donc en particulier en x. Nous donnerons le résultat suivant :

PROPOSITION 4 : *La fonction $u(.)$ définie par :*

$$\begin{cases} u(x) = \overline{u}(x) & si \quad x \succ_C \overline{c} \\ u(x) = v_x(x) & sinon \end{cases}$$

où $\overline{u}(.)$ est une utilité sur $([\overline{c}, \rightarrow [, \succsim_C)$ définie par l'expression (5) *et $v_x(.)$ une utilité sur $(\mathcal{C}_x, \succsim_C)$ définie par l'expression* (6), *vérifie les trois assertions suivantes :*

(i) *$u(x)$ est bien définie,*

(ii) *$\forall x \in \mathcal{C}$, $u(.)$ et $v_x(.)$ coïncident sur $\mathcal{C}_x$,*

(iii) *$u(.)$ est une utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}, \succsim_C)$ associée à chaque $(\mathcal{P}_*, \succsim)$, où $\mathcal{P}_*$ est une $\cong$-c.é.; de plus elle est unique mod. t.a.s.c.*

Preuve : (i) Montrons que $u(x)$ est indépendant du choix de l'ensemble $\mathcal{C}_x$.

D'une part, $\forall x \in \mathcal{C}$ vérifiant $x \succ_C \overline{c}$, nous pouvons poser : $u(x) = \overline{u}(x)$, d'où le résultat. D'autre part, $\forall x \in \mathcal{C}$ vérifiant $\overline{c} \succsim_C x$, $u(x)$ est aussi indépendant du choix de $\mathcal{C}_x$. En effet, supposons qu'il existe deux $\cong$-c.é. différentes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ telles que $x \in \mathcal{C}_1$ et $x \in \mathcal{C}_2$. Le lemme 5 nous dit qu'on a soit $\mathcal{C}_1 \subsetneqq \mathcal{C}_2$ soit $\mathcal{C}_2 \subsetneqq \mathcal{C}_1$. Par raison de symétrie, supposons que $\mathcal{C}_1 \subsetneqq \mathcal{C}_2$

et notons, pour $i = 1, 2$, $v_{i,x}(.)$ l'utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}_i, \succsim_\mathcal{C})$ associé à x et qui coïncide avec la fonction $\overline{u}(.)$ sur $[\overline{c}, \rightarrow[$. Ainsi, on peut écrire : $u(.) = v_{1,x}(.) = v_{2,x}(.)$ sur l'ensemble $[\overline{c}, \rightarrow[$. Par le lemme 6, il existe deux réels α_x et β_x avec $\alpha_x > 0$ tels que $v_{1,x}(.) = \alpha_x v_{2,x}(.)_{|\mathcal{C}_1} + \beta_x$; en particulier : $0 = \overline{u}(\overline{c}) = v_{1,x}(\overline{c}) = v_{2,x}(\overline{c}) = \alpha_x v_{2,x}(\overline{c})_{|\mathcal{C}_1} + \beta_x$, d'où $\beta_x = 0$. De plus, puisque $\overline{c}$ est non $\succsim_\mathcal{C}$-meilleur élément de $\mathcal{C}$; on peut donc trouver t tel que $t \succ_\mathcal{C} \overline{c}$ et par suite puisque $\overline{u}(.)$ est une utilité : $0 = \overline{u}(\overline{c}) < \overline{u}(t) = v_{1,x}(t) = v_{2,x}(t) = \alpha_x v_{2,x}(t)$, d'où $\alpha_x = 1$. Donc, $v_{1,x}(.) = v_{2,x}(.)$ sur $\mathcal{C}_1$ et par suite $u(x)$ est bien définie.

(ii) Montrons que pour tout $y \in \mathcal{C}_x$, $u(y) = v_x(y)$.

1° cas : $x \in \mathcal{C}$ tel que $\overline{c} \succsim_\mathcal{C} x$.

Soit $y \in \mathcal{C}_x$; notons $v_y(.)$ l'utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}_y, \succsim_\mathcal{C})$ associée à y. Par les lemmes 5 et 6 respectivement, $\mathcal{C}_y \subsetneq \mathcal{C}_x$ et il existe deux réels α et β avec $\alpha > 0$ tels que : $v_y(.) = \alpha v_x(.) + \beta$ sur $\mathcal{C}_y$. Or, $v_x(.) = \overline{u}(.)$ sur $[\overline{c}, \rightarrow[$; par conséquent : $\beta = 0$ et $\alpha = 1$.

2° cas : $x \in \mathcal{C}$ tel que $x \succ_\mathcal{C} \overline{c}$.

La propriété est évidente dans ce cas puisque $v_x(.) = \overline{u}(.) = u(.)$.

(iii) Montrons que $u(.)$ est une utilité de vN-M sur $\mathcal{C}$ associée à chaque $\mathcal{P}_*$ où $\mathcal{P}_*$ est une $\cong$-c.é. En premier lieu, nous remarquons que par sa définition même, la fonction $u(.)$ est unique mod. t.a.s.c. D'autre part, soit $U(.)$ la fonction définie sur $(\mathcal{P}, \succsim)$ par : $U(P) = \int_\mathcal{C} u(c)\, dP(c)$. On notera que cette fonction $U(.)$ est bien définie. En effet, tout P de $\mathcal{P}$ appartient à un sous-ensemble $\mathcal{P}_*$ de $\mathcal{P}$ formé par les lois offrant le même niveau de sécurité que P; de plus, le théorème 2 prouve l'existence d'une fonction d'utilité linéaire $U_*(.)$ sur $(\mathcal{P}_*, \succsim)$ de la forme :

$$U_*(Q) = \int_{\mathcal{C}_*} u_*(c)\, dQ(c), \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}_*$$

avec $U_*(Q) \in \mathfrak{R}$ et où $u_*(.)$ est une utilité de vN-M sur $(\mathcal{C}_*, \succsim_\mathcal{C})$. Mais d'après le (ii), $u(.)$ n'est qu'une t.a.s.c. de $u_*(.)$ $(u(.) = \alpha u_*(.) + \beta$ avec $\alpha > 0)$. Ainsi, pour tout Q de $\mathcal{P}_*$,

$$\begin{aligned} U(Q) &= \int_\mathcal{C} u(c)\, dQ(c) = \int_{\mathcal{C}_*} [\alpha u_*(c) + \beta]\, dQ(c) \\ &= \alpha \int_{\mathcal{C}_*} u_*(c)\, dQ(c) + \beta = \alpha U_*(Q) + \beta. \end{aligned}$$

D'où, puisque $U_*(.)$ est une utilité linéaire sur $(\mathcal{P}_*, \succsim)$, il en est de même pour la fonction $U(.)$. $\square$

Pour nous résumer, donnons le résultat suivant :

THÉORÈME 3 : *Il existe deux fonctions* $u(.)$ *et* $U(.)$ *définies respectivement sur l'ensemble des résultats* $\mathcal{C}$ *et sur l'ensemble des lois* $\mathcal{P}$ *reliées par :*

$$U(Q) = \int_{\mathcal{C}} u(c)\, dQ(c),$$

telles que :

(i) $U(.)$ *est une utilité linéaire sur l'ensemble des lois offrant le même niveau de sécurité ;*

(ii) $u(.)$ *est une utilité sur l'espace totalement préordonné* $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}})$.

De plus les fonctions $u(.)$ *et* $U(.)$ *sont uniques mod. t.a.s.c.*

Ce dernier théorème ne nous affirme l'existence d'une fonction d'utilité linéaire que sur l'ensemble des lois offrant le même niveau de sécurité. Donc, il nous donne aucune indication concernant la comparaison des lois offrant des niveaux de sécurité différents. Par conséquent, on ne peut utiliser la fonction $U(.)$ comme une fonction d'utilité sur tout l'espace $(\mathcal{P}, \succsim)$ (*cf.* exemple 1 ci-dessous). Les préférences sont donc multicritères, intégrant un premier critère le niveau de sécurité, et un deuxième, l'espérance mathématique d'utilité.

De plus, ce théorème 3 donne l'existence d'une fonction d'utilité $u(.)$ sur l'espace totalement préordonné $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}})$. Toutefois, à niveau de sécurité donné, si l'utilité $u_P(.)$ définie sur $(\mathcal{C}_P, \succsim_{\mathcal{C}})$ et donnée par l'expression (2) est bornée, la fonction d'utilité $u(.)$ de ce dernier théorème définie sur $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}})$ n'est pas pour autant bornée en général. Comme nous l'avons déjà signalé, Jaffray [20] fait associer à chaque loterie P un résultat c_P de $\mathcal{C}$. Ceci n'est pas toujours possible pour une loi quelconque. Ainsi, à $\mathcal{C}$ on associe $u(\mathcal{C}) = \{y \in \mathfrak{R} : \exists\, x \in \mathcal{C} \text{ avec } y = u(x)\} \subset \mathfrak{R}$. Ceci nous conduit à associer à chaque loi de $\mathcal{P}$ un élément de $\mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$.

En effet, soit $P \in \mathcal{P}$ et soit $x \in \mathcal{C}_P$,

$$u(x) \geq u(c), \quad \forall\, c \in \mathcal{C} \quad \text{tel que} \quad P([c, \rightarrow [) = 1,$$

soit encore :

$$u(x) \geq \operatorname*{Sup}_{P([c, \rightarrow[)=1} u(c) \in \mathfrak{R}.$$

D'où la définition suivante.

