

M. BEUTHE

G. SCANNELLA

**Applications comparées des méthodes  
d'analyse multicritère UTA**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 30, n° 3 (1996),  
p. 293-315

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1996\\_\\_30\\_3\\_293\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1996__30_3_293_0)

© AFCET, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## APPLICATIONS COMPARÉES DES MÉTHODES D'ANALYSE MULTICRITÈRE UTA (\*)

par M. BEUTHE et G. SCANNELLA <sup>(1)</sup>

Communiqué par Philippe VINCKE

---

**Résumé.** – Parmi les nombreuses méthodes multicritères par agrégation totale, la méthode UTA proposée par Jacquet-Lagrèze et Siskos a l'avantage de permettre l'estimation d'une fonction d'utilité additive non-linéaire.

Cette méthode se heurte cependant à un problème de solutions multiples pour les poids calculés de la fonction d'utilité. Lorsqu'il s'agit d'évaluer et classer des projets n'appartenant pas à l'ensemble de référence, les classements de ces projets dépendront alors de la fonction choisie. Ce problème a déjà été abondamment discuté dans la littérature dans le cas où l'estimation de la fonction d'utilité ne peut se faire sans erreurs. Cependant, peu de solutions proposées dans ce contexte peuvent s'appliquer au cas où l'estimation est possible sans erreurs.

C'est ce problème de solutions multiples et de la qualité prédictive de la méthode UTA que nous analysons dans cet article, en utilisant comme exemple d'application le classement de projets d'investissements routiers. Afin de le résoudre, nous proposons, en premier lieu, d'utiliser un plan d'expérimentation fractionnaire optimal comme ensemble de référence. En second lieu, nous étudions différentes variantes possibles de la méthode et en proposons une nouvelle qui, maximisant les plus petites différences entre les utilités des projets, permet de réduire très fortement le domaine des solutions possibles.

Mots-clés : Multicritère, solutions multiples, fonction d'utilité additive, programmation linéaire.

**Abstract.** – Among the many multicriteria methods by total aggregation the UTA method proposed by Jacquet-Lagrèze and Siskos has the advantage of allowing the estimation of a non-linear additive utility function.

However this method comes up against a problem of multiple solutions for the calculated weights of the utility function. When it comes to evaluating and classifying projects which are not part of the reference set the classifications of those projects will then depend on the chosen function. This problem has already been discussed in the literature in the case where the utility function cannot be estimated without errors. However, few of the solutions advanced in that context can be applied to the case where the estimation is without errors.

This problem of multiple solutions and of predictive quality of the UTA method is analysed in the present paper, using as an example of application the classification of road investments projects. First of all, we propose to use an optimal fractional experimental plan as reference set. Then, we study different possible variants of the method and propose a new one which, maximising the

---

(\*) Reçu en mai 1994.

Cette recherche a été réalisée dans le cadre du Programme « Transport et Mobilité » des Services Fédéraux des Affaires Scientifiques, Techniques et Culturelles, que nous remercions de leur appui. Nous avons bénéficié des commentaires constructifs de Ch. Derbaix, N. Meskens et A. Sayez. Nous les en remercions également.

<sup>(1)</sup> Faculté Universitaire Catholique de Mons, 151, chaussée de Binche, 7000 Mons, Belgique.

*smallest differences between the utilities of the projects, allows to reduce very strongly the domain of possible solutions.*

Keywords: Multicriteria, multiple solutions, additive utility function, linear programming.

## INTRODUCTION

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse multicritère qui ont chacune leurs avantages et inconvénients. Une excellente présentation critique d'un bon nombre de celles-ci est donnée par Vincke [28]. Parmi les méthodes d'agrégation totale, la méthode UTA proposée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [13, 14 et 15] a l'avantage de permettre l'estimation d'une fonction d'utilité additive non-linéaire. En effet, même si l'estimation en est faite par la programmation linéaire par objectifs, les fonctions d'utilité partielle qui la composent ne sont linéaires que par morceaux. Ceci permet l'estimation de fonctions qui représentent mieux les préférences du décideur.

Cette méthode se heurte cependant à un problème de solutions multiples pour les poids calculés de la fonction d'utilité. Dans la mesure où il ne s'agit que de sélectionner un ou plusieurs projets parmi l'ensemble des projets analysés, cette situation ne porte pas à conséquence, du moins si les fonctions multiples sont estimées sans erreur : chacune des fonctions optimales aboutira au même classement. Cependant, s'il s'agit d'évaluer et classer d'autres projets, les classements produits par les diverses fonctions pourront bien être différents.

C'est ce problème des solutions multiples et de la qualité prédictive de la méthode UTA que nous analysons dans cet article. Sa première section rappellera brièvement les éléments de base de la méthode UTA et soulignera les problèmes d'estimation qui la caractérisent. La deuxième section présentera un exemple d'application aux investissements routiers qui illustrera ces problèmes. Dans cet exemple, une fonction d'utilité théorique sera utilisée pour établir les préférences entre un certain nombre de projets de référence. Nous y proposons de composer cet ensemble de référence conformément à un plan d'expérimentation fractionnaire optimal. Les préférences obtenues, introduites dans le programme UTA, permettront une estimation de la fonction théorique. La fonction estimée et la fonction théorique seront comparées et appliquées à un ensemble d'autres projets afin de vérifier la qualité prédictive de l'estimation. La troisième section étudiera les diverses variantes possibles de la méthode afin de réduire le problème des solutions multiples. Nous en arriverons ainsi à proposer une nouvelle méthode qui, appliquée à l'estimation de deux fonctions d'utilité différentes,

l'une linéaire et l'autre concave, semble bien produire des résultats plus précis.

# 1. LES UTILITÉS ADDITIVES ET LA MÉTHODE UTA

Il s'agit d'évaluer un ensemble  $A$  d'actions, ou projets, par rapport à  $N$  critères différents qui correspondent aux conséquences favorables des projets. Les mesures de ces conséquences sont données par le vecteur  $g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_N(a))$  pour un projet  $a$  quelconque appartenant à  $A$ . Dans notre domaine d'application, les  $g_i(a)$  seront, par exemple, le rapport des bénéfices aux coûts d'un projet d'autoroute, son impact favorable sur la sécurité, etc. On suppose l'existence d'une fonction d'utilité

$$U(g(a)) = U(g_1(a), g_2(a), \dots, g_N(a)), \quad (1)$$

qui permet d'agréger ces critères, d'évaluer ainsi chaque projet et de comparer les projets les uns aux autres. Cette fonction doit satisfaire les axiomes classiques de la théorie de la décision, à savoir les axiomes de comparabilité, de réflexivité, de transitivité des choix, de continuité et de stricte dominance.

