RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

M. DESPLAS

Programmation linéaire et comptabilité analytique

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 30, nº 3 (1996), p. 247-292

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1996__30_3_247_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 30, n° 3, 1996, pp. 247-292)

PROGRAMMATION LINÉAIRE ET COMPTABILITÉ ANALYTIQUE (*)

par M. DESPLAS [1]

Communiqué par C. TAPIERO

Résumé. – *Cet article se propose de montrer les liens entre les résultats de la résolution de programmes linéaires et les méthodes d'imputation des coûts en comptabilité analytique. Il reprend la méthode de Kaplan et Thomson et en montre les limites. Il propose ensuite une méthode alternative d'imputation des coûts basée sur l'utilisation de variables pseudo-duales, qui sont définies pour n'importe quelle production alors que les variables duales utilisées par Kaplan et Thomson ne sont définies que pour une production optimale au sens de la maximisation du profit, ce qui est rarement le cas pour une production réelle.*

Mots clés : Programmation linéaire, variables pseudo-duales, comptabilité analytique, coûts complets, coûts variables complets, sections homogènes, coûts définitifs, marges (sur coûts directs, coûts complets, coûts variables complets), matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Abstract. – *This paper intents to show the ties between the results of solving linear programs and the methods of allocation of costs in cost accounting. It refers to the method of Kaplan and Thomson and shows its weakness. It extents this method by using pseudo-dual variables defined for any production instead of dual variables which, in the method of Kaplan and Thomson, are just defined for an optimal production in the sense of profit maximization, rarely the case for an actual production.*

Keywords: Linear programming, pseudo-dual variables, cost accounting, full costing, direct costing, common overheads allocation, traceable overheads, margins (on direct costs, full costs, full variable costs), Moore-Penrose generalized inverse matrix.

INTRODUCTION

Le problème de l'imputation des frais généraux ou des charges fixes d'une organisation à ses produits pour en dégager les prix de revient requiert une procédure raisonnable et équitable. Les méthodes de la comptabilité analytique tentent de dégager les véritables coûts des produits : la méthode du coût complet peut dans certains cas s'avérer trompeuse et la méthode du direct-costing est plus appropriée, au moins dans le court terme, dans la

(*) Reçu en juin 1994.

([1]) Université de Paris-2 et Institut de Management Public, 92, rue d'Assas, 75006 Paris

mesure où elle tient compte des coûts qui peuvent être considérés comme semi-variables; cependant cette dernière méthode ne tient pas compte du fait que les produits utilisent des ressources rares représentant des charges fixes et que dans le long terme ces produits doivent participer au paiement de ces ressources. La méthode de Kaplan et Thomson d'imputation des coûts aux produits a pour objet de tenir compte de ce partage de ressources rares : « ...we have devised methods for allocating overhead charges on the basis of mathematical programming models of the firm's production and sales possibilities. The basic scheme was to charge products on the basis of their utilisation of the scarce resources of the firm. The price for use of these resources were obtained from the dual variables associated with the constraints of profit maximizing models » [7]. D'autres auteurs avaient déjà utilisé des modèles de programmation linéaire (*cf.* [2], [3], [4], [6], [12]), mais l'objectif de Kaplan et Thomson « ...in all of these procedures, has been to devise a method for allocating overhead that does not distort the relative profitability of products... » ([7], p. 354).

Cependant, la méthode de Kaplan et Thomson peut présenter une faiblesse dans le cas où il existe plusieurs systèmes de variables duales (cas de dégénérescence qui, nous le verrons, se présente automatiquement dans la modélisation de la méthode des sections homogènes par un programme linéaire comparable à ceux de Kaplan et Thomson). Une autre faiblesse de cette méthode réside dans le fait que la production qui sert à calculer les clés de répartition des coûts entre sections est supposée être la production optimale dans le sens de la maximisation du profit : or la production réelle n'est pas la production optimale (on le vérifiera sur un exemple numérique d'application). Un des apports de cet article est d'utiliser des variables pseudo-duales définies ailleurs qu'à l'optimum d'un programme mathématique et qui donc permettent d'étendre la méthode de Kaplan et Thomson au cas d'une production réelle non optimale.

L'organisation de cet article est la suivante. On exposera rapidement dans la section 1 la méthode des sections homogènes et les imputations des coûts par les méthodes de coûts complets et de coûts variables. On retrouvera ensuite, dans la section 2, les valeurs des *coûts définitifs* à partir des valeurs des variables duales de programmes linéaires d'optimisation de marges. On rappellera dans la section 3 la méthode préconisée par Kaplan et Thomson et on l'appliquera en annexe à l'exemple d'illustration. On montrera les mérites et insuffisances de cette méthode (en particulier le problème de la dégénérescence dans la section 4) et on proposera enfin dans la section 5 une méthode alternative et son application à l'exemple d'illustration. Pour toutes ces méthodes on présentera les résultats de façon similaire pour faciliter leur comparaison. Tous les développements qui suivent seront illustrés par un exemple d'application donné en annexe.

1. SECTIONS HOMOGÈNES, COÛTS COMPLETS ET COÛTS VARIABLES COMPLETS

Dans cet article on s'intéresse au problème de la répartition du coût complet d'une firme comportant des sections principales (P), dont l'activité concourt à la production de produits, et des sections auxiliaires (A) dont les prestations bénéficient à d'autres sections. Dans ces conditions, le coût total d'un produit se calcule d'ordinaire en commençant par évaluer le coût des unités d'œuvre (U.O) des sections auxiliaires en tenant compte de leurs prestations réciproques, en allouant ensuite ces coûts aux sections principales, et enfin en répartissant la totalité de ces coûts sur les produits.

Considérons donc une organisation divisée en H sections auxiliaires A et en K sections principales P et produisant I produits. On notera :

$\mathbf{x} = (x_i,\ i = 1, 2, \ldots, I)$ où x_i est la quantité produite de bien i

$\mathbf{y} = (y_h,\ h = 1, 2, \ldots, H)$ où y_h est le nombre d'unités d'œuvre de la section auxiliaire A_h

$\mathbf{z} = (z_k,\ k = 1, 2, \ldots, K)$ où z_k est le nombre d'unités d'œuvre de la section principale P_k.

Les quantités utilisées d'unités d'œuvre des sections A et P peuvent être considérées comme les *capacités* de ces sections et sont définies par deux vecteurs $\mathbf{b}_a = (b_h,\ h = 1, 2, \ldots, H)$ et $\mathbf{b}_p = (b_k,\ k = 1, 2, \ldots, K)$ respectivement. La production de chacun des biens s'effectue à l'aide de la matrice technologique B qui donne le nombre b_{ki} d'unités d'œuvre de la section principale k nécessaires à la fabrication de chaque unité de produit i.

Activités et production

On suppose que les productions et unités d'œuvre peuvent être reliées par des relations du type :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{z} &= B\,\mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= C\,\mathbf{y} + D\mathbf{z} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

avec

$$B = (b_{ki},\ k = 1, 2, \ldots, K,\ i = 1, 2, , \ldots, I)$$
$$C = (c_{hh'},\ h = 1, 2, \ldots, H,\ h' = 1, 2, \ldots, H)$$
$$D = (d_{hk},\ h = 1, 2, \ldots, H,\ k = 1, 2, \ldots, K)$$

où les coefficients de ces matrices sont supposés constants, avec :

b_{ki} est le nombre d'unités d'œuvres de la section principale k nécessaires à la production d'**une** unité de produit i

$c_{hh'}$, est le nombre d'UO de la section auxiliaire A_h nécessaires pour **une** UO de la section auxiliaire $A_{h'}$,

d_{hk} est le nombre d'UO de la section auxiliaire A_h nécessaires pour **une** UO de la section principale P_k.

L'égalité (1) ci-dessus se lit ainsi :

niveau d'activité des A	=	prestations échangées entre A	+	prestations transmises aux P

Il s'ensuit l'égalité ([1])

$$\mathbf{y} = (I - C)^{-1} D\mathbf{z} = (I - C)^{-1} DB\,\mathbf{x} \tag{2}$$

La définition des deux matrices C et D implique la condition :

$$\mathbf{b}_a = C\,\mathbf{b}_a + D\,\mathbf{b}_p \tag{3}$$

Coûts des produits et marges

Dans ce qui précède nous avons défini les coûts liés aux unités d'œuvre des sections auxiliaires et principales. Nous définissons maintenant les coûts des produits. Ceux-ci vont faire intervenir des coûts directs par produits (intermédiaires ou finaux) et des coûts indirects par unités d'œuvre.

1. *Coûts directs :* provenant de facteurs directs utilisés (main d'œuvre directe, matières premières). Ces charges directes sont imputées aux produits par $\mathbf{d}$ en notant $\mathbf{d} = (d_i,\ i = 1, 2, \ldots, I)$ où d_i est le coût direct unitaire du produit i. Si $\mathbf{p} = (p_i,\ i = 1, 2, \ldots, I)$ où p_i est le prix de vente du produit i, la *marge sur coûts directs* est alors $(\mathbf{p} - \mathbf{d})\,\mathbf{x}$.