DÉFINITION 3 : Soit $P \in \mathcal{P}$,

– si P est bornée inférieurement, c'est-à-dire, il existe $c_0 \in \mathcal{C}$ tel que $P([c_0, \rightarrow [) = 1$, on lui associera l'élément $u_P^{\min}$ défini par :

$$u_P^{\min} = \operatorname*{Sup}_{P([c, \rightarrow [)=1} u(c) = u(c_0) \in \mathfrak{R};$$

– si P n'est pas bornée inférieurement, on lui associera l'élément $u_P^{\min}$ défini par :

$$u_P^{\min} = u^- = \operatorname*{Inf}_{c \in \mathcal{C}} u(c) \in \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}.$$

Exemple 1 : Soit $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}}) = (\mathfrak{R}, \geq)$; $P \succsim Q \Leftrightarrow (u_P^{\min}, E_P\, u(.)) \geq^L (u_Q^{\min}, E_Q\, u(.))$, où $\geq^L$ est l'ordre lexicographique dans $\mathfrak{R}^2$. Cette relation de préférence satisfait le système d'axiomes mais il n'existe pas de fonction d'utilité sur $(\mathcal{P}, \succsim)$.

Cependant, à part pour cet exemple extrême, il y a de nombreux cas d'ensembles $(\mathcal{P}, \succsim)$ pour lesquels nous pouvons déduire de nos quatre axiomes des résultats plus précis.

Notons que nous n'avons utilisé l'axiome $A3$ que pour des lois P, Q et R de même niveau de sécurité et que jusqu'ici nous ne nous sommes pas servis de l'axiome $A2$ (ii).

En particulier, nous allons chercher une fonction d'utilité s'étendant à des lois de niveaux de sécurité différents. Plus précisément, nous allons montrer, suite à la définition 3, comment la relation donnée par l'expression (1) peut se généraliser au cas des lois quelconques.

EXPRESSION GÉNÉRALE DES PRÉFÉRENCES

Dans ce paragraphe, nous introduisons le concept de « recouvrement des préférences » que nous généraliserons par la suite pour avoir la définition de « recouvrement connexe ». Ces deux idées vont nous permettre de généraliser le résultat du théorème 3, c'est-à-dire de trouver une fonction d'utilité s'étendant à des lois de niveaux de sécurité différents.

Définitions et propriétés des recouvrements des préférences

Tout au long de cette section, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ désignent deux $\cong$-c.é. différentes de $\mathcal{P}$. Définissons une relation d'ordre strict totale, notée $\ll$, sur l'ensemble quotient $\mathcal{P}_{|\cong}$ par : $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$ si $\mathcal{C}_2 \subsetneqq \mathcal{C}_1$ ($\mathcal{C}_i$ étant le support de la loi P_i représentant de la $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$). Remarquons que la relation « $\ll$ ou $=$ » notée $\leqq$ est un ordre large total.

DÉFINITION 4 : *On dit qu'il y a recouvrement des préférences dans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *lorsqu'il existe des lois* P_1, P_1' *de* $\mathcal{P}_1$ *et* P_2, P_2' *de* $\mathcal{P}_2$ *telles que:* $P_1 \sim P_2 \succ P_1' \sim P_2'$.

Nous écrivons alors $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ abréviation pour : « la relation $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ est vraie ».

Au préalable, rappelons le lemme suivant (Ferguson [13], Fishburn [16]).

LEMME 7 : *Étant donné* P, Q *et* R *de* $\mathcal{P}$ *telles que* $P \cong Q$ *et* $P \succsim R \succsim Q$, *il existe un unique réel* $\lambda \in]0, 1[$ *tel que* $\lambda P + (1-\lambda) Q \sim R$.

LEMME 8 : *Supposons que* $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, *alors* $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1, \overline{\mathcal{P}})$ *et* $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_2)$ *pour toute* $\cong$-c.é. $\overline{\mathcal{P}}$ *vérifiant* $\mathcal{P}_1 \underline{\overset{\ll}{=}} \overline{\mathcal{P}} \underline{\overset{\ll}{=}} \mathcal{P}_2$. *Plus précisément,* $\forall P_1, P_1' \in \mathcal{P}_1$ *et* $P_2, P_2' \in \mathcal{P}_2$ *tels que* $P_1 \sim P_2 \succ P_1' \sim P_2'$, *il existe* $\overline{P}$, $\overline{P}'$ *de* $\overline{\mathcal{P}}$ *tels que* $\overline{P} \sim P_1 \sim P_2 \succ P_1' \sim P_2' \sim \overline{P}'$.

Dans la preuve de ce lemme, on a besoin du résultat suivant :

LEMME 9 : *Pour toute* $\cong$-*c.é.* $\overline{\mathcal{P}}$, *le sous-ensemble* $\overline{\mathcal{C}} = \bigcap_{\overline{P}([c, \to[)=1} [c, \to[$ *de* $\mathcal{C}$ *associé à* $\overline{\mathcal{P}}$, *où* $\overline{P}$ *est un représentant de* $\overline{\mathcal{P}}$, *est un élément de la tribu* $\mathcal{A}$.

Preuve du lemme 8 : Par définition de la relation $\mathcal{R}$, il existe $P_1, P_1' \in \mathcal{P}_1$ et $P_2, P_2' \in \mathcal{P}_2$ tels que $P_1 \sim P_2 \succ P_1' \sim P_2'$. Montrons d'abord que pour $\cong$-c.é. $\overline{\mathcal{P}}$ telle que $\mathcal{P}_1 \underline{\overset{\ll}{=}} \overline{\mathcal{P}} \underline{\overset{\ll}{=}} \mathcal{P}_2$, il existe aussi $\overline{P}$, $\overline{P}'$ de $\overline{\mathcal{P}}$ tels que $\overline{P} \sim P_1 \sim P_2$ et $P_1' \sim P_2' \sim \overline{P}'$.

Remarquons que si $\mathcal{P}_1 = \overline{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{P}_2 = \overline{\mathcal{P}}$, le résultat est trivial. Supposons que $\overline{\mathcal{P}}$ admet la loi $\overline{Q}$ comme représentant. La loi $\overline{Q}$ admet comme support $\overline{\mathcal{C}}$, un sous-ensemble inclus dans $\mathcal{C}_1$. $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$ d'après le lemme 9, donc $P_1(\overline{\mathcal{C}}) \in]0, 1[$ et $P_1(\mathcal{C}_1/\overline{\mathcal{C}}) \in]0, 1[$. Ainsi, P_1 peut s'écrire : $P_1 = P_1(\overline{\mathcal{C}})\, S_1 + P_1(\mathcal{C}_1/\overline{\mathcal{C}})\, K_1$ où les lois S_1 et K_1 sont définies par : pour $A \in \mathcal{A}$,

$$S_1(A) = \frac{P_1(A \cap \overline{\mathcal{C}})}{P_1(\overline{\mathcal{C}})} \qquad \text{et} \qquad K_1(A) = \frac{P_1(A \cap (\mathcal{C}_1/\overline{\mathcal{C}}))}{P_1(\mathcal{C}_1/\overline{\mathcal{C}})}.$$

Posons $\lambda = P_1(\overline{\mathcal{C}})$ et formons la loi $\overline{R}_1$ définie par : $\overline{R}_1 = \lambda S_1 + (1-\lambda)\overline{Q}$. Il est facile de voir que $\overline{R}_1 \in \overline{\mathcal{P}}$, de plus $\overline{R}_1 \succ_{\mathcal{d}} P_1$ et par A4 (i), $\overline{R}_1 \succ P_1$. Du fait que $\mathcal{C}_2 \subsetneq \overline{\mathcal{C}}$, la loi $\overline{Q}$ peut prendre la forme suivante : $\overline{Q} = \alpha S_2 + (1-\alpha) K_2$, avec $\alpha = 1 - \overline{Q}(\mathcal{C}_2) \in]0, 1[$ et, où les lois S_2

et K_2 sont définies par : pour $A \in \mathcal{A}$,

$$K_2(A) = \frac{\overline{Q}(A \cap \mathcal{C}_2)}{\overline{Q}(\mathcal{C}_2)} \qquad \text{et} \qquad S_2(A) = \frac{\overline{Q}(A \cap (\overline{\mathcal{C}}/\mathcal{C}_2))}{\overline{Q}(\overline{\mathcal{C}}/\mathcal{C}_2)}.$$

Posons $\overline{R}_2 = \alpha S_2 + (1-\alpha) P'_2$, on a $P'_2 \succ_{\mathcal{A}} \overline{R}_2$ et par A4 (i), on peut écrire $P'_2 \succ \overline{R}_2$.
D'où deux lois $\overline{R}_1$ et $\overline{R}_2$ de $\overline{\mathcal{P}}$ vérifiant : $\overline{R}_1 \succ P_1$ et $P'_2 \succ \overline{R}_2$. Or, $P_1 \sim P_2 \succ P'_1 \sim P'_2$, d'où :

(i) $$\overline{R}_1 \succ P_1 \succ \overline{R}_2$$

et

(ii) $$\overline{R}_1 \succ P'_1 \succ \overline{R}_2.$$

L'application du lemme 7 à la relation (i) donne l'existence d'un réel β de $]0,\ 1[$ tel que :

$$\overline{P} = \beta \overline{R}_1 + (1-\beta) \overline{R}_2 \sim P_1 \sim P_2 \qquad \text{avec} \quad \overline{P} \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Ce dernier lemme s'applique aussi à la relation (ii) et donne l'existence d'un réel β' de $]0,\ 1[$ tel que :

$$\overline{P}' = \beta' \overline{R}_1 + (1-\beta') \overline{R}_2 \sim P'_1 \sim P'_2 \qquad \text{avec} \quad \overline{P}' \in \overline{\mathcal{P}}. \quad \square$$

Remarque 1 : Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ deux $\cong$-c.é. telles que $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2)$. On peut toujours indicer l'ensemble $\mathcal{K} = \{\mathcal{P}_* \in \mathcal{P}_{|\cong} : \mathcal{P}_1 \lesseqqgtr \mathcal{P}_* \lesseqqgtr \mathcal{P}_2\}$ comme suit : $\mathcal{K} = \{\mathcal{P}_s : s \in \mathcal{S}\}$ où $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Pour alléger les notations, dans tout ce qui suit, nous désignons par : $\mathcal{C}_s$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ associé à $\mathcal{P}_s$, $\mathcal{Q} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_s$ et $\mathcal{J} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{C}_s$.