Cette fonction permet alors de classer tout projet dans un préordre faible total : si  $P$  indique une préférence stricte et  $I$  l'indifférence entre deux projets  $a$  et  $b$ , alors on a

$$U[g(a)] > U[g(b)] \Leftrightarrow a P b \quad (2)$$

$$U[g(a)] = U[g(b)] \Leftrightarrow a I b \quad (3)$$

On suppose que la fonction d'utilité est additive, c'est-à-dire que

$$U[g(a)] = \sum_{i=1}^N u_i[g_i(a)] \quad \text{avec } u_i(g_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_i}{dg_i} > 0. \quad (4)$$

L'additivité implique en particulier que les utilités partielles d'un critère  $u_i(g_i(a))$  ne dépendent que du niveau du critère considéré <sup>(1)</sup>.

La méthode UTA, proposée initialement par Jacquet-Lagréze et Siskos [14, 15], consiste à estimer cette fonction sur un ensemble de projets de

<sup>(1)</sup> Pour une discussion des fonctions d'utilité additives voir Keeney et Raiffa [16] ainsi que Fishburn [12].

référence  $A'$ , en recherchant une approximation par intervalles linéaires au moyen de la méthode de la programmation linéaire par objectifs de Charnes et Cooper [6, 7].

Pour appliquer cette méthode, il faut en premier lieu diviser le domaine de variation de chaque critère  $[g_{i*}, g_i^*]$ , défini par la valeur la moins favorable du critère ( $g_{i*}$ ) et par sa meilleure valeur ( $g_i^*$ ), en  $\alpha_i$  intervalles égaux  $[g_i^j, g_i^{j+1}]$ . Ce sont les utilités partielles à ces bornes, soit  $u_i(g_i^j)$ , qui seront estimées par le programme. Les valeurs des utilités pour des valeurs des critères différentes de celles des bornes sont obtenues par interpolation linéaire.

Ainsi, pour  $g_i(a) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$ ,

$$u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} [u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)]. \quad (5)$$

Pour chaque couple de projets  $(a, b)$  appartenant à  $A'$ , le décideur exprime ses préférences ou indifférences. Les résultats de ces comparaisons sont introduits sous forme de contraintes conformes aux conditions (2) et (3), soit

$$\sum_{i=1}^N \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \Leftrightarrow \quad a P b \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a I b \quad (7)$$

Les termes  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$  qui ne peuvent être négatifs, y représentent des erreurs potentielles relatives à l'estimation des utilités d'un projet. Il y a donc autant d'erreurs considérées qu'il y a de projets. C'est la somme de ces erreurs qui constitue la fonction objectif  $F$  qui sera minimisée par rapport aux  $u_i(g_i^j)$  :

$$F = \sum_{a \in A'} \sigma(a)$$

La constante  $\delta$ , sur le côté droit de l'inégalité (6), doit être strictement positive. Sa valeur peut évidemment influencer la solution du programme. Aussi est-il souhaitable de ne pas lui donner initialement une valeur élevée.

L'hypothèse que les utilités partielles augmentent avec la valeur des critères impose une série de contraintes supplémentaires :

$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

où  $s_i$  doit être strictement positif. Comme pour  $\delta$ , il est souhaitable de lui donner initialement une petite valeur afin de ne pas influencer la solution finale <sup>(2)</sup>.

Enfin les utilités partielles sont normalisées par les conditions

$$\sum_{i=1}^N u_i(g_i^*) = 1 \quad (9)$$

et

$$u_i(g_{i*}) = 0 \quad \forall i \quad (10)$$

Reprenant l'ensemble de ces éléments, nous pouvons écrire le programme linéaire UTA de la manière suivante :

$$\text{MIN } F = \sum_{a \in A'} \sigma(a)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^N \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \Leftrightarrow \quad a P b \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a I b \quad (7)$$

$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i, \quad \forall i, \quad \forall j \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N u_i(g_i^*) = 1 \quad (9)$$

---

<sup>(2)</sup> Nous reviendrons sur cette question dans la section 3.

$$u_i(g_{i^*}) = 0, \quad \forall i \quad (10)$$

$$\sigma(a) \geq 0, \quad \forall a \in A' \quad (11)$$

$$u_i(g_i^j) \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j, \quad (12)$$

la relation (5) étant utilisée pour calculer les utilités des  $g_i(a)$  entre deux bornes consécutives.

Les solutions de ce programme peuvent être de deux types : soit la fonction objectif  $F$  atteint son minimum  $F^* = 0$ , soit des erreurs demeurent dans l'estimation des utilités et  $F^* > 0$ . Dans le premier cas, la solution appartient à l'ensemble convexe des solutions admises par les contraintes du programme dont les termes d'erreurs sont tous nuls. Le nombre de solutions sera en général infini avec des fonctions d'utilité qui pourront être fort différentes. Dans le second cas, aucune solution n'est admise par le système de contraintes (sans les termes d'erreur); c'est pourquoi certains termes d'erreur prennent une valeur positive. Alors il n'existe pas à vrai dire de fonction d'utilité qui représente sans erreur les préférences exprimées par le décideur. Cette 'solution' peut, de surcroît, ne pas être unique, comme dans tout programme linéaire.

Bien sûr, la méthode ne peut être considérée que comme un outil d'aide à la décision et l'expert doit s'en remettre finalement au décideur qui pourra toujours modifier la fonction d'utilité calculée. Lorsque les solutions sont multiples, on pourrait donc reprendre l'analyse avec le décideur pour préciser ou corriger quelque peu ses préférences et obtenir ainsi, peut-être en plusieurs étapes interactives, une solution satisfaisante. C'est une solution parfaitement légitime mais qui peut se révéler assez lourde dans certains cas. On doit donc souhaiter obtenir une estimation aussi précise que possible.

Afin de réduire cette difficulté, certains auteurs proposent une analyse dite post-optimale des résultats. Le cas où  $F^* > 0$  a déjà été longuement discuté dans la littérature. Siskos [22] et Marchet et Siskos [18] proposent de mesurer la cohérence du classement des actions de référence avec celui du décideur par l'indice de Kendall, pour ne retenir que la fonction qui maximiserait cet indice. Il n'est cependant pas exclu que plusieurs fonctions produisent le même indice de Kendall tout en classant différemment les autres actions. Dans ce cas, le problème serait quelque peu réduit mais pas entièrement résolu. De plus, il apparaît qu'une fonction qui n'est pas 'optimale', mais qui

correspondrait à une solution pour laquelle  $F$  n'est pas minimum, pourrait bien effectuer le meilleur classement. Enfin, cette procédure fait appel à un critère extérieur à la méthode UTA.