2. *Coûts indirects :* indépendamment des facteurs variables ci-dessus, qui peuvent être directement affectés aux produits, il existe des facteurs indirects qui sont consommés par les sections A et P (frais de personnel, matières consommables, amortissements, etc.), et ne sont pas directement affectés aux

([1]) On verra plus loin que la matrice $(I - C)$ est inversible.

produits. Ces charges supportées par les sections sont les *coûts primaires complets* : ces coûts primaires unitaires des sections sont notés

$\mathbf{f}_a = (f_h,\, h = 1, 2, \ldots, H)$ où f_h est le coût primaire complet supporté par la section A_h

$\mathbf{f}_p = (f_k,\, k = 1, 2, \ldots, K)$ où f_k est le coût primaire complet supporté par la section P_k.

Ces coûts primaires doivent être imputés aux sections sous la forme de *coûts complets définitifs*

$$\alpha_a^c = (\alpha_h^c,\, h = 1, 2, \ldots, H) \qquad \text{et} \qquad \alpha_p^c = (\alpha_k^c,\, k = 1, 2, \ldots, K)$$

par le jeu des prestations réciproques. Le coût définitif d'une section auxiliaire est égal à son coût primaire majoré des coûts des prestations reçues des autres sections auxiliaires

$$\alpha_a^c = \alpha_a^c\, C + \mathbf{f}_a \tag{4}$$

L'égalité (4) se lit ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Coûts définitifs}\\ \text{unitaires des } A\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{prestations reçues}\\ \text{des autres } A\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{coûts primaires}\\ \text{des } A\end{array}}$$

Le coût définitif d'une section principale est égal à son coût primaire majoré des coûts des prestations reçues des sections auxiliaires

$$\alpha_p^c = \alpha_a^c\, D + \mathbf{f}_p \tag{5}$$

L'égalité (5) se lit ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Coûts définitifs}\\ \text{unitaires des } P\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{prestations reçues}\\ \text{des } A\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{coûts primaires}\\ \text{des } P\end{array}}$$

D'où les valeurs de ces coûts définitifs complets unitaires des sections :

$$\alpha_a^c = \mathbf{f}_a\, (I - C)^{-1} \tag{6}$$

$$\alpha_p^c = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_a\, (I - C)^{-1}\, D \tag{7}$$

On note $\alpha_p^c B$ =vecteur des coûts unitaires indirects complets imputés aux produits, d'où la *marge sur coûts complets :* $(\mathbf{p} - \mathbf{d} - \alpha_p^c B)\,\mathbf{x}$.

Si les charges indirectes peuvent être séparées en partie fixe et partie variable (direct costing) et en appelant β_a et β_p ces parties variables (traceable overheads) on déduit de la même façon les *coûts variables définitifs* des sections α_a^v et α_p^v :

$$\alpha_a^v = \beta_a\,(I - C)^{-1} \tag{8}$$

$$\alpha_p^v = \beta_p + \beta_a\,(I - C)^{-1}\,D \tag{9}$$

On note

$\alpha_p^v B$ =vecteur des coûts unitaires indirects variables imputés aux produits, d'où la *marge sur coûts variables complets :* $(\mathbf{p} - \mathbf{d} - \alpha_p^v B)\,\mathbf{x}$.

Remarques: 1. Dans toutes les formules ci-dessus la matrice $(I - C)$ est inversible car la matrice C est une matrice à éléments non-négatifs au plus égaux à 1; elle a toutes ses valeurs propres inférieures à 1 et donc la matrice C est une matrice *productive*, dans le sens où $(I - C)\,\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\forall\,\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

2. Remarquons que, dans ce qui précède, aucune hypothèse particulière n'a été faite sur le vecteur $\mathbf{x}$ qui n'a donc aucune raison de correspondre à un optimum de production. On peut donc peut-être améliorer la marge nette en effectuant un autre programme $\mathbf{x}$ de production *avec les mêmes disponibilités des sections auxiliaires et principales.* Cette recherche du programme optimal de production peut s'effectuer à l'aide de la programmation linéaire dont les objectifs peuvent être n'importe laquelle des trois marges (marge sur coûts directs variables, marge sur coûts variables complets, marge sur coûts complets) et dont les contraintes consisteraient à ne pas dépasser les disponibilités $\mathbf{b}_a$ et $\mathbf{b}_p$ des sections qui seront donc considérées comme des facteurs fixes, du moins à court terme.

Un programme de production $\mathbf{x}$ sera donc dit *réalisable* s'il vérifie les contraintes suivantes :

$$\mathbf{z} = B\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_p \tag{10}$$

$$\mathbf{y} = (I - C)^{-1}\,DB\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_a \tag{11}$$

En fait, la façon dont ont été calculées les matrices C et D implique que les contraintes $\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_a$ sont automatiquement satisfaites lorsque les contraintes $\mathbf{z} \leq \mathbf{b}_p$ sont satisfaites : *elles sont donc redondantes.* En effet la condition (3) implique :

$$\mathbf{b}_a = (I - C)^{-1}\,D\,\mathbf{b}_p$$

et la condition (1) implique :

$$\mathbf{y} = (I - C)^{-1} D\mathbf{z}$$

de sorte que les contraintes (11) sont automatiquement satisfaites lorsque sont satisfaites les contraintes (10) car D et $(I - C)^{-1}$ sont des matrices non négatives puisque

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + \ldots + C^n + \ldots$$

2. PRIX DUAUX EN PROGRAMMATION LINÉAIRE ET COMPTABILITÉ ANALYTIQUE

Nous allons retrouver les *coûts complets définitifs* α_a^c et α_p^c ainsi que les *coûts variables définitifs* α_a^v et α_p^v à l'aide des variables duales de programmes d'optimisation des marges.

Maximisation de la marge sur coûts variables directs :

Ce programme linéaire et son dual s'écrivent ainsi (en ne tenant pas compte des contraintes redondantes $y \leq \mathbf{b}_a$) :

$\operatorname{Max} (\mathbf{p} - \mathbf{d})\, \mathbf{x}$	$\operatorname{Min} \mathbf{v}\mathbf{b}_p$
$B\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{t}$
$-(I - C)\, \mathbf{y} + D\mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{z} \leq \mathbf{b}_p$	$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{t}\, B \geq \mathbf{p} - \mathbf{d}$
$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$	$-\mathbf{u}\,(I - C) \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}D - (\mathbf{t} - \mathbf{v}) \geq \mathbf{0}$

On notera $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$ la solution optimale du programme primal et $(\mathbf{t}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ la solution optimale du programme dual ci-dessus.

On peut supposer que $\mathbf{y}^* > \mathbf{0}$ et que $\mathbf{z}^* > \mathbf{0}$ car on peut supposer que le fonctionnement des sections auxiliaires et principales est nécessaire à la production. Dans ces conditions les relations d'exclusion impliquent :

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{u}^* (I - C) = \mathbf{0} & \text{et donc} \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0} & \textit{car } (I - C) \text{ est inversible} \\ \mathbf{u}^* D = \mathbf{t}^* - \mathbf{v}^* & \text{et donc} \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{v}^* & \end{array}\right\} \quad (12)$$

De plus on a aussi la relation d'exclusion $(\mathbf{z}^* - \mathbf{b}_p)\ \mathbf{v}^* = 0$, d'où $\mathbf{v}^*\,\mathbf{z}^* = \mathbf{v}^*\,\mathbf{b}_p$, et comme à l'optimum on a $(\mathbf{p} - \mathbf{d})\,\mathbf{x}^* = \mathbf{v}^*\,\mathbf{b}_p$, il vient

$$(\mathbf{p} - \mathbf{d})\,\mathbf{x}^* = \mathbf{v}^*\,\mathbf{z}^* = \mathbf{t}^*\,B\,\mathbf{x}^* \tag{13}$$

ce qui traduit le report de la marge sur coûts directs aux sections principales par $\mathbf{v}^*$ d'une part et aux produits par $\mathbf{t}^*\,B$ d'autre part.