PROPOSITION 5: *S'il y a recouvrement des préférences dans les deux $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$, il existe une utilité $u(.)$ sur $(\mathcal{J},\ \succsim_{\mathcal{C}})$ et une utilité $V(.)$ sur $(\mathcal{Q},\ \succsim)$ qui est linéaire sur chaque $\mathcal{P}_s$ de $\mathcal{K}$, reliées par :*

$$V(P) = a(s) \int_{\mathcal{C}_s} u(c)\, dP(c) + b(s), \tag{7}$$

où les réels $a(s)$ et $b(s)$ dépendent seulement de $s \in \mathcal{S}$ et $a(s) > 0$. *De plus, chacune des fonctions $u(.)$ et $\mathrm{V}(.)$ est unique mod. t.a.s.c.*

Preuve : (i) En vertu du théorème 3, il existe une fonction d'utilité $u(.)$ sur $\mathcal{C}$ et une utilité $U(.)$ sur chaque $\cong$-c.é. reliées par : $U(.) = \int_{\mathcal{C}} u(c)\, d(.)\,(c)$, de plus elles sont uniques à t.a.s.c près. Soit alors une $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_s$ de $\mathcal{K}$. Définissons $V(.)$ sur $\mathcal{P}_s$ par $V(.) = a(s) \int_{\mathcal{C}} u(c)\, d(.)\,(c) + b(s)$, où $a(s)$ et $b(s)$ sont deux réels déterminés de la manière suivante : puisque la relation $\mathcal{R}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ est par hypothèse vraie, on peut toujours trouver des lois $Q_1 \in \mathcal{P}_1$ et $Q_2 \in \mathcal{P}_2$ telles que $Q_1 \succ Q_2$; le lemme 8 nous assure l'existence de deux lois $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ de $\mathcal{P}_s$ telles que $\overline{R} \sim Q_1 \succ Q_2 \sim \overline{Q}$, qui est équivalent, d'après le théorème 3, à : $\int_{\mathcal{C}} u(c)\, d\overline{R}(c) > \int_{\mathcal{C}} u(c)\, d\overline{Q}(c)$. Ainsi le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a(s) \int_{\mathcal{C}} u(c)\, d\overline{R}(c) + b(s) = 1 \\ a(s) \int_{\mathcal{C}} u(c)\, d\overline{Q}(c) + b(s) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $(a(s), b(s))$ telles que $a(s) > 0$.
Notons que $V(\overline{R}) = 1$ et $V(\overline{Q}) = 0$. Soit alors $S \in \mathcal{P}_s$, posons $V(S) = \lambda \in \mathfrak{R}$.
Distinguons trois cas selon que $\overline{Q} \succ S$, $\overline{R} \succsim S \succsim \overline{Q}$, ou $S \succ \overline{R} \succ \overline{Q}$.

Dans le premier cas, $V(.)$ étant une utilité sur $\mathcal{P}_s$, donc

$$\overline{Q} \succ S \Leftrightarrow V(\overline{Q}) > V(S) \Leftrightarrow \lambda < 0.$$

Mais $\overline{R} \succ \overline{Q}$, d'où par le lemme 7, il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\alpha \overline{R} + (1-\alpha) S \sim \overline{Q}$. L'utilité $V(.)$ étant linéaire sur $\mathcal{P}_s$, on obtient :

$$\alpha V(\overline{R}) + (1-\alpha) V(S) = V(\overline{Q}),$$

qui est équivalent à : $\left[\alpha = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda}\right]$.

Dans les deux d'autres cas, on concluait de même, respectivement que $\lambda \overline{R} + (1-\lambda)\overline{Q} \sim S$ avec $\lambda \in [0, 1]$ et $\overline{R} \sim \dfrac{1}{\lambda} S + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \overline{Q}$ avec $\lambda > 1$.

(ii) Montrons que la fonction $V(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{Q}, \succsim)$.
Soit $\mathcal{P}_s$ et $\mathcal{P}_t$ deux $\cong$-c.é. différentes de l'ensemble $\mathcal{K}$ avec $S_s \in \mathcal{P}_s$ et $S_t \in \mathcal{P}_t$.
D'après le lemme 5, soit $\mathcal{C}_s \subsetneqq \mathcal{C}_t$ soit $\mathcal{C}_t \subsetneqq \mathcal{C}_s$ où $\mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}_t$ sont respectivement les sous-ensembles de $\mathcal{C}$ associés à $\mathcal{P}_s$ et $\mathcal{P}_t$. Supposons que $\mathcal{C}_s \subsetneqq \mathcal{C}_t$ et posons $V(S_s) = \lambda_s$ et $V(S_t) = \lambda_t$.

Le lemme 8 entraîne, d'une part l'existence de $\overline{R}_s$ et $\overline{Q}_s$ de $\mathcal{P}_s$ telles que : $\overline{R}_s \sim Q_1 \succ Q_2 \sim \overline{Q}_s$, et d'autre part l'existence de deux lois $\overline{R}_t$ et $\overline{Q}_t$ de $\mathcal{P}_t$ telles que : $\overline{R}_t \sim Q_1 \succ Q_2 \sim \overline{Q}_t$. Ainsi, d'une part $\overline{R}_t \sim \overline{R}_s$, et d'autre part $\overline{Q}_t \sim \overline{Q}_s$. Les lois S_s et S_t peuvent être classées différemment par rapport à Q_1 et Q_2 ; on peut montrer que dans tous les cas :

$$S_s \succsim S_t \quad \Leftrightarrow \quad V(S_s) \geq V(S_t).$$

Traitons par exemple le cas où $S_s \succ \overline{R}_s$ et $S_t \succ \overline{R}_t$.

D'après le (i) :

$$\frac{1}{\lambda_s} S_s + \frac{\lambda_s - 1}{\lambda_s} \overline{Q}_s \sim \overline{R}_s \sim \overline{R}_t \sim \frac{1}{\lambda_t} S_t + \frac{\lambda_t - 1}{\lambda_t} \overline{Q}_t \tag{1'}$$

or puisque $\overline{Q}_t \sim \overline{Q}_s$ et par hypothèse $S_s \succsim S_t$, donc par A2 (ii) :

$$\frac{1}{\lambda_t} S_s + \frac{\lambda_t - 1}{\lambda_t} \overline{Q}_s \succsim \frac{1}{\lambda_t} S_t + \frac{\lambda_t - 1}{\lambda_t} \overline{Q}_t,$$

soit encore, d'après la relation (1') ci-dessous :

$$\frac{1}{\lambda_t} S_s + \frac{\lambda_t - 1}{\lambda_t} \overline{Q}_s \succsim \frac{1}{\lambda_s} S_s + \frac{\lambda_s - 1}{\lambda_s} \overline{Q}_s,$$

qui entraîne d'après le (ii) de la preuve du lemme 7 :

$$\frac{1}{\lambda_t} \geq \frac{1}{\lambda_s} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_s \geq \lambda_t \quad \Leftrightarrow \quad V(S_s) \geq V(S_t).$$

Les autres cas se démontrent d'une manière semblable.

Ainsi, $V(.)$ est bien une fonction d'utilité sur l'espace $(\mathcal{Q}, \succsim)$ qui est linéaire sur chaque $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_s$ de $\mathcal{K}$; de plus d'après sa forme, elle est bien unique mod. t.a.s.c.

La fonction $u(.)$ étant une utilité sur $(\mathcal{C}, \succsim_{\mathcal{C}})$, elle l'est aussi sur l'ensemble $(\mathcal{J}, \succsim_{\mathcal{C}})$; de plus son unicité mod. t.a.s.c. découle du théorème 3. □

Remarquons que pour P et Q de $\mathcal{P}$, si $P \cong Q$ alors $u_P^{\min} = u_Q^{\min}$. D'où :

PROPOSITION 6: *Supposons qu'il y a recouvrement des préférences dans les deux* $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *avec* $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$ *; il existe alors, pour toute* $\cong$*-c.é.* $\mathcal{P}_s$ *de* $\mathcal{K}$ *:*

(i) *une fonction d'utilité* $u(.)$ *sur* $\mathcal{C}_s$*, le sous-ensemble de* $\mathcal{C}$ *associé à* $\mathcal{P}_s$ *;*

(ii) *deux fonctions à valeurs réelles* $\widehat{a}(.)$ *et* $\widehat{b}(.)$ *;*

telles que la fonction $V(.)$ *définie sur* $\mathcal{Q}$ *par :*

$$V(R) = \widehat{a}(u_R^{\min}) \int_C u(c)\, dR(c) + \widehat{b}(u_R^{\min}) \tag{8}$$

soit une fonction d'utilité sur $(\mathcal{Q}, \succsim)$, *donc linéaire sur chaque* $\mathcal{P}_s$ *de* $\mathcal{K}$. *De plus,* $\widehat{a}(u_R^{\min}) > 0$ *où* $u_R^{\min}$ *est donné par la définition* 3, *et chacune des fonctions* $u(.)$ *et* $V(.)$ *est unique* mod. *t.a.s.c.; et les transformations :* $u'(.) = \lambda\, u(.) + \mu$ *et* $V'(.) = \alpha\, V(.) + \beta$ *correspondent aux transformations :* $a'(.) = \frac{\alpha}{\lambda}\, \widehat{a}(.)$ *et* $b'(.) = \alpha\, \widehat{b}(.) - \frac{\mu\alpha}{\lambda}\, \widehat{a}(.) + \beta$.