Despotis, Yannacopoulos et Zopounidis [11] proposent de minimiser en une seconde étape la différence entre l'erreur maximale et minimale de la première estimation. De cette manière, ils obtiennent une nouvelle fonction, qui peut ne pas être unique, mais qui réalise des classements souvent meilleurs. Quant à Siskos [22 et 23], il applique aux actions de référence successivement toutes les fonctions optimales extrêmes, obtenues par une analyse de sensibilité sur les dernières bornes; il calcule ensuite pour chaque comparaison de deux actions un indice de crédibilité qui traduit le nombre de préférences accordées à une action par rapport à l'autre et utilise ces indices pour classer les actions. Cependant, cette méthode de surclassement se heurte au problème classique d'intransitivité et/ou d'incomparabilité des actions, qui caractérise les classements par vote, ainsi que l'ont démontré Arrow [3] et Arrow et Raynaud [4]. Enfin, plus simplement, Jacquet-Lagrèze et Siskos [15] proposent l'utilisation d'une fonction qui serait la moyenne des fonctions extrêmes.

Lorsque la fonction  $F$  est nulle, c'est-à-dire lorsque les fonctions calculées expriment les préférences du décideur sans erreur, les deux premières méthodes citées ne peuvent plus être utilisées, à moins de disposer d'un échantillon supplémentaire d'évaluations de projets qui n'ont pas servi à l'estimation. Malgré ces difficultés, la méthode de Siskos mériterait d'être testée, mais elle relève d'une autre logique d'analyse, celle des méthodes d'agrégation partielle. Nous ne l'appliquerons pas dans cet article, centré sur une méthode d'agrégation complète.

Reste la solution assez pratique de la fonction moyenne. Nous nous proposons donc d'évaluer cette méthode dans le cas où  $F = 0$ , et d'examiner par ailleurs si le modèle UTA ne pourrait pas être amendé afin d'obtenir un ensemble de solutions plus restreint, voire une solution unique, sans devoir recourir à une démarche interactive. Dans les sections 2 et 3, nous examinerons ainsi diverses méthodes susceptibles de produire une estimation plus précise, et nous les évaluerons par rapport à leur capacité d'effectuer correctement un classement sur des projets qui n'ont pas servi à l'estimation. Mais pour commencer, nous présenterons dans la section suivante une application du modèle UTA de base, qui illustrera le problème et servira d'étalon aux méthodes discutées ultérieurement.



## 2. APPLICATION DE LA MÉTHODE UTA

### A. Les données de base

Cette application se fera sur les données réelles de 353 projets d'infrastructures routières qui étaient envisagées au début des années '80 pour la construction du réseau belge durant la période 1985–2010. Après une première étude coûts-bénéfices [5], l'Administration des routes, en collaboration avec le Centre de Recherches Routières (CRR), avait réalisé une analyse multicritère [19] qui utilisait 29 critères regroupés en 6 thèmes principaux : la sécurité sur la route utilisée actuellement, les aspects socio-économiques, dont le rapport coûts-bénéfices du projet et son utilisation de main-d'œuvre, l'impact sur le milieu de vie, le trafic actuel et futur, les problèmes de planification et d'urbanisme, et enfin l'état d'usure de la route actuelle.

Pour chacun des 29 critères, le CRR construisit une échelle discrète allant de 1 à 5 pour mesurer les effets positifs du projet. A l'intérieur de chaque thème, une pondération intermédiaire fut établie par un groupe de techniciens : elle permettrait d'agréger les mesures des vingt-neuf critères en six indices correspondant aux six thèmes principaux. Enfin, ces six indices furent agrégés en une mesure unique de l'intérêt ou utilité d'un projet par une pondération primaire fixée par le décideur politique. Cette mesure de l'utilité était donc une fonction linéaire des vingt-neuf critères, dont la pondération primaire pouvait faire l'objet d'une analyse de sensibilité. Elle permettait de classer tous les projets considérés.

Nous accepterons ici les échelles de mesure ainsi que les pondérations intermédiaires des experts du CRR, pour utiliser les six indices des thèmes principaux <sup>(3)</sup>. Ceux-ci deviennent donc les six critères pour lesquels nous voulons trouver une fonction d'utilité additive selon la méthode UTA. Nous allons également utiliser la fonction d'utilité du CRR pour comparer vingt-cinq projets choisis comme actions de référence, la fonction du CRR jouant le rôle du décideur. Les préférences ainsi obtenues seront introduites dans le programme UTA pour écrire les contraintes (6) et (7). Nous pouvons alors examiner dans quelle mesure la solution de ce programme nous fournit des estimations des utilités  $u_i(g_i(a))$  qui sont très proches de celles du CRR.

---

<sup>(3)</sup> Une discussion des échelles utilisées et de la méthodologie du CRR est donnée par Delhay [8] et Van Hecke [27].

En fait, nous simulons un problème d'évaluation en appliquant la méthode UTA pour essayer de retrouver la fonction linéaire établie par le CRR <sup>(4)</sup>.

## B. Le choix des actions de référence

Comme l'objectif est d'obtenir un classement de tous les projets et non seulement de choisir le meilleur, les projets de référence ne peuvent se limiter à des projets qui seraient efficaces par rapport au niveau des six critères. C'est pourquoi, pour débiter, nous devons sélectionner un certain nombre de projets représentatifs de l'ensemble des projets possibles. D'une part, les projets doivent être choisis de telle manière que leurs comparaisons par le décideur fournissent le maximum d'information sur ses préférences. D'autre part, si l'on veut garder à la procédure un caractère opérationnel et pratique, il convient de limiter le nombre de projets soumis à l'appréciation du décideur.