Maximisation de la marge sur coûts variables complets (charges fixes ou structurelles exclues) :

$\operatorname{Max}(\mathbf{p} - \mathbf{d})\,\mathbf{x} - \beta_a\,\mathbf{y} - \beta_p\,\mathbf{z}$	$\operatorname{Min}\mathbf{v}\mathbf{b}_p$
$B\,\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{t}$
$-(I - C)\,\mathbf{y} + D\mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{z} \leq \mathbf{b}_p$	$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{t}\,B \geq \mathbf{p} - \mathbf{d}$
$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$	$-\mathbf{u}\,(I - C) \geq -\beta_a$
$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}D - (\mathbf{t} - \mathbf{v}) \geq -\beta_p$

On peut encore supposer que $\mathbf{y}^* > \mathbf{0}$ et que $\mathbf{z}^* > \mathbf{0}$ de sorte que les relations d'exclusion impliquent que :

$$\mathbf{u}^*\,(I - C) = \beta_a \ \text{ et donc } \ \mathbf{u}^* = \alpha_a^v \tag{14}$$

$$\mathbf{u}^*\,D + \beta_p = \mathbf{t}^* - \mathbf{v}^* \ \text{ et donc } \ \mathbf{t}^* - \mathbf{v}^* = \alpha_p^v \tag{15}$$

Maximisation de la marge sur coûts complets :

$\operatorname{Max}(\mathbf{p} - \mathbf{d})\,\mathbf{x} - \mathbf{f}_a\mathbf{y} - \mathbf{f}_p\,\mathbf{z}$	$\operatorname{Min}\mathbf{v}\mathbf{b}_p$
$B\,\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{t}$
$-(I - C)\,\mathbf{y} + D\mathbf{z} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{z} \leq \mathbf{b}_p$	$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{t}\,B \geq \mathbf{p} - \mathbf{d}$
$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$	$-\mathbf{u}\,(I - C) \geq -\mathbf{f}_a$
$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}D - (\mathbf{t} - \mathbf{v}) \geq -\mathbf{f}_p$

On peut encore supposer que $\mathbf{y}^* > \mathbf{0}$ et que $\mathbf{z}^* > \mathbf{0}$ de sorte que les relations d'exclusion impliquent que :

$$\mathbf{u}^* (I - C) = \mathbf{f}_a \quad \text{et donc } \mathbf{u}^* = \alpha_a^c \tag{16}$$

$$\mathbf{u}^* D + \mathbf{f}_p = \mathbf{t}^* - \mathbf{v}^* \quad \textit{et donc } \mathbf{t}^* - \mathbf{v}^* = \alpha_p^c \tag{17}$$

Les formules (14), (15), (16) et (17) permettent donc de retrouver les *coûts définitifs* de la comptabilité analytique et de les relier aux variables duales des programmes d'optimisation des marges.

3. MÉTHODE DE KAPLAN ET THOMSON

En fait aucune des deux méthodes classiques (méthode du coût complet et méthode du coût variable) ne prend en compte *la meilleure utilisation* possible des capacités existantes $\mathbf{b}_a$ et $\mathbf{b}_p$ des facteurs de production. On remarquera sur l'exemple numérique donné en annexe que, dans les deux cas, la marge nette est de 160 000 F alors que sans excéder les capacités des sections auxiliaires et principales on peut atteindre une marge nette de 296 842 F par le programme optimal suivant :

$$\mathbf{x}^* = (84\,000/19,\ 0,\ 60\,000/19) = (4421{,}05,\ 0,\ 3157{,}89) \quad (cf.\ \text{Annexe})$$

On supposera simplement que les clés de répartition traduites par les matrices C et D restent *données* et donc constantes. On rappelle que ces clés, bien que basées sur un programme de production $\mathbf{x}$ donné

$$\mathbf{x} = (4000,\ 2000,\ 2000)$$

ont été définies en tenant compte des prestations réciproques des sections en *proportion* et que par suite les coefficients techniques $c_{hh'}$ et d_{hk} peuvent être considérés comme fixes. D'ailleurs leur calcul a été effectué sur la base des *capacités* $\mathbf{b}_a$ et $\mathbf{b}_p$ et non pas sur la base d'une production donnée. La méthode de Kaplan et Thomson (1971) – rappelée ci-dessous – dégage donc une marge nette la plus élevée possible dans le cadre des disponibilités des facteurs de production existantes $\mathbf{b}_a$ et $\mathbf{b}_p$ dont les coûts d'utilisation définissent en théorie économique les *charges fixes*. En outre cette méthode utilise en fait :

– une méthodologie proche de celle du direct-costing dans la mesure où elle exploite le caractère variable des coûts,

– le principe du coût complet puisque, en fait, on imputera aux sections principales et aux produits le coût complet à la fin du processus, ce qui, comme en comptabilité traditionnelle, revient à déterminer un prix de revient complet des produits,

– le principe du coût marginal puisque les coûts variables imputés sont tantôt les coûts indirects définitifs du direct-costing et tantôt les coûts marginaux des ressources (qui sont ici les capacités des sections).

Sans insister sur les antagonismes des méthodes du coût complet et du coût variable (full-costing et direct-costing) ayant chacune des avantages respectifs, il semble que la méthode proposée par Kaplan et Thomson combine les mérites de l'une et de l'autre – nous verrons cependant ses limites dans l'application à la méthode des sections homogènes et donnerons une extension permettant de dépasser ses inconvénients : cette méthode basée sur la programmation linéaire est aussi proche de l'analyse économique (qui révèle le sens véritable des coûts) que l'est le direct-costing et aussi compatible avec les techniques comptables traditionnelles que l'est le full-costing dans l'imputation *exacte* de la totalité des charges. Mais le principal mérite de cette méthode repose peut-être sur le résultat fondamental que l'on peut en déduire : le programme optimal de production $\mathbf{x}^*$ est le même ([2]) quel que soit l'objectif de profit recherché

– soit la marge sur coûts variables directs

– soit la marge sur coûts variables complets

– soit la marge sur coûts complets.

Supposons que le programme optimal $\mathbf{x}^0$ de la firme se calcule à partir du modèle linéaire (18) suivant, assorti de son dual (19), où le premier (I^0) consiste à **maximiser la marge sur coûts variables directs :**

(18)			(19)
	$\text{Max}\, P^0 = \mathbf{c}\ \mathbf{x}$ $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\text{Min}\, \lambda\, \mathbf{b}$ $\lambda \geq \mathbf{0}$ $\lambda A \geq \mathbf{c}$	

Les trois programmes donnés précédemment de maximisation des marges (sur coûts variables directs, coûts variables complets et coûts complets) sont

([2]) Ceci sera démontré plus loin.

de ce type lorsque les variables $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ sont remplacées par leurs expressions en fonction de $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{y} = (I - C)^{-1} DB\,\mathbf{x} \qquad \mathbf{z} = B\,\mathbf{x}$$

La solution $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ de (18) et (19) est telle que :

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^0 = \lambda^0 A\,\mathbf{x}^0 = \lambda^0\,\mathbf{b} \tag{20}$$

1. Affectation du *coût complet* (common overhead allocation) :

Supposons que le coût complet à allouer aux produits soit H. On suppose que $H < \mathbf{c}\mathbf{x}^0$, c'est-à-dire que le revenu global couvre la totalité des charges. On pose

$$k = \frac{H}{P^0} = \frac{H}{\mathbf{c}\mathbf{x}^0} \tag{21}$$

Il est clair que $k < 1$. Le vecteur $\lambda^0 A$ donne les valeurs des ressources utilisées par le programme $\mathbf{x}^0$ et on peut affecter à chaque variable x_i un coût indirect complet de $k\,\lambda^0 A^i$. Avec cette affectation les programmes (18) et (19) sont remplacés par les programmes (22) et (23) suivants où le premier (I^1) consiste à **maximiser la marge sur coûts complets :**

(22)	$\operatorname{Max} P^1 = (\mathbf{c} - \mathbf{k}\,\lambda^0 A)\,\mathbf{x}$ $A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\operatorname{Min} \lambda\,\mathbf{b}$ $\lambda \geq \mathbf{0}$ $\lambda A \geq \mathbf{c} - \mathbf{k}\,\lambda^0 A$	(23)

Il est facile de montrer [Kaplan et Thomson (1971)] que la solution optimale $\mathbf{x}^1$ de (22) est la même que la solution $\mathbf{x}^0$ de (18) et que les solutions duales λ^0 de (19) et λ^1 de (23) sont liées par $\lambda^1 = (1 - k)\,\lambda^0$: il suffit de montrer que $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0$ est réalisable du primal, que $\lambda^1 = (1 - k)\,\lambda^0$ est réalisable du dual et que les objectifs du primal et du dual sont égaux pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1$ et $\lambda = \lambda^1$, prouvant par là que $\mathbf{x}^1$ est solution optimale du primal (22) et λ^1 solution optimale du dual (23).

La solution $(\mathbf{x}^1, \lambda^1)$ de (22) et (23) est telle que :

$$(\mathbf{c} - k\,\lambda^0 A)\,\mathbf{x}^1 = \lambda^1 A\,\mathbf{x}^1 = \lambda^1\,\mathbf{b}$$

Le coût total imputé à $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0$ est alors :

$$k\,\lambda^0 A\,\mathbf{x}^0 = (H/\mathbf{c}\mathbf{x}^0)\,\lambda^0 A\,\mathbf{x}^0 = H \quad \text{[d'après (20)]}$$

et donc la totalité du coût complet H est ainsi imputée.