Preuve : (i) Du fait qu'il y a recouvrement des préférences dans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et que $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_2$, il existe respectivement deux lois Q_1 et Q_2 de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ telles que $Q_1 \succ Q_2$; de plus, le lemme 8 nous assure l'existence de deux lois $\overline{R}_s$ et $\overline{Q}_s$ de $\mathcal{P}_s$ telles que $\overline{R}_s \sim Q_1 \succ Q_2 \sim \overline{Q}_s$. D'où, par la proposition 5, il existe une utilité $u(.)$ sur $(\mathcal{J}, \succsim_C)$ et une utilité $V_s(.)$ sur $(\mathcal{Q}, \succsim)$ reliées par ;

$$V_s(R) = a(s) \int_C u(c)\, dR(c) + b(s) \tag{9}$$

avec $V_s(\overline{R}_s) = 1$ et $V_s(\overline{Q}_s) = 0$. La fonction $u(.)$, étant celle du théorème 3, est unique mod. t.a.s.c.

(ii) Rappelons que $a(s)$ et $b(s)$ ne dépendent que de la $\cong$-*c.é.* $\mathcal{P}_s$ de $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{P}_s$ un élément de $\mathcal{Q}$; pour chaque loi de $\mathcal{P}_s$, on pose : $\widehat{a}(u_R^{\min}) = a(s)$ et $\widehat{b}(u_R^{\min}) = b(s)$. Ainsi, $\widehat{a}(.)$ et $\widehat{b}(.)$ sont bien des applications de $\mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ dans $\mathfrak{R}$ avec $\widehat{a}(.) > 0$ puisque $a(s) > 0$, $\forall s \in \mathcal{S}$.

(iii) Définissons la fonction $V(.)$ sur $\mathcal{Q}$ par :

$$V(R) = \widehat{a}(u_R^{\min}) \int_C u(c)\, dR(c) + \widehat{b}(u_R^{\min}).$$

Sur $\mathcal{P}_s$, la fonction $V(.)$ coïncide avec la fonction $V_s(.)$ définie par l'expression (9) ci-dessus. Or, par la proposition 5, la fonction $V_s(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{Q}, \succsim)$, linéaire sur chaque $\mathcal{P}_s$ et elle est unique à t.a.s.c. près; de plus, elle est complètement déterminée par ses valeurs en $\overline{R}_s$ et $\overline{Q}_s$.

(iv) Enfin, soit $u'(.) = \lambda\, u(.) + \mu$ une t.a.s.c. de $u(.)$ et soit $V'(.)$ l'utilité sur $(\mathcal{Q}, \succsim)$ définie par :

$$V'(R) = a'(u_R^{\min}) \int_C u'(c)\, dR(c) + b'(u_R^{\min}).$$

Puisque $V'(.)$ possède la même forme que la fonction $V(.)$, elle est unique à t.a.s.c. près. Ainsi, on peut poser $V'(\overline{R}_s) = \alpha + \beta$ et $V'(\overline{Q}_s) = \beta$ avec

$\alpha > 0$. Sachant que $V(\overline{R}_s) = 1$ et $V(\overline{Q}_s) = 0$, posons $u_s = u^{\min}_{\overline{R}_s} = u^{\min}_{\overline{Q}_s}$, d'où :

$$\alpha + \beta = V'(\overline{R}_s) = a'(u_s) \int_C (\lambda\, u(c) + \mu)\; d\overline{R}_s(c) + b'(u_s),$$
$$\beta = V'(\overline{Q}_s) = a'(u_s) \int_C (\lambda\, u(c) + \mu)\; d\overline{Q}_s(c) + b'(u_s);$$

ce qui est équivalent à :

$$\alpha + \beta = \lambda\, \frac{a'(u_s)}{\widehat{a}(u_s)}\,(1 - \widehat{b}(u_s)) + \mu\, a'(u_s) + b'(u_s),$$
$$\beta = -\lambda\, \frac{a'(u_s)}{\widehat{a}(u_s)}\,\widehat{b}(u_s) + \mu\, a'(u_s) + b'(u_s);$$

d'où :

$$a'(u_s) = \frac{\alpha}{\lambda}\,\widehat{a}(u_s) \qquad \text{et} \qquad b'(u_s) = \alpha\,\widehat{b}(u_s) - \frac{\mu\alpha}{\lambda}\,\widehat{a}(u_s) + \beta.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} V'(R) &= a'(u^{\min}_R) \int_C u'(c)\; dR(c) + b'(u^{\min}_R) \\ &= a'(u^{\min}_R)\,\lambda \int_C u(c)\; dR(c) + \mu\, a'(u^{\min}_R) + b'(u^{\min}_R) \\ &= \alpha \left[\widehat{a}(u^{\min}_R) \int_C u(c)\; dR(c) + \widehat{b}(u^{\min}_R)\right] + \beta = \alpha\, V(R) + \beta. \quad \square \end{aligned}$$

Propriétés exigées par l'axiome de dominance

Il est facile de voir qu'inversement, toute fonction $V(.)$ donnée par la relation (8) de la proposition 6 satisfait les restrictions des axiomes $A1$, $A2$ et $A3$ à l'ensemble $(\mathcal{Q}, \succsim)$ mais non nécessairement à l'axiome de dominance $A4$. Plus précisément :

PROPOSITION 7 : *Pour les trois fonctions* $u(.)$, $\widehat{a}(.)$ *et* $\widehat{b}(.)$ *vérifiant les propriétés de la proposition 6 et pour la fonction d'utilité* $V(.)$ *définie sur* $(\mathcal{Q}, \succsim)$ *par l'expression* (8), *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

– (I) *Si* $P, Q \in \mathcal{Q}$ *et si* $P \succ_{\mathscr{A}} Q$ *alors* $V(P) > V(Q)$;

– (II) *Si* $P \in \mathcal{P}_r \subset \mathcal{Q}$ *et si* $Q \in \mathcal{P}_t \subset \mathcal{Q}$ *avec* $\mathcal{P}_t \ll \mathcal{P}_r$ *alors :*

$$\widehat{b}(u^{\min}_Q) - \widehat{b}(u^{\min}_P) \leq \operatorname*{Inf}_{u(c) \geq u^{\min}_P} [\widehat{a}(u^{\min}_P) - \widehat{a}(u^{\min}_Q)]\, u(c). \qquad (10)$$

Preuve : (i) Montrons que (II) implique (I).
Soit P, $Q \in \mathcal{Q}$ tels que $P \succ_{\mathscr{D}} Q$, et donc $u_P^{\min} \geq u_Q^{\min}$. Par définition de $V(.)$:

$$V(P) - V(Q) = \widehat{a}(u_P^{\min}) \int_C u(c)\, dP(c) + \widehat{b}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min}) \times \int_C u(c)\, dQ(c) - \widehat{b}(u_Q^{\min});$$

utilisant le fait que $\widehat{a}(u_Q^{\min}) > 0$ et que $\int_C u(c)\, dP(c) > \int_C u(c)\, dQ(c)$ (par dominance),

$$V(P) - V(Q) > (\widehat{a}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min})) \int_C u(c)\, dP(c) + \widehat{b}(u_P^{\min}) - \widehat{b}(u_Q^{\min});$$

mais puisque $u_P^{\min} \leq \int_C u(c)\, dP(c)$ et la relation (10) est vraie, alors $V(P) > V(Q)$.

(ii) Montrons que (I) implique (II).
Puisque la fonction $u(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{C}, \succsim_C)$, la relation (10) est équivalente à :

$$\widehat{b}(u_Q^{\min}) - \widehat{b}(u_P^{\min}) \leq (\widehat{a}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min}))\, u_P^{\min}$$

si

$$\widehat{a}(u_P^{\min}) \geq \widehat{a}(u_Q^{\min});$$

$$\widehat{b}(u_Q^{\min}) - \widehat{b}(u_P^{\min}) \leq (\widehat{a}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min}))\, \overline{u}$$

si

$$\widehat{a}(u_P^{\min}) < \widehat{a}(u_Q^{\min});$$

où $\overline{u} = \operatorname{Sup}_{c \in \mathcal{C}} u(c) \in \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$.
Pour toute paire de réels (u', u'') telle que $u' > u''$, $u' < \overline{u}$ et $u'' \leq \overline{u}$, on peut trouver P, $Q \in \mathcal{Q}$ telles que : $P \succ_{\mathscr{D}} Q$, $u' = \int_C u(c)\, dP(c)$ et $u'' = \int_C u(c)\, dQ(c)$. Puisque l'assertion (I) est vraie, alors : $V(P) - V(Q) > 0$, soit encore :

$$\widehat{b}(u_Q^{\min}) - \widehat{b}(u_P^{\min}) < \widehat{a}(u_P^{\min})\, u' - \widehat{a}(u_Q^{\min})\, u''.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tous u' et u'' tels que $u' > u''$, d'où :

$$\widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \leq \operatorname*{Inf}_{u_P^{\min} \leq y \leq \overline{u}} (\widehat{a}\,(u_P^{\min}) - \widehat{a}\,(u_Q^{\min}))\, y. \quad \square$$

Corollaire 1: *Pour* $u\,(.)$ *et* $V\,(.)$ *vérifiant les propriétés des propositions* 6 *et* 7,

$$\int_C u\,(c)\; dP\,(c) = \int_C u\,(c)\; dQ\,(c) \quad \text{et} \quad u_P^{\min} \geq u_Q^{\min} \;\Rightarrow\; V\,(P) \geq V\,(Q).$$

Ce dernier corollaire montre qu'on peut interpréter notre modèle comme un modèle multicritère où les critères élémentaires seraient EU et le niveau de sécurité. Par ailleurs, il existe un recouvrement des préférences dans les deux $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ défini par la fonction $V\,(.)$ donnée par l'expression (8) si et seulement si : pour $P_1 \in \mathcal{P}_1$ et $P_2 \in \mathcal{P}_2$,

$$\widehat{a}\,(u_{P_1}^{\min}) \int_C u\,(c)\; dP_1\,(c) + \widehat{b}\,(u_{P_1}^{\min}) > \widehat{a}\,(u_{P_2}^{\min}) \int_C u\,(c)\; dP_2\,(c) + \widehat{b}\,(u_{P_2}^{\min}),$$

soit encore,

$$\widehat{a}\,(u_{P_1}^{\min})\; \overline{u} + \widehat{b}\,(u_{P_1}^{\min}) > \widehat{a}\,(u_{P_2}^{\min})\; u_{P_2}^{\min} + \widehat{b}\,(u_{P_2}^{\min}) \qquad (10')$$

Cette dernière inégalité affirme donc : $\operatorname*{Sup}_{P \in \mathcal{P}_1} V\,(P) > V\,(P_2)$, où P_2 est un représentant de $\mathcal{P}_2$.