Pour répondre à ces exigences, nous pouvons faire appel à la théorie de l'information ainsi qu'aux techniques statistiques des plans expérimentaux <sup>(5)</sup>. Sans doute n'allons-nous pas effectuer une analyse de régression ou de variance qui s'appliquerait à des niveaux d'utilité déclarés par le décideur. Le programme linéaire UTA se réfère seulement à des jugements de préférence entre projets. Il n'en reste pas moins que nous voulons estimer une fonction d'utilité (ordinaire) linéaire par rapport aux niveaux des cinq bornes des six critères analysés. On peut ainsi présenter cette utilisation de la programmation linéaire comme une analyse de régression ordinaire, pour laquelle il est également important de pouvoir se baser sur des données bien contrastées fournissant un maximum d'informations. Mais, puisqu'il s'agit d'estimer la fonction d'utilité, il n'est pas nécessaire de ne soumettre au décideur que des projets réels. Ceci nous laisse donc une certaine liberté de choix des projets de référence, comme dans une situation d'expérimentation, pour autant que les projets fictifs considérés soient définis et présentés au décideur comme des projets concrets, éventuellement des variantes de projets réels.

Définissons  $X$  comme étant la matrice qui rassemble toutes les données des projets soumis à l'évaluation du décideur. Si nous retenons 25 projets à titre de référence, cette matrice aurait les dimensions de 25 lignes pour

---

<sup>(4)</sup> Dans la section 3, nous appliquerons également la méthode UTA à une fonction non-linéaire.

<sup>(5)</sup> Cf. par exemple Theil [26] ainsi que Kendall et Stuart [17].

les 25 projets, sur 6 colonnes pour les six critères considérés. Avant d'analyser sa configuration, remarquons toutefois que les données ne seraient pas effectivement introduites sous cette forme dans le programme linéaire puisque nous devrions estimer les  $(6 \times 5)$  utilités aux bornes des critères, qui correspondent aux variables du programme linéaire. La matrice correspondant exactement à l'utilisation des données et au format du programme linéaire présenterait donc les données sur 30 colonnes à la manière des analyses de variance où les effets des divers niveaux des facteurs sont distingués par des variables particulières. Cette présentation compacte des données n'affecte toutefois pas leurs propriétés fondamentales. Notons encore que les utilités aux six premières bornes sont fixées à zéro et que nous pouvons trouver encore une utilité par la contrainte (9), en sorte que nous ne devrions estimer que 23 utilités. D'un point de vue statistique, avec 25 observations, nous aurions donc suffisamment de degrés de liberté pour estimer ces 23 paramètres inconnus.

Ceci ayant été précisé, si l'on ne considère que des projets de référence dont les mesures  $(1, \dots, 5)$  coïncident avec les bornes, une information complète serait fournie par la comparaison de tous les projets théoriquement possibles, comme dans un plan d'expérimentation factoriel complet. Si l'on présente les valeurs prises par les critères sous forme de différences par rapport à leur moyenne, un tel plan aurait une matrice d'information  $X'X$  diagonale. La matrice des covariances serait donc également diagonale et ce plan serait effectivement constitué de données non corrélées, c'est-à-dire de projets dont les caractéristiques sont aussi différenciées que possible. Le déterminant de  $X'X$ , qui peut être pris comme une mesure de l'information donnée, atteindrait alors sa valeur maximale. Ce plan factoriel complet n'est cependant pas possible, car il exigerait la comparaison de 15625 projets différents.

Un tel plan n'étant pas envisageable, nous devons par conséquent recourir à un plan factoriel fractionnaire qui réduit le nombre d'observations nécessaires tout en conservant l'orthogonalité de la matrice d'information. Addelman [1 et 2] a étudié les plans de taille minimale qui conservent ces qualités en se basant sur la théorie des champs de Galois. Dans le cas présent, avec six critères qui peuvent prendre cinq valeurs distinctes, il montre que l'on peut se limiter à 25 projets, ce qui est peut-être un maximum pour le décideur. Ces projets doivent respecter la condition suivante :

- un niveau d'un critère doit coïncider avec chaque niveau d'un autre critère un nombre de fois proportionnel au produit du nombre d'observations

de ces niveaux divisé par le nombre total de projets, soit la condition (12) :

$$n(k_i, l_j) = \frac{n(k_i) \times n(l_j)}{N} \quad (12)$$

pour les critères  $k$  et  $l$  aux niveaux  $i$  et  $j$  respectivement.

L'information contribué par ce plan fractionnaire de 25 projets est évidemment bien moindre que celle donnée par le plan factoriel complet car il est pauvre en degrés de liberté, mais on ne peut que difficilement envisager de demander davantage de comparaisons au décideur <sup>(6)</sup>. C'est un tel plan fractionnaire que nous allons utiliser <sup>(7)</sup>.

### C. Présentation des résultats

Les six fonctions d'utilité partielle du CRR sont linéaires. Puisque ce sont ces fonctions qui sont à l'origine des jugements de préférence introduits dans le programme, il est évident qu'une fonction d'utilité peut être calculée qui reproduit parfaitement ces préférences et que la valeur de la fonction objectif  $F$  doit atteindre sa valeur minimale de zéro. Dans le cas présent, la solution n'est pas unique. Ceci est clairement montré par une analyse de sensibilité sur les utilités des dernières bornes dont les résultats sont donnés dans la première partie du tableau I : on y peut lire les valeurs minimales et maximales que ces utilités peuvent prendre parmi les solutions optimales. On voit combien les écarts sont importants si l'on considère que la somme des utilités aux dernières bornes est égale à un. Les écarts moyens de ce tableau sont les moyennes des écarts des utilités partielles estimées aux cinq bornes par rapport aux utilités correspondantes du CRR. La moyenne globale est la moyenne sur les six critères de ces écarts moyens.

La seconde partie du tableau I donne les utilités de la fonction qui serait la moyenne des fonctions calculées par l'analyse de sensibilité sur les dernières bornes, solution proposée par Jacquet-Lagrèze et Siskos. On y voit combien cette fonction réduit les écarts par rapport aux utilités du CRR.

Nous avons utilisé cette fonction moyenne pour classer tous les projets de l'ensemble A. La comparaison de ce classement avec celui qui résulte de

<sup>(6)</sup> Notons que la variance d'un critère est ici égale à 2. Le déterminant de  $X'X$  est égal à  $(31250)^6$  pour le plan factoriel complet, tandis qu'il ne vaut que  $(50)^6$  pour le plan fractionnaire. Mais le déterminant d'un plan quelconque pourrait bien être proche de zéro si les critères des projets retenus sont corrélés.

<sup>(7)</sup> Les données peuvent être trouvées en annexe.