2. Affectation du *coût indirect variable* (allocation of traceable overheads) : supposons qu'une partie $C(b_i)$ du coût indirect soit variable et puisse être affectée à la ressource i, $(i = 1, 2, \ldots, K+L)$ et soit b_i la quantité disponible de ressource i. On définit, avec les notations de Kaplan et Thomson

$$B_i = \frac{C(b_i)}{b_i} \quad \text{le coût indirect moyen unitaire de la ressource } i.$$

Le coût indirect variable total est alors $\mathbf{Bb}$. Kaplan et Thomson montrent que si $B_i > \lambda_i^0$ alors la règle précédente d'affectation de ce coût indirect variable $\mathbf{B}$ peut conduire à une solution optimale différente de $\mathbf{x}^0$. Ils envisagent alors un nouveau vecteur $\mathbf{B}'$ tel que

$$B_i' = \min\{B_i, \lambda_i^0\}$$

et ils imputent la charge indirecte B_i' à l'utilisation d'une unité de la ressource i. On affecte ainsi à chaque variable x_j un coût indirect variable de $\mathbf{B}' A^j$ et au programme $\mathbf{x}$ un coût indirect variable total de $\mathbf{B}' A\mathbf{x}$. Dans ces conditions les programmes (18) et (19) sont remplacés par les programmes (24) et (25) suivants, où le premier (I^2) consiste à **maximiser la marge sur coûts variables complets :**

(24)	$\operatorname{Max} P^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{B}' A)\mathbf{x}$ $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\operatorname{Min} \lambda \mathbf{b}$ $\lambda \geq \mathbf{0}$ $\lambda A \geq \mathbf{c} - \mathbf{B}' A$	(25)

Il est facile de montrer [Kaplan et Thomson (1971)] que la solution optimale $\mathbf{x}^2$ de (24) est la même que la solution $\mathbf{x}^0$ de (18) et que les solutions duales λ^0 de (19) et λ^2 de (25) sont liées par $\lambda^2 = \lambda^0 - \mathbf{B}'$: la démonstration s'effectue comme précédemment, en montrant que $\mathbf{x}^2$ est réalisable du primal (24), que λ^2 est réalisable du dual (25) et que les objectifs du primal et du dual sont égaux pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$ et $\lambda = \lambda^2$ ($\mathbf{B}' A\mathbf{x}^0 = \mathbf{B}'\mathbf{b}$ car si $A_i\mathbf{x}^0 < b_i$ alors $\lambda_i^0 = 0$ et donc $B_i' = \min\{B_i, \lambda_i^0\} = 0$). Le coût variable indirect total imputé à $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^0$ est alors $\mathbf{B}' A\mathbf{x}^0$. Or le théorème de dualité implique que

$$(\mathbf{c} - \mathbf{B}' A)\mathbf{x}^2 = \lambda^2 \mathbf{b} = (\lambda^0 - \mathbf{B}')\mathbf{b}$$

et d'après (20) on obtient

$$\mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0 = \mathbf{B}'\, \mathbf{b}$$

et donc la part $\mathbf{B}'\mathbf{b}$ du coût variable indirect total $\mathbf{B}\mathbf{b}$ est ainsi imputée.

3. Affectation du *coût complet* (après affectation du coût indirect variable) : Le coût indirect variable restant sera agrégé aux coûts indirects non variables et l'allocation de tous ces coûts indirects non imputés $H - \mathbf{B}'\, \mathbf{b} = H - \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0$ s'effectuera ensuite comme dans la méthode du coût complet : les coûts indirects non encore imputés constituent une proportion $k^* < 1$ de la marge sur coûts variables complets $P^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{B}'\, A)\, \mathbf{x}^0$:

$$k^* = \frac{H - \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0}{(\mathbf{c} - \mathbf{B}'\, A)\, \mathbf{x}^0}$$

Le programme linéaire (26) qui effectue l'allocation à la fois des coûts indirects variables et du coût complet et son dual (27) sont alors les suivants, où le premier (I^3) maximise la marge sur coût complet P^3 :

$$P^3 = (\mathbf{c} - \mathbf{B}'\, A - k^*\, \lambda^2\, A)\, \mathbf{x} = [\mathbf{c} - (1 - k^*)\, \mathbf{B}'\, A - k^*\, \lambda^0\, A]\, \mathbf{x}$$

(26)	(27)
$\operatorname{Max} P^3 = [\mathbf{c} - (1 - k^*)\, \mathbf{B}'\, A - k^*\, \lambda^0\, A]\, \mathbf{x}$	$\operatorname{Min} \lambda\, \mathbf{b}$
$A\, \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\lambda \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\lambda A \geq \mathbf{c} - (1 - k^*) B'\, A - k^*\, \lambda^0\, A$

Il est facile de montrer [Kaplan et Thomson (1971)] que la solution optimale $\mathbf{x}^3$ de (26) est la même que la solution $\mathbf{x}^0$ de (18) et que les solutions duales λ^3 de (27) et λ^2 de (25) sont liées par $\lambda^3 = (1 - k^*)\, \lambda^2$: la démonstration s'effectue toujours de la même façon en montrant que $\mathbf{x}^3$ est réalisable du primal, que λ^3 est réalisable du dual et que les objectifs sont égaux pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}^3$ et $\lambda = \lambda^3$.

Le coût total imputé à $\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^0$ est alors :

$$\begin{aligned}
[(1 - k^*)\, \mathbf{B}'\, A + k^*\, \lambda^0\, A]\, \mathbf{x}^0 &= (\mathbf{1} - \mathbf{k}^*)\, \mathbf{B}'\, \mathbf{A}\, \mathbf{x}^0 + \mathbf{k}^*\, \mathbf{c}\mathbf{x}^0 \\
&= \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0 + k^*\, (\mathbf{c}\mathbf{x}^0 - \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0) \\
&= \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0 + (H - \mathbf{B}'\, A\, \mathbf{x}^0) = H
\end{aligned}$$

et donc la totalité du coût complet H est ainsi imputée.

Récapitulation :

$$\text{Si } \delta \text{ vaut} \begin{cases} \delta^0 = \mathbf{p} - \mathbf{d} = \text{marge unitaire sur coûts variables directs} \\ \delta^1 = \text{marge unitaire sur coûts complets} \\ \delta^2 = \text{marge unitaire sur coûts variables complets} \\ \delta^3 = \text{marge unitaire sur coûts complets (après} \\ \qquad \text{affectation des coûts indirects variables)} \end{cases}$$

en notant $\delta^0\,\mathbf{x}$, $\delta^1\,\mathbf{x}$, $\delta^2\,\mathbf{x}$ et $\delta^3\,\mathbf{x}$ les quatre marges des programmes I^0, I^1, I^2 et I^3 ci-dessus le tableau suivant résume les relations entre les solutions optimales de ces programmes :

TABLEAU I

Relations entre les programmes I^0, I^1, I^2, I^3.

	Fonction objectif	Solution primale	Solution duale	Marge P
I^0	δ^0	$\mathbf{x}^0$	λ^0	P^0
I^1	$\delta^1 = \delta^0 - k\,\lambda^0\,A$	$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0$	$\lambda^1 = (1-k)\,\lambda^0$	$P^1 = (1-k)\,P^0$
I^2	$\delta^2 = \delta^0 - \mathbf{B}'\,A$	$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^0$	$\lambda^2 = \lambda^0 - \mathbf{B}'$	$P^2 = P^0 - \mathbf{B}'\,\mathbf{b}$
I^3	$\delta^3 = \delta^0 - (1-k^*)\,\mathbf{B}'\,A$ $-k^*\,\lambda^0\,A$	$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^0$	$\lambda^3 = (1-k^*)\,(\lambda^0 - \mathbf{B}')$	$P^3 = (1-k^*)\,(P^0 - \mathbf{B}'\,\mathbf{b})$

Remarque sur les limites de la méthode :

La méthode de Kaplan et Thomson repose sur une hypothèse fondamentale :

$$\begin{cases} \text{La solution commune des programmes d'optimisation des marges} \\ \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3 \text{ est une solution } \textit{non dégénérée}. \end{cases}$$

Si cette hypothèse n'était pas satisfaite il existerait *plusieurs systèmes de variables duales* et la méthode, qui utilise les valeurs des variables duales λ^0 et λ^2, donnerait des imputations de coûts aux produits (prix de revient des produits) qui dépendraient des systèmes choisis parmi les systèmes possibles.

Or, en comptabilité analytique, les contraintes sur les sections auxiliaires ne sont pas indépendantes des contraintes sur les sections principales et comme les premières sont généralement saturées à l'optimum $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3$ les secondes le sont aussi, ce qui conduit alors à des *optima dégénérés* et par conséquent la méthode d'imputation des coûts préconisée par Kaplan et Thomson ne s'applique plus.