Notons que la relation (10′) n'est pas une restriction imposée par le système d'axiomes.

Dans la suite, nous essayerons de montrer l'existence d'une fonction d'utilité de la forme (8) sur un sous-ensemble $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ dans lequel il n'y a pas de recouvrement des préférences.

Exemple 2 : $C = \mathfrak{R}^+$, $u\,(c) = c$, si $c \leq 2$ et $u\,(c) = 3 - e^{(c-2)}$ si $c > 2$.

$P \succsim Q \Leftrightarrow V\,(P) \geq V\,(Q)$ avec $V\,(P) = u_P^{\min} + m_P$, où m_P est l'espérance mathématique de P. Posons :

$$\mathcal{P}_1 = \{R \in \mathcal{P} : u_R^{\min} = \operatorname*{Sup}_{R([c, \rightarrow[)=1} u\,(c) = 1\},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{R \in \mathcal{P} : u_R^{\min} = \operatorname*{Sup}_{R([c, \rightarrow[)=1} u\,(c) = 2\}.$$

Il est clair que la relation $\succsim$ vérifie le système d'axiomes. Cependant il n'y a pas de recouvrement des préférences dans les deux ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

puisque toute loi de $\mathcal{P}_2$ domine toute loi de $\mathcal{P}_1$ et pourtant les lois peuvent être comparées par la même fonction d'utilité $V(.)$.

Généralisation des recouvrements des préférences : préférences connexes

Il se peut qu'il n'existe pas de recouvrement des préférences dans deux $\cong$-c.é. $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ différentes, par exemple lorsque toute loi de $\overline{\mathcal{P}}$ domine chaque loi de $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$. Ainsi, on est conduit à généraliser la notion de recouvrement des préférences à une propriété dite de « connexion » entre les éléments de l'ensemble quotient $\mathcal{P}_{|\cong}$, définie par :

DÉFINITION 5 : On dit que les deux $\cong$-c.é. $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ sont connexes s'il existe un entier naturel n et des $\cong$-c.é. $(\mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq n}$, avec $\mathcal{P}_1 = \overline{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}_n = \overline{\overline{\mathcal{P}}}$ et telles que : $\mathcal{P}_i \ll \mathcal{P}_{i+1}$ et $\mathcal{R}(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_{i+1})$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Pour chaque loi P de $\mathcal{P}$, nous définissons les ensembles suivants :

$$G(P) = \{Q \in \mathcal{P} : Q \cong P, \text{ ou } \mathcal{P}_P \text{ et } \mathcal{P}_Q \text{ sont connexes,}$$
$$\text{ou } \mathcal{P}_Q \text{ et } \mathcal{P}_P \text{ sont connexes}\};$$

$$\mathcal{S} = \{G \in 2^{\mathcal{P}} : G = G(P) \text{ pour } P \in \mathcal{P}\}; \qquad \mathcal{P}_G = \{\mathcal{P}_Q : Q \in G\}.$$

La relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique mais elle n'est pas transitive en général. Nous noterons $\overline{\mathcal{R}}$ la fermeture transitive de $\mathcal{R}$ définie par : $\overline{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_P, \mathcal{P}_Q)$ si et seulement si il existe un entier $m \geq 0$ et des $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_m$, avec $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_Q$ et telles que $\mathcal{R}(\mathcal{P}_P, \mathcal{P}_1)$ et $\mathcal{R}(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_{i+1})$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m-1$. $\mathcal{P}_P$ et $\mathcal{P}_Q$ sont donc connexes si et seulement si la relation $\overline{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_P, \mathcal{P}_Q)$ est vraie. Il est clair que $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}_{|\cong}$. Appelons classe de $\mathcal{P}_P$ modulo $\overline{\mathcal{R}}$ l'ensemble $G_{\overline{\mathcal{R}}}(P) = \{X \in \mathcal{P}_{|\cong} : \overline{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_P, X)\}$; nous remarquons que l'ensemble $\mathcal{P}_{G(P)}$ n'est autre que $G_{\overline{\mathcal{R}}}(P)$. Introduisons maintenant une relation binaire dans l'ensemble quotient $(\mathcal{P}_{|\cong})_{\overline{\mathcal{R}}}$ dont la partie asymétrique est définie comme ci-dessus :

DÉFINITION 6 : Pour $\mathcal{P}_{G'}$ et $\mathcal{P}_{G''}$ appartenant à l'ensemble quotient $(\mathcal{P}_{|\cong})_{\overline{\mathcal{R}}}$,

$$\mathcal{P}_{G'} \succ_g \mathcal{P}_{G''} \quad \Leftrightarrow \quad P' \succ P'', \qquad \forall P' \in G' \text{ et } \forall P'' \in G''.$$

LEMME 10 : *La famille $\mathcal{S}$ est une partition de $\mathcal{P}$, et pour chaque G de $\mathcal{S}$, les préférences dans $\mathcal{P}_G$ sont connexes. De plus, la relation $=_g$ (c'est-à-dire, $\succ_g$ ou $=$) est un ordre total sur l'ensemble quotient $(\mathcal{P}_{|\cong})_{\overline{\mathcal{R}}}$.*

Preuve : (i) Puisque la relation $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence, elle forme ainsi une partition de $\mathcal{P}_{|\cong}$. Plus précisément, la classe d'équivalence $G_{\overline{\mathcal{R}}}(P)$ de l'ensemble $\mathcal{P}_P$ pour la relation $\overline{\mathcal{R}}$ est égale à $\mathcal{P}_{G(P)} = \{\mathcal{P}_Q : Q \in G(P)\}$; ainsi, $\{\mathcal{P}_G : G \in \mathcal{S}\} = \{\mathcal{P}_{G(P)} : P \in \mathcal{P}\}$ forme une partition de $\mathcal{P}_{|\cong}$. Par la suite, $\mathcal{S}$ forme bien une partition de $\mathcal{P}$.

(ii) Par construction même de la relation $\overline{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que pour chaque G de $\mathcal{S}$, les préférences dans $\mathcal{P}_G$ sont connexes.

(iii) il est facile de voir que la relation $=_g$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Montrons qu'elle est aussi totale. Soit G' et G'' deux éléments distincts de $\mathcal{S}$; il existe alors deux lois R' et R'' de $\mathcal{P}$ telles que $G' = G(R')$ et $G'' = G(R'')$. Soit $P' \in G(R')$, notons :

$$X' = \{Q \in G(R'') : Q \succ P'\} \qquad \text{et} \qquad Y' = \{Q \in G(R'') : P' \succ Q\} ;$$

ainsi : $X' \cup Y' = \varnothing$ et $X' \cup Y' = G(R'')$. Remarquons que pour tout Q de $G(R'')$: soit $\mathcal{P}_Q \subset X'$ soit $\mathcal{P}_Q \subset Y'$. Nous affirmons cependant que X' ou Y' est vide. En effet, supposons le contraire; soit Q et $F \in G(R'')$ tels que $\mathcal{P}_Q \subset X'$ et $\mathcal{P}_F \subset Y'$. Ainsi le couple $(\mathcal{P}_Q, \mathcal{P}_F)$ n'appartient pas au graphe de la relation $\overline{\mathcal{R}}$, d'où une contradiction. Il reste à prouver que pour P' et P'_1 de $G(R')$: $X'_1 = \varnothing$ si $X' = \varnothing$ et, $Y'_1 = \varnothing$ si $Y' = \varnothing$; où X'_1 et Y'_1 représentent respectivement les ensembles associés à P'_1 définis de la même manière que X' et Y'. Montrons par exemple que si $X' = \varnothing$ alors nécessairement $X'_1 = \varnothing$. Supposons que $X' = \varnothing$ alors que $X'_1 \neq \varnothing$. Or $X'_1 \neq \varnothing \Rightarrow Y'_1 = \varnothing$, d'où $G(R'') = X'_1$, et d'autre part $X' = \varnothing \Rightarrow G(R'') = Y'$.

Ainsi donc, $\forall Q \in G(R'') : P' \succ Q \succ P'_1$. (11)

Soit Q'' un élément de $G(R'')$, formons les ensembles :

$$X'' = \{P \in G(R') : Q'' \succ P\} \qquad \text{et} \qquad Y'' = \{P \in G(R') : P \succ Q''\}.$$

D'après ce qui précède, ou bien $X'' = \varnothing$ ou bien $Y'' = \varnothing$. Ce qui est impossible puisque $P' \in Y''$ et $P'_1 \in X''$; donc nécessairement $X'_1 = \varnothing$.

On conclut donc que pour tout P de $G(P')$: $\forall Q \in G(P'')$, $P \succ Q$ ou $Q \succ P$. □

Nous allons maintenant étendre la proposition 6 au cas où les préférences sont connexes.