TABLEAU I  
*Analyse de sensibilité des utilités aux dernières  
bornes + solution moyenne (Jacquet-Lagrèze et Siskos)*

Numéro du critère	Pondération selon le CRR	Modèle général UTA <sup>(8)</sup>			
		Intervalles de variation aux dernières bornes		Solution moyenne	
		Minimum	Maximum	Utilité aux dernières bornes	Écarts moyens par rapport aux fonctions du CRR
1	0.25	0.1963	0.3055	0.2512	0.00478
2	0.20	0.0860	0.2802	0.1906	0.00456
3	0.15	0.1102	0.1748	0.1436	0.00334
4	0.20	0.1760	0.2569	0.2126	0.00932
5	0.10	0.0400	0.1488	0.1003	0.00238
6	0.10	0.0400	0.1548	0.1016	0.00192
Moyenne globale:					0.00438

l'application de la fonction d'utilité du CRR permet d'évaluer la qualité de cette fonction. Ceci peut être réalisé grâce à l'indice de Kendall  $\tau(n)$  [17] qui mesure le degré de corrélation <sup>(9)</sup> entre deux classements de  $n$  projets. Dans le cas présent, nous obtenons  $\tau(25) = 0.833$ ,  $\tau(50) = 0.786$ ,  $\tau(353) = 0.911$ . Un autre critère utile, appelé la densité d'intersection <sup>(10)</sup>, consiste à mesurer le pourcentage d'éléments communs dans un noyau de référence des classements, par exemple parmi les 25 projets classés en tête de liste par les deux fonctions comparées. La densité d'intersection par rapport à ces 25 projets est dans notre cas  $d(25) = 0.88$  et  $d(50) = 0.94$ .

Nous allons examiner maintenant si d'autres spécifications du modèle UTA ne pourraient pas également, ou peut être mieux, résoudre le problème des solutions multiples.

<sup>(8)</sup> Pour cette application, les paramètres  $\delta$  et chacun des  $s_i$  ont reçu la même valeur 0.01.

<sup>(9)</sup> Comme tout indice de corrélation,  $\tau$  varie entre -1 et 1.

<sup>(10)</sup> Cf. Despontin, Leheret et Roubens [9].

### 3. NOUVELLES SPÉCIFICATIONS DU MODÈLE UTA

Nous pouvons envisager deux types de modifications : soit ajouter des restrictions et/ou de l'information concernant les utilités partielles et les préférences, soit modifier la spécification des erreurs et de la fonction objectif.

#### A. Modélisation des préférences

Sachant que la fonction d'utilité déterminée par le CRR est linéaire, nous pourrions évidemment imposer cette condition aux utilités partielles du programme linéaire et améliorer ainsi l'ajustement. Mais cette hypothèse forte, qui conviendrait au cas particulier, ne peut être imposée en général lorsqu'on recherche la fonction d'utilité du décideur.

On pourrait également ajouter une contrainte de concavité ou non-concavité, comme le proposent Despotis et Yannacopoulos [10]. Avec une fonction d'utilité additive, il suffirait d'imposer cette condition sur les utilités partielles. La forme imposée à la fonction serait, sans doute, plus appropriée pour la recherche d'un maximum global. Elle aurait aussi l'avantage de garantir la convexité des courbes d'indifférence, hypothèse assez vraisemblable qui signifie que le décideur préfère un projet dont les caractéristiques (critères) sont équilibrées plutôt qu'un projet extrême pour lequel certains des critères sont satisfaits au mieux alors qu'ils présentent des faiblesses marquées du point de vue d'autres critères. Nous pensons toutefois que cette hypothèse ne s'impose pas nécessairement et si les préférences exprimées par le décideur ne s'y conforment pas, les résultats obtenus ne pourront être satisfaisants. C'est sans doute pour cette raison que Despotis et Yannacopoulos [10] n'ont pas obtenu des résultats très concluants. Il ne semble donc pas opportun d'ajouter cette contrainte *a priori*.

Une autre possibilité serait d'ajouter une série de contraintes indiquant l'intensité des préférences du décideur, comme le proposent Srinivasan et Shocker [25] dans un autre contexte. Dans le cas où la préférence du projet *a* par rapport au projet *b* serait plus forte que celle de *b* par rapport au projet *c*, par exemple, on aurait

$$[U(a) - U(b)] - [U(b) - U(c)] + (\sigma(a) - \sigma(b)) - (\sigma(b) - \sigma(c)) \geq \varpi \quad (13)$$

avec  $\varpi > 0$ .

Il s'agit, à vrai dire, d'ajouter de l'information concernant les préférences du décideur. Évidemment, ceci requiert de celui-ci qu'il examine plus en

détail ses préférences, mais le nombre de comparaisons supplémentaires reste limité. En effet, une fois réalisé le classement initial des  $N$  projets, il suffirait de répondre à  $N - 2$  questions supplémentaires pour pouvoir introduire les  $N - 2$  informations supplémentaires correspondant à (13).

A partir des utilités du CRR, nous pouvons ajouter cette information au programme UTA de base pour appliquer le modèle <sup>(11)</sup> ainsi complété aux données du plan factoriel fractionnaire. La fonction objectif  $F$  atteint à nouveau sa valeur minimale de zéro, mais la solution n'est pas unique. Le tableau II de l'analyse de sensibilité montre toutefois que les écarts des dernières bornes se sont réduits par rapport aux poids théoriques du CRR.

Comme pour le modèle UTA simple, nous avons donc calculé la fonction moyenne des solutions extrêmes. Il est intéressant de constater dans le tableau II que les écarts moyens de cette fonction par rapport à celle du CRR sont plus élevés que ceux de la fonction moyenne du modèle UTA simple. Quoiqu'il en soit, l'application de cette fonction au classement des autres projets est marquée par une légère amélioration des diverses statistiques :

TABLEAU II  
*Analyse de sensibilité des utilités aux dernières bornes  
et solution moyenne (UTA avec intensité des préférences)*

Numéro du critère	Pondération selon le CRR	Selon UTA + intensité de préf.			
		Intervalles de variation		Solution moyenne	Écarts moyens par rapport aux fonctions du CRR
		Minimum	Maximum	Utilité aux dernières bornes	
1	0.25	0.2354	0.2872	0.2619	0.00716
2	0.20	0.1500	0.2370	0.2013	0.00924
3	0.15	0.1386	0.1620	0.1492	0.00388
4	0.20	0.1912	0.2259	0.2081	0.00630
5	0.10	0.0628	0.1080	0.0853	0.00940
6	0.10	0.0606	0.1260	0.0937	0.00462
					0.00677

<sup>(11)</sup> Pour cette application, le paramètre  $\omega$  a été fixé à 0.02.