Application de la méthode de Kaplan et Thomson au cas des sections homogènes

Si l'on applique cette méthode à la recherche de la solution optimale dans le cas des sections homogènes on aura quatre problèmes distincts selon la marge que l'on cherche à optimiser, mais les contraintes restent les mêmes (10) et (11) :

$\operatorname{Max} P = \delta \mathbf{x}$ $B\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_p$ $(I - C)^{-1} DB\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_a$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\operatorname{Min} \lambda_a\,\mathbf{b}_a + \lambda_p\,\mathbf{b}_p$ $\lambda_p \geq \mathbf{0}$ $\lambda_a \geq \mathbf{0}$ $[\lambda_p + \lambda_a (I - C)^{-1} D]\,\mathbf{B} \geq \delta$

(28)

Maximisation de la marge sur coûts variables directs (programme I^0) : $\delta^0 = \mathbf{p} - \mathbf{d}$. On notera $(\mathbf{x}^0, \lambda_p^0, \lambda_a^0, P^0)$ la solution optimale de ce premier problème.

Les coûts indirects constituent une part k de la marge P^0 :

$$k = \frac{\text{total des coûts indirects}}{\text{marge}} = \frac{H}{P^0} \tag{29}$$

On supposera dans la suite que $k < 1$. Les parties variables des coûts indirects des sections auxiliaires et des sections principales sont regroupées en β_a et β_p respectivement.

Maximisation de la marge sur coûts complets (programme I^1) :

Si l'on ne connaît pas les coûts indirects variables unitaires β_p et β_a mais seulement les charges fixes *H*, on impute ces charges aux produits au prorata de la valeur totale des ressources (unités d'œuvre) qu'ils utilisent : le produit i se voit imputer un coût de $k\,[\lambda_p^0\,\mathbf{B}^i + \lambda_a^0\,(I - C)^{-1}\,D\,\mathbf{B}^i]$ et la marge sur coûts complets s'écrit $\delta^1\,\mathbf{x} = \{\mathbf{p} - \mathbf{d} - k\,[\lambda_p^0\,B + \lambda_a^0\,(I - C)^{-1}\,DB]\}\,\mathbf{x}$.

On notera $(\mathbf{x}^1, \lambda_p^1, \lambda_a^1, P^1)$ la solution optimale de ce second problème. Le total des coûts indirects imputés aux produits est alors précisément égal à *H*.

Supposons ensuite que l'on connaisse les coûts indirects variables unitaires β_p et β_a. Dans ce qui suit on notera μ le vecteur B' de Kaplan et Thomson.

Pour chaque section auxiliaire A_h on pose $\mu_{ah} = \min(\lambda^0_{ah}, \beta_h)$ (30)

Pour chaque section principale P_k on pose $\mu_{pk} = \min(\lambda^0_{pk}, \beta_k)$ (31)

Les vecteurs μ_a et μ_p satisfont donc aux inégalités suivantes :

(32) $\mathbf{0} \leq \mu_a \leq \lambda^0_a$ $\qquad$ $\mathbf{0} \leq \mu_a \leq \beta_a$ (33)

(34) $\mathbf{0} \leq \mu_p \leq \lambda^0_p$ $\qquad$ $\mathbf{0} \leq \mu_p \leq \beta_p$ (35)

Le produit i se voit imputer par unité le coût indirect variable suivant : $\mu_p\,\mathbf{B}^i + \mu_a\,(I - C)^{-1}\,D\mathbf{B}^i$ et le programme de production $\mathbf{x}$ se voit imputer le coût indirect variable $[\mu_p + \mu_a\,(I - C)^{-1}\,D]\,B\,\mathbf{x}$ et dégage une marge sur coûts indirects variables de :

$$\delta^2\,\mathbf{x} = [\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu_p\,B - \mu_a\,(I - C)^{-1}\,DB]\,\mathbf{x}$$

conduisant au nouveau programme (28) de maximisation de la marge sur coûts variables complets.

Maximisation de la marge sur coûts variables complets (programme I^2) :

On notera $(\mathbf{x}^2, \lambda^2_p, \lambda^2_a, P^2)$ la solution optimale de ce second problème. Le total des coûts indirects variables imputés aux produits est alors

$$[\mu_p + \mu_a\,(I - C)^{-1}\,D]\,B\,\mathbf{x}^2 \tag{36}$$

On a ainsi imputé la part $[\mu_p\,B + \mu_a\,(I - C)^{-1}\,DB]\,\mathbf{x}^2 = \mu_p\,\mathbf{b}_p + \mu_a\,\mathbf{b}_a$ du coût indirect variable total $\beta_p\,\mathbf{b}_p + \beta_a\,\mathbf{b}_a$.

Les coûts indirects non encore imputés constituent une proportion k^* de la marge $P^2 = \delta^2\,\mathbf{x}$:

$$k^* = \frac{\text{total des coûts indirects} - [\mu_p\,B + \mu_a\,(I - C)^{-1}\,DB]\,\mathbf{x}^2}{P^2} \tag{37}$$

$$k^* = \frac{\text{total des coûts indirects} - (\mu_p\,\mathbf{b}_p + \mu_a\,\mathbf{b}_a)}{P^2} \tag{38}$$

On a alors

$$k^* < 1 \tag{39}$$

Le vecteur $\lambda^2_p\,B + \lambda^2_a\,(I - C)^{-1}\,DB$ donne les valeurs des ressources utilisées par le programme $\mathbf{x}^2$ et on peut affecter à chaque variable x_i

un coût indirect complet de $k^* [\lambda_p^2 \mathbf{B}^i + \lambda_a^2 (I - C)^{-1} D \mathbf{B}^i]$. Avec cette affectation le programme $\mathbf{x}$ se voit imputer un coût complet de

$$[(\mu_p + k^* \lambda_p^2) B + (\mu_a + k^* \lambda_a^2) (I - C)^{-1} DB] \mathbf{x}$$

et dégage une marge sur coûts complets de :

$$\delta^3 = [\mathbf{p} - \mathbf{d} - (\mu_p + k^* \lambda_p^2) B - (\mu_a + k^* \lambda_a^2) (I - C)^{-1} DB] \mathbf{x}$$

conduisant au nouveau programme (28) de maximisation de la marge sur coûts complets (après imputation des coûts indirects variables).

Maximisation de la marge sur coûts complets après affectation des coûts indirects variables (programme I^3) :

On notera $(\mathbf{x}^3, \lambda_p^3, \lambda_a^3, P^3)$ la solution optimale de ce quatrième problème. Le total des coûts indirects est alors intégralement imputé aux produits. En effet, la solution du second programme est $P^2 = \lambda_p^2 \mathbf{b}_p + \lambda_a^2 \mathbf{b}_a$ et comme le résultat fondamental est l'égalité des solutions primales des quatre programmes $[\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3]$, le coût indirect total imputé à $\mathbf{x}^3$ est :

$$\begin{aligned} &[(\mu_p + k^* \lambda_p^2) B + (\mu_a + k^* \lambda_a^2) (I - C)^{-1} DB] \mathbf{x}^2 \\ &\quad = \mu_p \mathbf{b}_p + \mu_a \mathbf{b}_a + k^* (\lambda_p^2 \mathbf{b}_p + \lambda_a^2 \mathbf{b}_a) \\ &\quad = \text{total des coûts indirects} \end{aligned}$$

d'après la définition (38) de k^*.

Il faut remarquer que *cette imputation de la totalité des coûts indirects tient au fait que la production est optimale*

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3 = (84\,000/19,\ 0,\ 60\,000/19)$$

et que pour une production quelconque comme (4000, 2000, 2000) ce ne serait pas le cas.

4. DÉGÉNÉRESCENCE

On a vu que les contraintes (10) et (11) des programmes (28) d'optimisation des marges n'étaient pas *indépendantes* et de surcroît la définition des clés de répartition implique que ces contraintes sont *toutes saturées* par le programme de production optimal. Ceci entraîne la dégénérescence de la solution optimale : si ceci n'implique aucune difficulté pour la détermination de la production optimale il en va tout autrement pour *la détermination des variables duales*. Or celles-ci interviennent dans la définition du paramètre

k^* de la méthode de Kaplan et Thomson. Il y a donc autant de valeurs de ce paramètre que de systèmes de valeurs duales associés à une solution dégénérée et donc autant d'imputations différentes et de définitions différentes des prix de revient des produits.