Proposition 8 : *Soit P non plus grand élément de $(\mathcal{P}, \succsim)$, $G_{\overline{\mathcal{R}}}(P) = \mathcal{P}_{G(P)} = \mathcal{P}_G$ la $\overline{\mathcal{R}}$-classe d'équivalence de la $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_P$. Il existe une utilité $u(.)$ sur $(\mathcal{C}, \succsim_C)$ et une utilité $V(.)$ sur $(\mathcal{P}_G, \succsim)$ de la forme :*

$$V(R) = \widehat{a}(u_R^{\min}) \int_C u(c)\, dR(c) + \widehat{b}(u_R^{\min}),$$

donc linéaire sur chaque $\cong$*-c.é.* $\mathcal{P}_s \subset G$. *De plus,* $\widehat{a}\,(u_R^{\min}) > 0$ *et chacune des fonctions* $u\,(.)$ *et* $V\,(.)$ *est unique mod t.a.s.c.*

Preuve : Si $(\mathcal{P},\ \succsim)$ admet un plus grand élément $\overline{P}$, il existe $\overline{G} = G(\overline{P})$ dans $\mathcal{S}$ tel que $\overline{G} = \{Q \in \mathcal{P}\ :\ Q \cong \overline{P}\}$; par suite, $\mathcal{P}_{\overline{G}}$ admet une seule $\cong$-c.é. La proposition est alors une conséquence immédiate du théorème 3. Pour la suite, nous supposons donc que $(\mathcal{P},\ \succsim)$ n'admet pas de plus grand élément. Soit $u\,(.)$ une fonction d'utilité sur $(\mathcal{C},\ \succsim_{\mathcal{C}})$ vérifiant les propriétés du théorème 3.

(i) Nous construisons une fonction $V\,(.)$ sur $\mathcal{P}_G$ comme suit :

– Soit $Q \in G$, par définition de $\overline{\mathcal{R}}$, il existe une suite finie $(\mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\cong$-c.é. telle que : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_P$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_Q$, $\mathcal{P}_i \ll \mathcal{P}_{i+1}$ et $\mathcal{R}\,(\mathcal{P}_i,\ \mathcal{P}_{i+1})$, $\forall\, i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$. Utilisant la proposition 6 de façon répétée, nous pouvons construire de proche en proche une fonction $V\,(.)$ sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_1,\,\mathcal{P}_2]} = \{\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_{|\cong}\ :\ \mathcal{P}_1 \ll \overline{\mathcal{P}} \ll \mathcal{P}_2\}$, puis sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_2,\,\mathcal{P}_3]}$ à partir de ses valeurs déjà connues dans tout $\mathcal{P}_2$, etc.

Nous montrerons que $V\,(.)$ ne dépend pas des $\cong$-c.é. intermédiaires utilisées. Pour cela, supposons qu'il existe une autre suite finie $(\mathcal{P}'_j)_{1 \leq j \leq m}$ de $\cong$-c.é. telle que : $\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}_P$, $\mathcal{P}'_m = \mathcal{P}_Q$, $\mathcal{P}'_j \ll \mathcal{P}_{j+1}$ et $\mathcal{R}\,(\mathcal{P}'_j,\ \mathcal{P}'_{j+1})$, $\forall\, j = 1, \ldots, m-1$. Notons $V'\,(.)$ la fonction construite de proche en proche sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}_Q]}$ en utilisant cette dernière suite. Formons la suite $(\mathcal{P}''_k)_{1 \leq k \leq r}$ obtenue en rangeant en ordre croissant pour la relation $\ll$ les éléments des deux suites finies $(\mathcal{P}_i)_i$ et $(\mathcal{P}'_j)_j$. Puisque les fonctions $V\,(.)$ et $V'\,(.)$ coïncident dans $\mathcal{P}_P$, elles coïncident alors dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}''_2]}$.

Montrons que si $V\,(.)$ et $V'\,(.)$ coïncident dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}''_{k-1}]}$, elles coïncident aussi dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}''_k]}$.
Le résultat est évident lorsque $\mathcal{P}''_{k-1} - \mathcal{P}''_k$.
Sinon, il existe un indice i tel que : $\mathcal{P}_{i-1} \underline{\ll} \mathcal{P}''_{k-1} \ll \mathcal{P}''_k \underline{\ll} \mathcal{P}_i$, et un indice j tel que : $\mathcal{P}'_{j-1} \underline{\ll} \mathcal{P}''_{k-1} \ll \mathcal{P}''_k \underline{\ll} \mathcal{P}'_j$. Les fonctions $V\,(.)$ et $V'\,(.)$ coïncident dans $\mathcal{P}''_k$. Il existe une fonction unique ayant ces valeurs dans $\mathcal{P}''_k$ et possédant les propriétés de la proposition 6 dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}''_{k-1},\,\mathcal{P}''_k]}$; c'est le cas de la fonction $V\,(.)$ qui les possède dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{i-1},\,\mathcal{P}_i]}$ et de la fonction $V'\,(.)$ qui les possède dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}'_{j-1},\,\mathcal{P}'_j]}$; donc $V\,(.)$ et $V'\,(.)$ coïncident dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}''_{k-1},\,\mathcal{P}''_k]}$, donc dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}''_k]}$. Par récurrence, les fonctions $V\,(.)$ et $V'\,(.)$ coïncident donc dans $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_P,\,\mathcal{P}_Q]}$.

– Soit $Q \in G$ telle que $\overline{\mathcal{R}}\,(\mathcal{P}_Q,\ \mathcal{P}_P)$. Dans ce cas, nous construisons d'abord une fonction $U_*\,(.)$, prenant des valeurs données en $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ de $\mathcal{P}_Q$, sur tout $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_Q,\,\overline{\mathcal{P}}]}$ où $\overline{\mathcal{P}}$ appartient à $\mathcal{P}_{|\cong}$ et vérifie $\overline{\mathcal{R}}\,(\mathcal{P}_Q,\ \overline{\mathcal{P}})$ par le procédé ci-dessus. Par une transformation affine, nous obtenons la fonction $V(.)$ sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_Q, \overline{\mathcal{P}}]}$ ayant les valeurs précises dans $\mathcal{P}_P$ et prolongeant donc la fonction $U_*(.)$ précédemment construite sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_Q, \overline{\mathcal{P}}]}$.

– Soit $Q \in G$ telle que $Q \cong P$. La fonction $V(.)$ sera celle de la proposition 6, $V(.)$ peut donc être ainsi construite sur tout $\mathcal{P}_G$.

(ii) Montrons que la fonction $V(.)$ est une utilité sur $(\mathcal{P}_G, \succsim)$.
Pour cela, il faut montrer que si $Q_1, Q_2 \in G = G(P)$, $R_1 \in (\mathcal{P}_{Q_1}$ et $R_2 \in \mathcal{P}_{Q_2}$, alors :

$$R_1 \succsim R_2 \quad \Leftrightarrow \quad V(R_1) \geq V(R_2). \tag{12}$$

Remarquons que la propriété (II) de la proposition 7 est vraie si $R_1 \cong R_2$ puisque $V(.)$ est une utilité sur chaque $\mathcal{P}_Q$ où $Q \in G$. Supposons que Non $[Q_1 \cong Q_2]$ est vraie; alors $\overline{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_{Q_2})$. D'après la définition 5, il existe une suite finie $(\mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\cong$-c.é. telle que : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{Q_1}$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{Q_2}$, $\mathcal{P}_i \ll \mathcal{P}_{i+1}$ et $\mathcal{R}(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_{i+1})$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$. La proposition 6 nous affirme que $V(.)$ est une utilité sur chaque $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{i-1}, \mathcal{P}_i]}$, $\forall i = 2, \ldots, n$. S'il y a recouvrement des préférences dans $\mathcal{P}_{Q_1}$ et $\mathcal{P}_{Q_2}$, l'unique utilité sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_{Q_2}]}$, $\succsim)$ qui satisfait la propriété (8) de la proposition 6 coïncide avec la fonction $V(.)$ sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_{Q_2}]}$, d'où la propriété annoncée. Dans le cas contraire, nous supposons que $V(.)$ est une utilité sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_{i-1}]}$ et nous montrerons qu'elle en est une sur $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_i]}$. En effet, considérons un élément R_1 de $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{i-1}, \mathcal{P}_i]}$ et un élément R_2 de $\mathcal{P}_{[\mathcal{P}_{Q_1}, \mathcal{P}_{i-1}]}$. Soit pour tout $R' \in \mathcal{P}_{i-1}$, $R_1 \succ R'$, et donc $R_1 \succ R_2$ d'une part et $V(R_1) > V(R_2)$ d'autre part. Soit il existe $R' \in \mathcal{P}_{i-1}$ tel que $R' \succsim R_1$; alors il existe $R'_1 \in \mathcal{P}_{i-1}$ tel que $R'_1 \sim R_1$; d'où $V(R'_1) = V(R_1)$. Ainsi donc, $R_1 \succsim R_2 \Leftrightarrow R'_1 \succsim R_2$ et $R'_1 \succsim R_2 \Leftrightarrow V(R'_1) \geq V(R_2)$.

En conclusion : $R_1 \succsim R_2$ si et seulement si $V(R_1) \geq V(R_2)$. D'après sa forme, la fonction $V(.)$ est bien linéaire sur chaque $\mathcal{P}_s \subset G$ et elle est unique mod. t.a.s.c. □

On peut rassembler les résultats de la façon suivante :

PROPOSITION 9 : *Il existe une fonction $u(.)$ de C dans $\mathfrak{R}$, des fonctions $\widehat{a}(.)$ et $\widehat{b}(.)$ de $\mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ dans $\mathfrak{R}$ tels que pour tous P, Q de $\mathcal{P}$:*

$$P \succsim Q \Leftrightarrow \mathcal{P}_{G(P)} \succ_g \mathcal{P}_{G(Q)}$$

ou $$[\mathcal{P}_{G(P)} = \mathcal{P}_{G(Q)} \text{ et } \widehat{a}(u_P^{\min}) \int_C u(c)\, dP(c) + \widehat{b}(u_P^{\min})$$

$$\geq \widehat{a}(u_Q^{\min}) \int_C u(c)\, dQ(c) + \widehat{b}(u_Q^{\min})].$$

De plus, $u(.)$ est unique mod. t.a.s.c.