$\tau(25) = 0.847$ ,  $\tau(50) = 0.853$ ,  $\tau(353) = 0.904$  et  $d(50) = 0.94$ . On ne peut pas conclure cependant que l'information supplémentaire injectée dans le problème se soit révélée fort utile dans le cas présent. Mais, dans ce cas particulier, ceci pourrait s'expliquer en partie par la linéarité de la fonction à estimer.

## B. Spécification des erreurs et de la fonction objectif

Le modèle de base ne considère que des erreurs  $\sigma(a)$  positives. Une première modification pourrait consister en l'introduction d'erreurs négatives  $\sigma^-(a)$  à côté d'erreurs positives  $\sigma^+(a)$ , comme le proposent Siskos et Yannacopoulos [24] <sup>(12)</sup>.

Une autre possibilité utilisée par Srinivasan et Shocker [25] et envisagée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [15] serait d'introduire des termes d'erreur propres à chaque contrainte.

Cette définition des termes d'erreur serait d'ailleurs nécessaire si le classement des projets de référence n'était pas transitif. Pour les cas où  $F = 0$ , la nouvelle fonction objectif sera aussi égale à zéro.

Mais quelque soit la définition adoptée pour les termes d'erreur, elle ne pourrait réduire le problème des solutions multiples, lorsque la fonction objectif  $F$  est nulle.

Reprenant une autre suggestion de Srinivasan et Shocker, nous pourrions, après avoir constaté que  $F = 0$ , chercher à accentuer les différences entre utilités en maximisant  $\delta$ , la différence minimale entre deux utilités. Dans ce cas, les termes d'erreur ne sont plus d'aucune utilité et c'est  $\delta$  qui définit la fonction objectif. Nous avons donc

$$\text{MAX } F'' = \delta,$$

et

$$\sum_{i=1}^n \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} \geq \delta \quad \Leftrightarrow \quad a P b, \quad (6''')$$

$$\sum_{i=1}^n \{u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a I b, \quad (7''')$$

<sup>(12)</sup> Voir aussi Despotis, Yannacopoulos et Zopounidis [11].



avec  $\delta \geq 0$ , tandis que les conditions (5), (8), (9), (10) et (12) restent inchangées.

Ce modèle, qui serait appliqué en seconde analyse, pourrait s'appeler UTAMP, pour indiquer que, sur base d'UTA, il permet de Maximiser ou de mieux identifier les relations de Préférence existant entre les projets <sup>(13)</sup>. Parmi toutes les solutions optimales du programme UTA, ce nouveau programme choisira effectivement celles qui permettront de contraster au mieux les utilités des projets, en ce sens qu'elles maximiseront  $\delta$ . Ceci aura pour effet simultané de réduire l'ensemble des solutions possibles.

Nous pouvons également proposer une version plus complète de ce modèle, soit UTAMP2, qui maximiserait non seulement  $\delta$  mais conjointement  $s$ , la différence minimale entre utilités à des bornes successives. La fonction objectif devient alors

$$F''' = (\delta + s).$$

Remarquons que l'addition simple de ces deux paramètres est légitime puisque l'un et l'autre sont définis en unités d'utilité. Cependant, il serait également possible de n'en faire qu'une addition pondérée si l'on désirait donner plus d'importance à l'une ou l'autre variable, ou, si cela est nécessaire, pour s'assurer une solution telle que  $s$  et  $\delta$  soient effectivement strictement positifs <sup>(14)</sup>.

Les contraintes du programme précédent, soit UTAMP1, restent inchangées, mais tous les  $s_i$  deviennent égaux à  $s$  et il convient de préciser seulement que  $s \geq 0$ . La maximisation de  $(\delta + s)$  réduit également l'ensemble des solutions possibles, tandis que le relèvement de  $s$  aura pour effet de limiter la convexité ou la concavité des fonctions d'utilité partielle. Nous avons appliqué ces deux modèles aux données du plan factoriel fractionnaire.

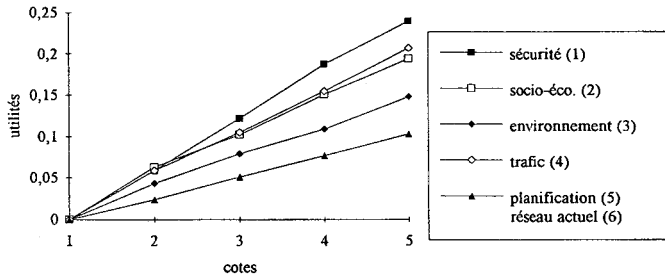
Le tableau III montre que les deux modèles UTAMP aboutissent à une solution unique. Les écarts d'UTAMP1 sont toutefois plus grands que ceux de la solution moyenne de UTA. C'est UTAMP2 qui réduit le mieux les écarts. Le graphique 1 illustre les fonctions calculées par cette méthode.

<sup>(13)</sup> Dans le logiciel PREFCALC, ce critère, MAX  $\delta$ , est également proposé pour le cas où  $F^* = 0$ .

<sup>(14)</sup> Une analyse de sensibilité menée sur la pondération de ces deux variables dans les applications qui vont suivre semble indiquer que la somme  $(\delta + s)$  donne de bons résultats.

TABLEAU III  
Analyse de sensibilité (UTAMP 1 et 2)

Numéro du critère	Poids selon le CRR	Méthode UTAMP1		Méthode UTAMP2	
		Solution	Écart moyen par rapport aux fonctions du CRR	Solution	Écart moyen par rapport aux fonctions du CRR
1	0.25	0.2821	0.0186	0.24013	0.0034
2	0.20	0.2328	0.0172	0.19408	0.0044
3	0.15	0.1321	0.0076	0.14803	0.0030
4	0.20	0.2217	0.0110	0.20724	0.0052
5	0.10	0.0642	0.0194	0.10526	0.0026
6	0.10	0.0669	0.0192	0.10526	0.0026
		0.0155			0.00353



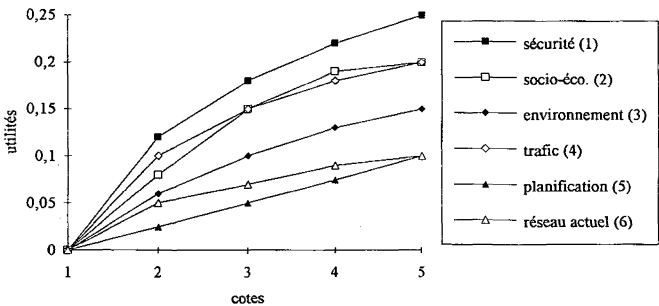
Graphique 1. - Fonctions d'utilité partielle par UTAMP2.