Cette dégénérescence de la solution optimale est une faiblesse de la méthode. Un moyen d'y remédier pourrait alors être le suivant :

> *comme les contraintes* (11) *sont redondantes et automatiquement saturées lorsque sont saturées les contraintes* (10) *on les ôtera des quatre programmes d'optimisation des marges, obtenant ainsi des programmes SIMPLIFIÉS du type suivant* :

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \begin{aligned} \operatorname{Max} P &= \delta\, \mathbf{x}_s \\ B\, \mathbf{x}_s &\leq \mathbf{b}_p \\ \mathbf{x}_s &\geq \mathbf{0} \end{aligned} & \begin{aligned} \operatorname{Min} \lambda_s\, &\mathbf{b}_p \\ \lambda_s &\geq \mathbf{0} \\ \lambda_s B &\geq \delta \end{aligned} \end{array}} \tag{40}$$

– Il est facile de montrer que la solution λ_s^* du dual de (40) et *toutes* les solutions $(\lambda_p^*,\, \lambda_s^*)$ du dual de (28) sont reliées par la relation :

$$\boxed{\lambda_s^* = \lambda_p^* + \lambda_a^*\, (I - C)^{-1}\, D}$$

On effectue donc cette suppression dans les quatre programmes I^0, I^1, I^2 et I^3 que l'on notera encore I^0, I^1, I^2 et I^3 et que l'on résoudra en annexe pour l'exemple d'application, à l'aide du logiciel LINDO.

5. MÉTHODE ALTERNATIVE À LA MÉTHODE DE KAPLAN ET THOMSON

Une autre insuffisance demeure dans la méthode de Kaplan et Thomson : elle suppose que la production est **optimale** au sens de la maximisation des marges. Mais toute comptabilité analytique est fondée sur une production *réelle* qui n'est *pratiquement jamais optimale*, prenons-en comme exemple l'illustration numérique donnée en annexe qui dégage une marge de 160 000 F alors qu'une production « optimale » ne consommant pas davantage d'unités d'œuvre des sections homogènes dégage une marge presque double.

On peut adapter cette méthode d'affectation des coûts au cas d'une production *non optimale* comme les productions de (4000, 2000, 2000) ou de (3600, 3900, 900) qui, toutes deux, **saturent les disponibilités des sections principales et auxiliaires.**

La suppression des contraintes redondantes

$$(I - C)^{-1}\, DB\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_a \tag{11}$$

a mené au programme (40) qui s'écrit, en intégrant dans la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ les contraintes de signe $-x_j \leq 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Max}\, P &= \delta\,\mathbf{x} \\ A\,\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \end{aligned}} \tag{41}$$

où δ est l'une ou l'autre des marges δ^0, δ^1, δ^2, δ^3, et où la matrice A s'écrit alors :

$$A = \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline -I \\ \hline \end{array}$$

Les évaluations des variables duales λ_s^0, λ_s^1, λ_s^2, λ_s^3 nécessitent de rechercher la solution optimale de chacun des programmes (41) ci-dessus. On abandonnera la recherche de l'optimum de production en envisageant **une production donnée** comme (4000, 2000, 2000) ou (3600, 3900, 900).

On généralisera, *pour toute production donnée,* les valeurs duales des contraintes $A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ qui ne sont valables que pour la production optimale, en ne considérant que les contraintes $A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ **saturées** par la *production donnée.*

On appellera M la sous-matrice de A formée par ces contraintes saturées : les productions non optimales (4000, 2000, 2000) et (3600, 3900, 900) saturent les seules contraintes de B et pas de contraintes de signe, et $M = B$, alors que la production optimale (84 000/19, 0, 6 0000/19) sature aussi une contrainte de signe $[-x_2 \leq 0]$ et alors :

$$M = \begin{array}{|ccc|} \hline & B & \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Sauf lorsque certaines composantes de $\mathbf{x}$ sont nulles, en général $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ et $M = B$ et les composantes correspondantes de $\mathbf{b}$ sont $\mathbf{b}_p$ car les sections principales sont saturées. On retiendra ces notations $M = B$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}_p$ dans ce cas. Si certaines composantes de $\mathbf{x}$ sont nulles cela rajoute des lignes dans M dont le produit scalaire par $\mathbf{x}$ vaut 0.

La matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de cette matrice M, notée M^+, est :

$$M^+ = M^T (M M^T)^{-1} \tag{42}$$

si ces contraintes saturées sont linéairement indépendantes (*condition de qualification des contraintes*).

On définira des *variables pseudo-duales* α par

$$\boxed{\alpha = \delta M^+} \tag{43}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha^0 = \delta^0 M^+ \\ \alpha^1 = \delta^1 M^+ \\ \alpha^2 = \delta^2 M^+ \\ \alpha^3 = \delta^3 M^+ \end{cases} \tag{44}$$

On montre [5] que les variables ainsi définies ont les mêmes propriétés que les variables duales à l'optimum du programme (41) – en particulier *elles satisfont les relations d'exclusion.* Elles possèdent l'avantage d'être valables *en tout point* $\mathbf{x}$ non nécessairement optimal. Nous appliquerons cette définition aussi au cas de la *production optimale* et retrouverons les valeurs des variables duales classiques et l'imputation des coûts sera alors exactement celle de la méthode de Kaplan et Thomson (après suppression des contraintes redondantes entraînant la dégénérescence et la multiplicité des solutions duales).

La détermination des évaluations duales α des contraintes [α^0, α^1, α^2, α^3 respectivement] et leur utilisation pour déterminer le prix de revient des produits ont pour effet *d'imputer au mieux* les valeurs des différentes marges unitaires [δ^0, δ^1, δ^2, δ^3] aux contraintes saturées (en général les contraintes d'utilisation des sections principales). En effet, les valeurs proposées de α sont les « *solutions des moindres carrés de longueur minimale* » des systèmes suivants (impossibles dans les deux premiers exemples $\mathbf{x} = (4000, 2000, 2000)$ et $\mathbf{x} = (3600, 3900, 900)$ et possibles dans le troisième exemple de la solution optimale) :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u}^0 M = \delta^0 \\ \mathbf{u}^1 M = \delta^1 \\ \mathbf{u}^2 M = \delta^2 \\ \mathbf{u}^3 M = \delta^3 \end{array}\right\} \qquad (45)$$

dont les solutions α^0, α^1, α^2, α^3 sont telles que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^0 M = \gamma^0 \\ \alpha^1 M = \gamma^1 \\ \alpha^2 M = \gamma^2 \\ \alpha^3 M = \gamma^3 \end{array}\right\} \qquad (46)$$

où chaque γ est le résultat de la minimisation de l'erreur $\|\delta - \gamma\|^2$.

Remarque: Si l'on maintient les contraintes redondantes $(I - C)^{-1} DB\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_a$ – revenant ainsi au programme (28) – alors la matrice M s'accroît de toutes ces contraintes

$$M = \begin{array}{|c|}\hline B \\ \hline (I - C)^{-1} DB \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} (\alpha_p) \\ (\alpha_a) \end{array}$$

Alors $\alpha = \delta M^+ = (\alpha_p|\alpha_a)$ et la dégénérescence entraîne plusieurs systèmes de valeurs possibles de $(\alpha_p|\alpha_a)$.

Si on note α_s les variables pseudo-duales définies par (43) à partir du *système simplifié* (41), on peut encore montrer que le vecteur α_s et **tous** les vecteurs possibles $(\alpha_p|\alpha_a)$ sont reliés par :

$$\boxed{\alpha_s = \alpha_p + \alpha_a (I - C)^{-1} D}$$

L'imputation des coûts indirects variables primaires β_a et β_p et des coûts complets primaires $\mathbf{f}_a$ et $\mathbf{f}_p$ s'effectuera encore en quatre étapes comme précédemment dans l'application de la méthode de Kaplan et Thomson mais *sans rechercher à optimiser* dans les quatre programmes suivants.

1. (*Maximisation de la*) *marge sur coûts variables directs* : $\delta^0\,\mathbf{x} = (\mathbf{p}-\mathbf{d})\,\mathbf{x}$

$$(I^0) \qquad \boxed{\begin{array}{c}(\mathrm{Max})\,\delta^0\,\mathbf{x} = P^0 \\ A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\end{array}}$$

On calcule au point considéré les évaluations duales α^0 ($\alpha^0 = \delta^0\,M^+$) qui constituent une imputation (en général aux seules sections principales) de la marge sur coûts variables directs δ^0. D'une façon plus générale, on a :

$$\alpha^0 = (\overline{\alpha}^0 | \overline{\overline{\alpha}}^0)$$

en notant $\overline{\alpha}^0$ la partie de α^0 concernant les lignes de B et $\overline{\overline{\alpha}}^0$ la partie de α^0 concernant les autres lignes de M correspondant aux contraintes de signe saturées (variables x_i nulles). On remarque qu'alors ([3]) :

$$\overline{\alpha}^0\,B\,\mathbf{x} = \alpha^0\,M\,\mathbf{x}$$

On impute cette marge aux produits par $\overline{\alpha}^0\,B$; l'imputation globale de cette marge aux produits est alors :

$$\overline{\alpha}^0\,B\,\mathbf{x} = \alpha^0\,M\,\mathbf{x} = \overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$$

d'après les relations d'exclusion que satisfont ces variables.