Pour nous résumer, nous donnons le résultat suivant :

THÉORÈME 4 : *La relation* $\succsim$ *dans* $\mathcal{P}$, *ensemble de toutes les lois sur l'ensemble des résultats* C *et la relation dérivée* $\succsim_C$ *dans* C *satisfont aux axiomes A1 à A4, si et seulement si, il existe une fonction* $u(.)$ *de* C *dans* $\mathfrak{R}$, *des fonctions* $\widehat{a}(.)$ *et* $\widehat{b}(.)$ *à valeurs réelles, et un ordre total* $\succeqq$ *sur une partition* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{P}$ *tel que :*

(i) *pour tous* $P,\ Q \in \mathcal{P}$,

$$P \succsim Q \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{H}(P) \succ \mathcal{H}(Q) \\ \text{ou} \\ \mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(Q) \quad et \quad V(P) \geq V(Q) \end{cases}$$

où :

– $\mathcal{H}(P)$ *est un élément de* $\mathcal{H}$ *contenant l'ensemble*

$$\mathcal{P}_P = \{R \in \mathcal{P} : R \cong P\};$$

$$- V(P) = \widehat{a}(u_P^{\min}) \int_C u(c)\, dP(c) + \widehat{b}(u_P^{\min});$$

avec $\widehat{a}(u_P^{\min}) > 0$ *et où* $u_P^{\min}$ *est donné par la définition* 3.

(ii) *Les propriétés suivantes sont vraies :*

– $u_P^{\min} > u_Q^{\min} \Rightarrow \mathcal{H}(P) \succeqq \mathcal{H}(Q)$;

– $[\mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(Q)$ et $u_P^{\min} > u_Q^{\min}]$

$$\Rightarrow \quad \widehat{b}(u_Q^{\min}) - \widehat{b}(u_P^{\min}) \leq \operatorname*{Inf}_{u(c) \geq u_P^{\min}} [\widehat{a}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min})]\, u(c).$$

(iii) *Si* $u_P^{\min} = u_Q^{\min}$ *alors*

$$P \succsim Q \quad \Leftrightarrow \quad \int_C u(c)\, dP(c) \geq \int_C u(c)\, dQ(c).$$

De plus les propriétés dans (ii) *impliquent que* $u(\cdot)$ *est une utilité sur* $(C, \succsim_c)$ *unique modulo t.a.s.c., elles impliquent aussi que si* $\{\mathcal{P}_G : G \in \mathcal{S}\}$ *est une partition de* $\mathcal{P}_{|\cong}$ *pour la relation de connexion* $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}$ *est plus fine que* $\mathcal{H}$ *et la restriction de la fonction* $V(.)$ *sur chaque* $\mathcal{P}_G$ *est unique mod. t.a.s.c.*

Preuve : 1) Supposons que les relations $\succsim$ dans $\mathcal{P}$ et $\succsim_C$ dans C satisfont A1 à A4. Prenons pour $\mathcal{H}$ la famille $\mathcal{S}$, d'où l'ordre total $\succeqq$ sur $\mathcal{H}$ n'est autre que $\succeqq_g$ et pour tout P de $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}(P) = \mathcal{P}_{G(P)}$ de plus $\mathcal{P}_P \subset \mathcal{H}(P)$. D'après la proposition 9, il existe une fonction $u(.)$ de C dans $\mathfrak{R}$ et des fonctions à valeurs réelles $\widehat{a}(.)$ et $\widehat{b}(.)$ tels que pour tous $P,\ Q \in \mathcal{P}$,

$$P \succsim Q \Leftrightarrow \mathcal{P}_{G(P)} \succ_g \mathcal{P}_{G(Q)}$$

ou

$$\Big[\mathcal{P}_{G(P)} = \mathcal{P}_{G(Q)} \text{ et } \widehat{a}(u_P^{\min}) \int_C u(c)\, dP(c) + \widehat{b}(u_P^{\min}) \geq \widehat{a}(u_Q^{\min}) \int_C u(c)\, dQ(c) + \widehat{b}(u_Q^{\min})\Big]$$

avec $\widehat{a}(.) > 0$; d'où la partie (i).

Vérifions les propriétés de (ii) : $u_P^{\min} > u_Q^{\min} \Rightarrow \mathcal{H}(P) \succeq \mathcal{H}(Q)$.

Soit $P,\ Q \in \mathcal{P}$ tels que $u_P^{\min} > u_Q^{\min}$. Supposons que $\mathcal{H}(Q) \succ \mathcal{H}(P)$ qui est équivalent à $\mathcal{P}_{G(Q)} \succ_g \mathcal{P}_{G(P)}$, soit encore à : $Q' \succ P'$ pour tous $Q' \in G(Q)$ et $P' \in G(P)$; en particulier : $Q \succ P$. Or, par hypothèse, $u_P^{\min} > u_Q^{\min}$. Traitons le cas où P et Q sont bornées inférieurement; d'où, il existe c_P et $c_Q \in \mathcal{C}$ tels que $u_P^{\min} = u(c_P)$ et $u_Q^{\min} = u(c_Q)$. Puisque $u(\cdot)$ est une utilité sur $\mathcal{C}$, alors :

$$u_P^{\min} > u_Q^{\min} \quad \Leftrightarrow \quad u(c_P) > u(c_Q) \quad \Leftrightarrow \quad c_P \succ_c c_Q.$$

Ainsi :

$$\mathcal{C}_P = \bigcap_{P([c,\, \rightarrow[)=1} [c,\, \rightarrow[= \bigcap_{u(c) \leq u_P^{\min}} [c,\, \rightarrow[\subset \bigcap_{u(c) \leq u_Q^{\min}} [c,\, \rightarrow[= \mathcal{C}_Q$$

Or $Q \in \mathcal{P}_Q \subset \mathcal{P}_{G(Q)}$, donc $Q(\mathcal{C}_P) \in]0,\ 1[$ et $Q(\mathcal{C}_Q/\mathcal{C}_P) \in]0,\ 1[$. Posons $Q(\mathcal{C}_P) = 1 - \alpha$, on écrit la loi Q sous la forme : $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont les deux lois définies par : $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$Q_1(A) = \frac{Q(A \cap (\mathcal{C}_Q/\mathcal{C}_P))}{Q(\mathcal{C}_Q/\mathcal{C}_P)} \qquad \text{et} \qquad Q_2(A) = \frac{Q(A \cap \mathcal{C}_P)}{Q(\mathcal{C}_P)}$$

Remarquons que $P \succ_{\mathscr{d}} Q_1$, d'où la loi P_1 définie par :

$$P_1 = \alpha P + (1 - \alpha) Q_2 \in \mathcal{P}_P \subset \mathcal{P}_{G(P)},$$

et vérifie $P_1 \succ_{\mathscr{d}} Q$. Par A4 (i), $P_1 \succ Q$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{P}_{G(Q)} \succ_g \mathcal{P}_{G(P)}$.

Ainsi donc : $u_P^{\min} > u_Q^{\min} \Rightarrow \mathcal{H}(P) \succeq \mathcal{H}(Q)$.

$$-[\mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(Q) \text{ et } u_P^{\min} > u_Q^{\min}] \Rightarrow \widehat{b}(u_Q^{\min}) - \widehat{b}(u_P^{\min}) \leq \operatorname*{Inf}_{u(c) \geq u_P^{\min}} [\widehat{a}(u_P^{\min}) - \widehat{a}(u_Q^{\min})]\, u(c) \tag{13}$$

La relation (13) est équivalente à :

$$\widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \leq (\widehat{a}\,(u_P^{\min}) - \widehat{a}\,(u_Q^{\min}))\,u_P^{\min}$$

si

$$\widehat{a}\,(u_P^{\min}) \geqq \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\,;$$

$$\widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \leq (\widehat{a}\,(u_P^{\min}) - \widehat{a}\,(u_Q^{\min}))\,\overline{u}$$

si

$$\widehat{a}\,(u_P^{\min}) < \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\,;$$

où $\overline{u} = \operatorname{Sup}_{c \in \mathcal{C}}\ u\,(c) \in \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$.
Donc elle est équivalente à :

$$\widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \leq \operatorname*{Inf}_{u_P^{\min} \leq y \leq \overline{u}} (\widehat{a}\,(u_P^{\min}) - \widehat{a}\,(u_Q^{\min}))\,y.$$

Soit $P,\, Q \in \mathcal{P}$; d'une part, $u_P^{\min} > u_Q^{\min} \Rightarrow \mathcal{C}_P \subsetneqq \mathcal{C}_Q$, soit encore $\mathcal{P}_Q \ll \mathcal{P}_P$; d'autre part, $\mathcal{H}\,(P) = \mathcal{H}\,(Q)$ est équivalent à $\overline{\overline{\mathcal{R}}}\,(\mathcal{P}_P,\, \mathcal{P}_Q)$. D'après la proposition 8, il existe une utilité $U\,(.)$ sur $\mathcal{P}_G$ de la forme :

$$U\,(R) = \widehat{a}\,(u_R^{\min}) \int_{\mathcal{C}} u\,(c)\; dR\,(c) + \widehat{b}\,(u_R^{\min}), \quad \forall\, R \in \mathcal{P}_s \subset G$$