La grande qualité de l'estimation fournie par UTAMP2 apparaît aussi dans le tableau IV, qui compare les statistiques des deux versions du modèle à celles fournies par la solution moyenne. On y voit que la solution moyenne est meilleure que celle de UTAMP1, mais que les classements obtenus par UTAMP2 sont les plus fidèles.

Afin de confirmer ces résultats, il importe pourtant d'appliquer cette procédure à une autre fonction d'utilité qui ne serait pas linéaire. Nous avons choisi de transformer la fonction d'utilité du CRR en une fonction d'utilité concave. Les nouvelles fonctions d'utilité partielle sont illustrées dans le graphique 2.

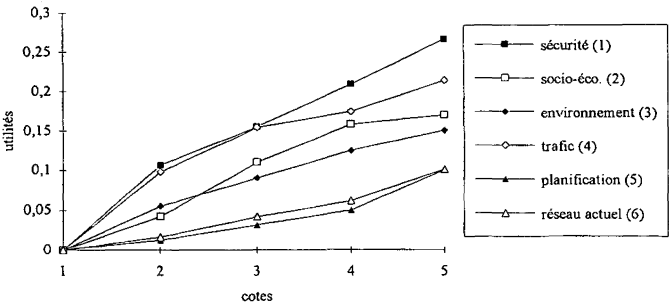
TABLEAU IV  
Comparaison de UTAMP1, UTAMP2 et de la solution moyenne

	$\delta^*$	$s^*$	$\sigma^* (a)$	$\tau (25)$	$\tau (50)$	$\tau (100)$	$\tau (353)$	$d (50)$
UTA (solution moyenne)	fixé à 0.01	fixé à 0.01	0	0.833	0.786	0.868	0.911	0.940
UTAMP1	0.02626	fixé à 0.01	—	0.727	0.740	0.790	0.872	0.900
UTAMP2	0.01645	0.02632	—	0.913	0.920	0.936	0.965	0.980

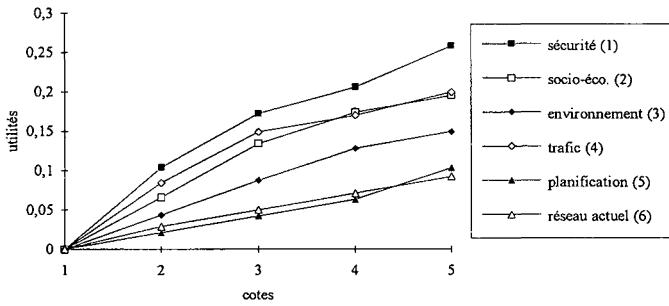


Graphique 2. – Fonctions d'utilité partielle théoriques concaves.

Sur base de ces nouvelles fonctions et de l'ensemble de référence factoriel fractionnaire, nous avons à nouveau appliqué le programme UTA ainsi que les programmes UTAMP. Des trois méthodes, seul UTAMP2 fournit une solution unique. Nous avons donc calculé les fonctions moyennes des solutions fournies par UTAMP1 aussi bien que par UTA. Les fonctions UTA moyennes et celles de UTAMP2 sont illustrées par les graphiques 3 et 4 respectivement.



Graphique 3. – Fonctions d'utilité partielle de la solution moyenne d'UTA.



Graphique 4. – Fonctions d'utilité partielle par UTAMP2.

TABLEAU V  
Intervalles de validité (UTA-UTAMP1)

Numéro du critère	Poids théoriques	Méthode UTA		Méthode UTAMP1	
		Intervalles de variation		Intervalles de variation	
		Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1	0.25	0.236	0.314	0.269	0.295
2	0.20	0.106	0.224	0.196	0.195
3	0.15	0.124	0.172	0.142	0.142
4	0.20	0.192	0.239	0.215	0.229
5	0.10	0.057	0.131	0.071	0.085
6	0.10	0.051	0.133	0.069	0.094

La qualité des ajustements réalisés est illustrée par l'analyse de sensibilité présentée dans le tableau V, ainsi que par celle des écarts moyens donnés dans le tableau VI.

Par rapport aux résultats fournis par UTA, ceux du modèle UTAMP1 présentent un défaut important. En effet, si les intervalles de variation aux dernières bornes, donnés par le tableau V, sont plus réduits pour UTAMP1, ils ne contiennent jamais le poids théorique correspondant du CRR. Comme le montre le tableau VI, il en résulte que les écarts par rapport à la fonction théorique calculés pour la fonction UTAMP1 moyenne sont souvent plus larges que ceux de la fonction UTA moyenne. Lorsque ces deux fonctions

TABLEAU VI  
Solutions et écarts moyens (UTA – solution moyenne, UTAMP1 – solution moyenne, UTAMP2)

Numéro du critère	Poids théoriques	Méthode UTA		Méthode UTAMP1		Méthode UTAMP2	
		Solution moyenne	Écart moyen par rapport aux fonctions théoriques	Solution moyenne	Écart moyen par rapport aux fonctions théoriques	Solution	Écart moyen par rapport aux fonctions théoriques
1	0.25	0.2656	0.01276	0.2737	0.01100	0.258840	0.00916
2	0.20	0.1695	0.02784	0.1955	0.01268	0.195545	0.00993
3	0.15	0.1502	0.00388	0.1418	0.00518	0.149576	0.00610
4	0.20	0.2135	0.00506	0.2183	0.01404	0.199788	0.00521
5	0.10	0.1003	0.01106	0.0812	0.01826	0.103607	0.00526
6	0.10	0.1011	0.01810	0.0894	0.02434	0.092645	0.01334
			0.01311		0.01425		0.00816

TABLEAU VII  
Statistiques concernant les modèles UTA (solution moyenne), UTAMP1 et UTAMP2

	$\delta^*$	$s^*$	$\sigma^* (a)$	$\tau (25)$	$\tau (50)$	$\tau (100)$	$\tau (353)$	$d (50)$
UTA (solution moyenne)	fixé à 0.01	fixé à 0.01	0	0.753	0.765	0.761	0.899	0.860
UTAMP1 (solution moyenne)	0.01591	fixé à 0.01	–	0.707	0.732	0.713	0.868	0.860
UTAMP2	0.00884	0.02122	–	0.880	0.872	0.830	0.930	0.919

sont appliquées au classement des autres projets, cette faiblesse de UTAMP1 se traduit par des statistiques de moindre qualité (tableau VII).