Remarques : 1. $\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p = \alpha^0\,M\,\mathbf{x} = \gamma^0\,\mathbf{x} \neq \delta^0\,\mathbf{x}$

2. $\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$ est évidemment l'imputation totale aux sections principales de la marge sur coûts variables directs puisque $\overline{\alpha}^0$ en est l'imputation unitaire et $\mathbf{b}_p$ est le nombre d'unités d'œuvre de ces sections.

Au point considéré (*non optimal*) les coûts indirects constituent une part k de la « pseudo-marge sur coûts variables directs » $\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$ imputée aux sections principales (et aux produits) :

$$k = \frac{\text{total des coûts indirects}}{\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p} \tag{47}$$

Généralement $k < 1$, mais ceci n'est nécessaire dans la suite que si l'on veut calculer directement la marge sur coûts complets δ^1 dans le cas où l'on ne connaît pas de coûts indirects variables. Dans ce cas on imputera au produit i le coût $k\overline{\alpha}^0\,B^i$ de sorte que la marge s'écrit alors $\delta^1\,\mathbf{x}$ où $\delta^1 = \delta^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,B = \mathbf{p} - \mathbf{d} - k\,\overline{\alpha}^0\,B$ et le programme devient le suivant :

([3]) On remarque que $\overline{\alpha}^0\,B\,\mathbf{x} = \alpha^0\,M\,\mathbf{x}$ car les composantes de $\alpha^0\,M$ autres que celles qui constituent $\overline{\alpha}^0\,B$ sont multipliées par des variables x_i nulles.

2. (*Maximisation de la*) *marge sur coûts complets* :

$$\delta^1 \mathbf{x} = (\mathbf{p} - \mathbf{d} - k\,\overline{\alpha}^0\,B)\,\mathbf{x}$$

$$(I^1) \qquad \boxed{\begin{array}{c}(\text{Max})\,\delta^1\,\mathbf{x} = P^1\\ A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\end{array}}$$

On calcule au point considéré les évaluations duales α^1 ($\alpha^1 = \delta^1 M^+$) qui constituent une imputation (en général aux seules sections principales) de la marge sur coûts complets δ^1. D'une façon plus générale, on a :

$$\alpha^1 = (\overline{\alpha}^1 | \overline{\overline{\alpha}}^1)$$

en notant $\overline{\alpha}^1$ la partie de α^1 concernant les lignes de B et $\overline{\overline{\alpha}}^1$ la partie de α^1 concernant les autres lignes de M correspondant aux variables x_i nulles. On remarque qu'alors :

$$\overline{\alpha}^1\,B\,\mathbf{x} = \alpha^1\,M\,\mathbf{x}$$

(pour la même raison que dans la note précédente).

Supposons ensuite que l'on connaisse les coûts indirects variables. Les parties variables des coûts indirects des sections auxiliaires et principales sont regroupées en β_a pour les unes et β_p pour les autres. On pose :

$$\mu = \beta_p + \beta_a\,(I - C)^{-1}\,D \tag{48}$$

μ est donc l'imputation aux sections principales de la totalité des coûts indirects variables par le biais des clés de répartition C et D. On impute ensuite ces coûts indirects variables aux produits par $\mu\,B$. Dans ces conditions la marge sur coûts indirects variables s'écrit :

$$P^2 = \delta^2\,\mathbf{x} = (\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu\,B)\,\mathbf{x} = [\delta^0 - (\mu | \mathbf{0})\,M]\,\mathbf{x} \tag{49}$$

3. (*Maximisation de la*) *marge sur coûts variables complets* :

$$\delta^2\,\mathbf{x} = (\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu\,B)\,\mathbf{x}$$

$$(I^2) \qquad \boxed{\begin{array}{c}(\text{Max})\,\delta^2\,\mathbf{x} = P^2\\ A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\end{array}}$$

On calcule au point considéré les évaluations duales α^2 qui constituent une imputation (en général aux seules sections principales) de la marge sur coûts variables complets δ^2. D'une façon plus générale, on a :

$$\alpha^2 = (\overline{\alpha}^2 | \overline{\overline{\alpha}}^2)$$

en notant $\overline{\alpha}^2$ la partie de α^2 concernant les lignes de B et $\overline{\overline{\alpha}}^2$ la partie de α^2 concernant les autres lignes de M correspondant aux variables x_i nulles. On remarque qu'alors :

$$\overline{\alpha}^2 \, B \, \mathbf{x} = \alpha^2 \, M \, \mathbf{x}$$

(pour la même raison que dans la note précédente).

On impute cette marge aux produits par $\overline{\alpha}^2 \, B$; l'imputation globale de cette marge aux produits est alors

$$\overline{\alpha}^2 \, B \, \mathbf{x} = \alpha^2 \, M \, \mathbf{x} = \overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p$$

d'après les relations d'exclusion que satisfont ces variables.

On remarque encore que $\overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p = \alpha^2 \, M \, \mathbf{x} = \gamma^2 \, \mathbf{x} \neq \delta^2 \, \mathbf{x} = P^2$, et aussi que $\overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p$ est l'imputation totale aux sections principales de la marge sur coûts indirects variables.

Jusqu'ici la totalité des coûts indirects imputés aux produits est $\mu \, B \, \mathbf{x}$. Les coûts indirects non encore imputés sont donc :

$$\text{total des coûts indirects} - \mu \, B \, \mathbf{x}$$

Ils constituent une proportion k^* de la « pseudo-marge sur coûts indirects variables » $\overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p \neq P^2$ imputée aux sections principales (et aussi aux produits) :

$$k^* = \frac{\text{coûts indirects non imputés}}{\overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p} = \frac{\text{total des coûts indirects} - \mu \, B \, \mathbf{x}}{\overline{\alpha}^2 \, \mathbf{b}_p}$$

Les évaluations α^2 (dont $\overline{\alpha}^2$ mesure les participations des sections principales à la marge sur coûts indirects variables) vont servir à leur imputer de façon proportionnelle une part des coûts non encore imputés : *on impute à la section principale P_k la quantité $k^* \, \overline{\alpha}_k^2$* et on impute ensuite aux produits par $k^* \, \overline{\alpha}^2 \, B$ de sorte que la marge totale P^3 sur coûts complets s'écrit :

$$P^3 = (\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu \, B - k^* \, \overline{\alpha}^2 \, B) \, \mathbf{x} = \delta^0 \, \mathbf{x} - (\mu + k^* \, \overline{\alpha}^2) \, B \, \mathbf{x} \qquad (50)$$

Remarque: Contrairement à la méthode de Kaplan et Thomson où k^* donné par (37) dépend du système choisi parmi *tous* les systèmes (λ_p, λ_a)

possibles, ici k^* est *indépendant* du système (α_p, α_a) choisi. En effet, dans (37), le premier k^* dépend de $[\mu_p + \mu_a (I - C)^{-1}]$ et rien ne prouve que (μ_p, μ_a) définis par (32)-(35) soient tels que $\mu_p + \mu_a (I - C)^{-1}$ soit constant pour *tous* les systèmes (λ_p, λ_a). Par contre, le second k^* s'écrirait pour le programme *avec contraintes redondantes* sous la forme

$$k^* = \frac{Total\ des\ coûts\ indirects - [\beta_p + \beta_a (I - C)^{-1} D] B \mathbf{x}}{\alpha_p \mathbf{b}_p + \alpha_a \mathbf{b}_a}$$

et bien qu'il existe *plusieurs* systèmes (α_p, α_a) possibles on sait que $\alpha_p + \alpha_a (I - C)^{-1} D$ est *constant* pour *tous* les systèmes (α_p, α_a) de sorte que le dénominateur de k^* s'écrit, en remplaçant $\mathbf{b}_a$ par $(I - C)^{-1} D \mathbf{b}_p$ [formule (3)] : $[\alpha_p + \alpha_a (I - C)^{-1} D] \mathbf{b}_p$ et est constant pour tout système (α_p, α_a).

4. (*Maximisation de la*) *marge sur coûts complets* (*après affectation des coûts indirects variables*) : $\delta^3 \mathbf{x} = [\mathbf{p} - \mathbf{d} - (\mu + k^* \overline{\alpha}^2) B] \mathbf{x}$

$$(I^3) \qquad \boxed{\begin{array}{c} (\text{Max})\, \delta^3 \mathbf{x} = P^3 \\ A \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}}$$

On calcule au point considéré les évaluations duales α^3 qui constituent une imputation (généralement aux sections principales) de la marge sur coûts complets δ^3. D'une façon plus générale, on a :

$$\alpha^3 = (\overline{\alpha}^3 | \overline{\overline{\alpha}}^3)$$

en notant $\overline{\alpha}^3$ la partie de α^3 concernant les lignes de B et $\overline{\overline{\alpha}}^3$ la partie de α^3 concernant les autres lignes de *M* correspondant aux variables x_i nulles. On remarque qu'alors :

$$\overline{\alpha}^3 B \mathbf{x} = \alpha^3 M \mathbf{x}$$

(pour la même raison que dans la note précédente).