($U\,(.)$ n'est autre que la fonction $V\,(.)$ dans la partie (ii)). Traitons le cas général; soit $P_1 \in \mathcal{P}_P$ et $Q_1 \in \mathcal{P}_Q$ tels que $P_1 \succ Q_1$. Puisque $U\,(.)$ est une utilité sur $\mathcal{P}_G$, ainsi :

$$\begin{aligned}
P_1 \succ Q_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \widehat{a}\,(u_P^{\min}) \int_{\mathcal{C}} u\,(c)\; dP_1\,(c) + \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \\
&\qquad > \widehat{a}\,(u_Q^{\min}) \int_{\mathcal{C}} u\,(c)\; dQ_1\,(c) + \widehat{b}\,(u_Q^{\min}) \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) < \widehat{a}\,(u_P^{\min})\,u_P^{\min} - \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\,u_Q^{\min};
\end{aligned}$$

d'où :

$$\widehat{b}\,(u_Q^{\min}) - \widehat{b}\,(u_P^{\min}) \leq \operatorname{Inf}\,\{\widehat{a}\,(u_P^{\min})\,u' - \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\,u'' : u'' < u'\},$$

par la suite on aura l'inégalité (13) puisque :

$$\begin{aligned}
&\widehat{a}\,(u_P^{\min})\,u' - \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\; u'' \\
&\quad = \widehat{a}\,(u_P^{\min}) - \widehat{a}\,(u_Q^{\min}))\,u' + \widehat{a}\,(u_Q^{\min})\,(u' - u'') \quad \text{et} \quad \widehat{a}\,(u_Q^{\min}) > 0.
\end{aligned}$$

– Si $u_P^{\min} = u_Q^{\min}$ alors

$$P \succsim Q \quad \Leftrightarrow \quad \int_C u(c)\, dP(c) \geq \int_C u(c)\, dQ(c).$$

La condition $u_P^{\min} = u_Q^{\min}$ implique le fait que les lois P et Q appartiennent à la même $\cong$-c.é., d'où le résultat cherché qui découle du théorème 3.

Les propriétés de la relation $\succsim$ dans (ii) montrent que si les deux $\cong$-c.é. $\mathcal{P}_P$ et $\mathcal{P}_Q$ vérifiant $\overline{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_P, \mathcal{P}_Q)$, alors toutes les lois appartenant à $\mathcal{P}_{G(P)} = \mathcal{P}_{G(Q)}$ doivent appartenir à un même H de $\mathcal{H}$, d'où $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{H}$. Les propriétés de la fonction $V(.)$ découlent de la proposition 8, ainsi que celles de la fonction $u(.)$

2) Soit une relation binaire $\succsim$ dans $\mathcal{P}$, des fonctions $u(.)$, $\widehat{a}(.)$ et $\widehat{b}(.)$ et un ordre total $\succeq$ sur une partition $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ satisfaisant aux propriétés du théorème. Pour cette relation $\succsim$ ainsi définie, il est facile de voir que A1 à A3 sont vérifiés.

Pour montrer que la relation $\succsim$ satisfait A4, prenons deux lois P et Q de $\mathcal{P}$ telles que $P \succ_{\mathscr{A}} Q$ et donc telles que $u_P^{\min} > u_Q^{\min}$; les propriétés dans (ii) nous conduisent à $P \succ Q$. $\square$

CONCLUSION

L'axiome d'indépendance ainsi que l'axiome de continuité de la théorie de l'utilité espérée ont été considérablement affaiblis, limitant leurs exigences de cohérence dans les choix aux cas où l'effet de certitude soit ne peut jouer, soit joue de manière semblable. Le respect de la dominance stochastique reste exigé. Nous avons obtenu ainsi un modèle normatif généralisant le modèle de l'utilité espérée.

Plus précisément, il a été montré qu'il était possible de faire l'extension des modèles proposés par Jaffray [20] et Gilboa [18] aux lois de probabilité quelconques.

Le niveau de sécurité joue un rôle crucial, car il peut représenter le critère déterminant pour les choix : dans le cas extrême, ce n'est que lorsque les niveaux de sécurité des lois sont équivalents, que l'on tient compte de leur utilité espérée afin de les différencier les unes des autres. Cependant, dans le cas général, il y a arbitrage entre le niveau de sécurité et l'espérance mathématique d'utilité. Il est logique de s'interroger sur l'existence de l'effet symétrique de l'effet de certitude, dit effet de potentiel qui résulterait de ce que les décideurs attachent une attention particulière au résultat maximum d'une décision. On peut alors envisager la coexistence de l'effet de certitude et d'un effet de potentiel, ce qui permet d'expliquer plusieurs contradictions des comportements avec le modèle EU (Cohen et Jaffray [5]). Un modèle axiomatique prenant en compte ces deux effets a été élaboré par Cohen [6]. Nous avons présenté l'extension du modèle de Cohen aux lois de probabilité quelconques dans Essid [12].

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement le professeur Jean-Yves Jaffray de l'aide qu'il m'a apportée par ses critiques et ses conseils précieux sur une version antérieure de cet article. Mes remerciements s'adressent également à Michèle Cohen dont les commentaires ont été d'une grande utilité pour le remaniement complet de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Allais, The Foundations of a Positive Theory of Choice Involving Risk and a Criticism of the Postulate and Axioms of the American School, In M. Allais and Hagen (Eds) : *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, D. Reidel, Dordrecht, 1979, p. 27-145.
2. M. Allais, The General Theory of Random Choices in Relation to The Invariant Cardinal Utility Function and The Specific Probability Function, The $(u,\ \theta)$ Model : an overview, In B. Munier (Eds), *Risk, Decision and Rationality*, D. Reidel, Dordrecht, Theory and Decision Library, 1987.
3. K. J. Arrow, *Essays in the Theory of Risk-bearing*, Markham Publishing Company, Chicago, 1971.
4. S. H. Chew, *A mixture set Axiomatization of Weighted Utility Theory*, Unpublished Manuscript, University of Arizona, 1981.
5. M. Cohen and J.-Y. Jaffray, Certainty Effect vs. Probability Distorsion : An Experimental Analysis of Decision Making under Risk, *Journal of Experimental Psychology*, 1988, **14**, n°4, p. 554-560.
6. M. Cohen, Security Level, Potentiel Level, Expected Utility : A Three- Criteria Decision Model Under Risk, *Theory and Decision*, 1992, **33**, 2, p. 101-134.
7. G. Debreu, *Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, Decision Processes-Thrall*, Coombs, Davis (Eds), Wiley, New York, 1954.
8. S. Essid, Aide à La Décision dans le Risque : Modèle et Logiciel, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 1990.
9. S. Essid, J.-Y. Jaffray and T. Said, *Experimental Study of the (m,EU) Model, Progress in Decision, Utility and Risk Theory*, Theory and Decision Library, Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 165-173.
10. S. Essid, Pourquoi remettre en cause le modèle de l'espérance mathématique d'utilité ?, Revue Tunisienne d'Economie et de Gestion, 1992, **7**, n° 9, p. 211-236.
11. S. Essid, Généralisation d'un modèle axiomatique dans le risque incluant l'effet de certitude, *International Conference on Mathematical Economics and Mathematical Finance*, Tunis, June 21-26, 1994.

12. S. ESSID, *Généralisation d'un Modèle Axiomatique dans le Risque incluant les Effets de Certitude et de Potentiel*, Cahier n° 95.16.379, GREMAQ, Toulouse, France, 1995.
13. T. S. FERGUSON, *Mathematical Statistics*, Academic Press, New York, 1967.
14. P. C. FISHBURN, *Decision and Value Theory*, Wiley, New York, 1964.
15. P. C. FISHBURN, *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York, 1970.
16. P. C. FISHBURN, *The Foundations of Expected Utility*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1982.
17. M. FRIEDMAN and L. J. SAVAGE, The Utility Analysis of Choices Involving Risks, *Journal of Political Economy*, 1948, **56**, p. 279-304.
18. I. GILBOA, A Combination of Expected Utility and Maxmin Decision Criteria, *Journal of Mathematical Psychology*, 1989.
19. I. HERTEIN and J. MILNOR, An Axiomatic Approach to Mesurable Utility, *Econometrica*, 1953, **21**, p. 291-297.
20. J.-Y. JAFFRAY, Choice under Risk and The Security Factor : An Axiomatic Model, *Theory and Decision*, 1988, **24**, p. 169-200.
21. D. KAHNEMAN and A. TVERSKY, Prospect Theory : An Analysis of Decision Under Risk, Econometrica, 1979, **47**, p. 263-291.
22. U.S. KARMARKAR, The Effet of Probabilities on The Subjective Evaluation of Lotteries, Masachussetts Institute of Technology, Sloan School of Management, Working Paper n° 698, 1974.
23. R. L. KEENEY and H. RAIFFA, *Decisions with Multiple Objectives : References and Values Tradeoffs*, Wiley : New York, 1976.
24. L. L. LOPES, Between Hope and Fear : The Psychology of Risk, *Advances in Experimental Social Psychology*, 1986.
25. M. J. MACHINA, *Generalized Expected Utility Analysis and The Nature of Violations of The Independance Axiom, Foundations of Utility and Risk Theory with Applications*, B. Stigum and Wenstop (Eds), 1983.
26. M. J. MACHINA, Choice Under Uncertainty : Problems Solved and Unsolved, *Journal of Economic Perspectives*, 1987, **1**, p. 121-154.
27. M. R. MCCORD and R. DE NEUFVILLE, Lottery Equivalents : Reduction of The Certainty Effet Problem in Utility Assessment, *Management Science*, 1986, **32**, p. 56-60.
28. J. QUIGGIN, A Theory of Anticipated Utility, *Journal of Economic Behavior and Organisation*, 1982, **3**, p. 323-343.
29. U. SEGAL, Non Linear Decision Weights with The Independance Axiom, UCLA Working Paper n° 353, 1984.
30. J. von NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press : New Jersey, 1947.
31. M. E. YAARI, The Dual Theory of Choice Under Risk, *Econometrica*, 1987, **55**, p. 95-115.