Encore une fois, nous observons que la solution UTA moyenne aboutit à un ajustement plus précis et fournit de meilleurs classements des projets que la fonction UTAMP1. Par contre, UTAMP2 atteint directement une solution unique avec les écarts les plus réduits par rapport à la fonction théorique. Ses classements sont aussi les plus performants.

## CONCLUSION

A l'issue de cette revue des principales variantes du modèle UTA, et après les avoir appliquées à un même ensemble de référence pour estimer deux fonctions d'utilité typiques, nous pouvons conclure (prudemment) de la façon suivante :

- Le calcul de la fonction d'utilité UTA 'moyenne' tel qu'il est proposé par Jacquet-Lagréze et Siskos est une méthode pratique et assez efficace pour résoudre le problème des solutions multiples lorsque  $F = 0$ ;

- L'application du modèle UTAMP2 que nous proposons, visant à accentuer les contrastes entre les utilités des projets différents, semble produire une excellente estimation des fonctions d'utilité, plus précise que celle donnée par la fonction UTA 'moyenne'. Évidemment, ce modèle pourrait être enrichi par l'introduction des contraintes d'intensité des préférences.

## ANNEXE

Plan factoriel fractionnaire :  $5^6$

1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	4	5
3	1	3	3	5	2	4
4	1	4	4	2	5	3
5	1	5	5	4	3	2
6	2	1	2	2	2	2
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	1	3	5
9	2	4	5	3	1	4
10	2	5	1	5	4	3
11	3	1	3	3	3	3
12	3	2	4	5	1	2
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	4	2	5
15	3	5	2	1	5	4
16	4	1	4	4	4	4
17	4	2	5	1	2	3
18	4	3	1	3	5	2
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	2	1	5
21	5	1	5	5	5	5
22	5	2	1	2	3	4
23	5	3	2	4	1	3
24	5	4	3	1	4	2
25	5	5	4	3	2	1

## RÉFÉRENCES

1. S. ADDELMAN, Orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorial experiments, *Technometrics*, February 1962, 4, n° 1, p. 21-46.
2. S. ADDELMAN, Symmetrical and asymmetrical fractional factorial plans, *Technometrics*, February 1962, 4, n° 1, p. 47-58.
3. K. J. ARROW, *Social choice and individual values*, Yale University Press, 2<sup>e</sup> édition, 1963.
4. K. J. ARROW et H. RAYNAUD, *Social choice and multicriterion decision-making*, The Massachusetts Institute of Technology, 1986.
5. G. BLAUWENS, R. VERTHONGEN, F. X. de DONNEA et H. GLEISER, *Poursuite de la construction du réseau routier belge : analyse coûts-bénéfices*, Secrétariat Général du Ministère des Travaux Publics, 1982.
6. A. CHARNES et W. W. COOPER, *Management models and industrial applications of linear programming, I*, Wiley, 1961.
7. A. CHARNES et W. W. COOPER, Goal programming and multiple objective optimizations, part I, *European Journal of Operational Research*, 1977, 1, p. 39-54.
8. O. DELHAYE, *La méthode multicritère de l'utilité additive : Applications à des projets routiers, mémoire d'ingénieur commercial*, Facultés Universitaires Catholiques de Mons, septembre 1993.
9. M. DESPONTIN, P. LEHERT et M. ROUBENS, Multi-attribute decision making by consumers associations, *European Journal of Operational Research*, 1986, 23, p. 194-201.
10. D. K. DESPOTIS et D. YANNAKOPOULOS, Méthode d'estimation d'utilités additives concaves en programmation linéaire multiobjectifs, *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 1990, 24, p. 331-349.
11. D. K. DESPOTIS, D. YANNAKOPOULOS et C. ZOPOUNIDIS, A review of the UTA multicriteria method and some improvements, *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 1990, 15, p. 63-76.
12. P. C. FISHBURN et C. PETER, Methods of estimating additive utilities, *Management Science*, 1967, 13, n° 7, p. 435-453.
13. E. JACQUET-LAGRÈZE, PREFCALC : évaluation et décision multicritère, *Revue de l'utilisateur de IBM-PC*, 1984, n° 3, p. 38-55.
14. E. JACQUET-LAGRÈZE et J. SISKOS, Une méthode de construction de fonctions d'utilité additives explicatives d'une préférence globale, *Cahier LAMSADE*, 1978, n° 6, Université Paris-IX-Dauphine.
15. E. JACQUET-LAGRÈZE et J. SISKOS, Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method, *EJOR*, 1982, 10, p. 151-164.
16. R. L. KEENEY et H. RAÏFFA, *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*, Wiley, 1976.
17. M. G. KENDALL et A. STUART, *The advanced theory of statistics*, vol. III, 2nd edition, Hafner Publishing Company, 1968.
18. J. C. MARCHET et J. SISKOS, Aide à la décision en matière d'environnement : application au choix de tracé autoroutier, *Sistemi Urbani*, 1979, 2, p. 65-95.
19. MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS, *Administration des Routes, Analyse multicritère appliquée aux investissements routiers d'État*, mai 1985.
20. D. W. PEARCE et C. A. NASH, *The social appraisal of projects: A text in cost-benefit analysis*, The Macmillan Press, 1981.
21. B. ROY, *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris, 1985.
22. J. SISKOS, Comment modéliser les préférences au moyen de fonctions d'utilité additives, *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 1980, 14, n° 1, p. 53-82.

23. J. SISKOS, A way to deal with fuzzy preferences in multi-criteria decision problems, *EJOR*, 1982, 10, p. 314-324.
24. J. SISKOS et D. YANNAKOPOULOS, UTASTAR, An ordinal Regression Method for building additive value functions, *Investigação Operacional*, 1985, 5, n° 1, p. 39-53.
25. V. SRINIVASAN et A. D. SHOCKER, Linear programming techniques for multi-dimensional analysis of preferences, *Psychometrika*, 1973, 38, p. 337-369.
26. H. THEIL, *Theory and measurement of consumer demand*, 1, North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, New York, 1975.
27. C. VAN HECKE, *Analyses multicritères appliquées aux investissements routiers de l'État, mémoire d'ingénieur commercial*, Facultés Universitaires Catholiques de Mons, septembre 1993.
28. P. VINCKE, *L'aide multicritère à la décision*, Ellipses, Bruxelles, 1993.