On impute cette marge aux produits par $\overline{\alpha}^3 B$; l'imputation globale de cette marge aux produits est alors

$$\overline{\alpha}^3 B \mathbf{x} = \alpha^3 M \mathbf{x} = \overline{\alpha}^3 \mathbf{b}_p$$

d'après les relations d'exclusion que satisfont ces variables.

On remarque encore que $\overline{\alpha}^3\,\mathbf{b}_p = \alpha^3\,M\,\mathbf{x} = \gamma^3\,\mathbf{x} \neq \delta^3\,\mathbf{x}$, et aussi que $\overline{\alpha}^3\,\mathbf{b}_p$ est l'imputation totale aux sections principales de la marge sur coûts complets.

Toute cette procédure d'affectation des coûts indirects est basée sur les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1 : *La totalité des coûts indirects est affectée aux produits sous la forme des prix de revient (hors coûts directs) suivants* :

$$(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B = (1 - k^*)\,\mu\,B + k^*\,\overline{\alpha}^0\,B$$

Démonstration : Il faut montrer que, au point $\mathbf{x}$, la totalité des coûts imputés $(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B\,\mathbf{x}$ est égale à la totalité des coûts indirects. En effet par les relations d'exclusion :

$$(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B\,\mathbf{x} = \mu\,B\,\mathbf{x} + k^*\,\overline{\alpha}^2\,B\,\mathbf{x} = \mu\,B\,\mathbf{x} + k^*\,\overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}$$

Il suffit de remplacer k^* par sa définition pour obtenir :

$$(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B\,\mathbf{x} = \mu\,B\,\mathbf{x} + (\text{total des coûts indirects} - \mu\,B\,\mathbf{x})$$

THÉORÈME 2 : *Dans le cas où* $\mathbf{x} > 0$ *(c'est-à-dire* $M = B$*) les évaluations duales* $\alpha = (\overline{\alpha}|\overline{\overline{\alpha}})$ *se limitent à* $\overline{\alpha}$*. Alors les marges unitaires* δ*, les objectifs* P *des trois programmes et les évaluations duales* α *associées sont liés par les relations suivantes :*

TABLEAU II

Relations entre les programmes I^0, I^1, I^2, I^3.

	Marge	Objectif	Variables pseudo-duales
Programme I^0	δ^0	P^0	α^0
Programme I^1	$\delta^1 = \delta^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,B$	$P^1 = P^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^1 = (1-k)\,\alpha^0$
Programme I^2	$\delta^2 = \delta^0 - \mu\,B$	$P^2 = P^0 - \mu\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^2 = \alpha^0 - \mu$
Programme I^3	$\delta^3 = \delta^0 - (\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B$	$P^3 = P^2 - k^*\,\overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^3 = (1-k^*)\,\alpha^2$
	$= \delta^0 - (1-k^*)\,\mu\,B$	$P^3 = P^0 - (1-k^*)\,\mu\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^3 = (1-k^*)\,(\alpha^0 - \mu)$
	$-k^*\,\overline{\alpha}^0\,B$	$-k^*\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$	

Démonstration : Les définitions des variables pseudo-duales α^0, α^1, α^2, α^3 et les définitions des marges unitaires δ^0, δ^1, δ^2 et δ^3 donnent immédiatement l'ensemble des relations ci-dessus.

Dans le cas (improbable dans la pratique) où certaines composantes de $\mathbf{x}$ sont nulles – comme dans le cas de l'optimum $\mathbf{x} = (84\,000/19, 0,\ 60\,000/19)$ de l'exemple numérique – le théorème 2 doit être remplacé par le suivant :

THÉORÈME 3 : *Dans le cas où certaines composantes de* $\mathbf{x}$ *sont nulles (c'est-à-dire* $M \neq B$*) les marges unitaires* δ*, les objectifs* P *des trois programmes et les évaluations duales* $\alpha = (\overline{\alpha}|\overline{\overline{\alpha}})$ *associées sont liés par les relations suivantes :*

TABLEAU III

Relations entre les programmes I^0, I^1, I^2, I^3.

	Marge	Objectif	Variables pseudo-duales
Programme I^0	δ^0	P^0	$\alpha^0 = (\overline{\alpha}^0 \vert \overline{\overline{\alpha}}^0)$
Programme I^1	$\delta^1 = \delta^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,B$	$P^1 = P^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^1 = (\overline{\alpha}^1 \vert \overline{\overline{\alpha}}^1) = [(1-k)\,\overline{\alpha}^0 \vert \overline{\overline{\alpha}}^0]$
Programme I^2	$\delta^2 = \delta^0 - \mu\,B$	$P^2 = P^0 - \mu\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^2 = (\overline{\alpha}^2 \vert \overline{\overline{\alpha}}^2) = (\alpha^0 - \mu \vert \overline{\overline{\alpha}}^0)$
Programme I^3	$\delta^3 = \delta^0 - (\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B$	$P^3 = P^2 - k^*\,\overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^3 = (\overline{\alpha}^3 \vert \overline{\overline{\alpha}}^3) = [(1-k^*)\,\overline{\alpha}^2 \vert \overline{\overline{\alpha}}^0]$
	$= \delta^0 - (1-k^*)\,\mu\,B$ $-k^*\,\overline{\alpha}^0\,B$	$P^3 = P^0 - (1-k^*)\,\mu\,\mathbf{b}_p$ $-k^*\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$	$\alpha^3 = [(1-k^*)\,(\overline{\alpha}^0 - \mu) \vert \overline{\overline{\alpha}}^0]$

Démonstration : Ce cas particulier du théorème 2 concerne les improbables exemples où certaines composantes de $\mathbf{x}$ seraient prises nulles. A priori on ne voit pas très bien à quoi cela peut correspondre en comptabilité analytique puisque, en principe, toutes les activités sont exercées à un niveau x_i strictement positif. Cependant, si l'on tente de rechercher le programme $\mathbf{x}^*$ optimal au sens de la maximisation des marges, on peut être amené à constater qu'à l'optimum certaines activités devraient être abandonnées, (c'est ce qui s'est produit dans notre exemple d'illustration où $x_2^* = 0$).

La vérification des relations numériques pousse à démontrer qu'à l'optimum les variables pseudo-duales $\alpha = (\overline{\alpha}|\overline{\overline{\alpha}})$ sont exactement égales aux « variables duales » $(\lambda|\lambda')$, les premières étant les *variables duales* à proprement parler et les secondes étant les *coûts d'opportunité.*

Dans ces conditions, en regroupant toutes les variables nulles, la matrice des contraintes saturées M est formée par la matrice B des contraintes sur les sections principales et la matrice $-I$ des contraintes de signe saturées. Le regroupement des variables nulles permet de décomposer B en deux sous-matrices J et C, la seconde étant formée des coefficients de ces variables nulles dans B :

$$M = \begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{B} \\ \hline 0 & -I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline J & C \\ \hline 0 & -I \\ \hline \end{array}$$

La définition des matrices pseudo-inverses M^+ et B^+ implique en particulier les relations suivantes qui permettront de démontrer les formules liant les variables pseudo-duales $\alpha = (\overline{\alpha}|\overline{\overline{\alpha}}) = \delta\, M^+$:

$$MM^+ = I,\ BB^+ = I,\ JJ^+ = I$$

De plus la décomposition de M donne la structure de sa pseudo-inverse :

$$M = \begin{array}{|c|c|}\hline J^+ & J^+ C \\ \hline 0 & -I \\ \hline \end{array}$$

On partitionnera aussi en conséquence les vecteurs δ en $\delta = (\overline{\delta}|\overline{\overline{\delta}})$.

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= (\overline{\alpha}^0|\overline{\overline{\alpha}}^0) = \delta^0\, M^+ = (\overline{\delta}^0\, J^+|\overline{\delta}^0\, J^+\, C - \overline{\overline{\delta}}^0)\\
\alpha^1 &= (\overline{\alpha}^1|\overline{\overline{\alpha}}^1) = \delta^1\, M^+ = (\overline{\delta}^1\, J^+|\overline{\delta}^1\, J^+\, C - \overline{\overline{\delta}}^1)\\
\alpha^2 &= (\overline{\alpha}^2|\overline{\overline{\alpha}}^2) = \delta^2\, M^+ = (\overline{\delta}^2\, J^+|\overline{\delta}^2\, J^+\, C - \overline{\overline{\delta}}^2)\\
\alpha^3 &= (\overline{\alpha}^3|\overline{\overline{\alpha}}^3) = \delta^3\, M^+ = (\overline{\delta}^3\, J^+|\overline{\delta}^3\, J^+\, C - \overline{\overline{\delta}}^3)
\end{aligned}$$

Par définition $\delta^1 = (\delta^0 - k\,\overline{\alpha}^0\, B) = (\overline{\delta}^0 - k\,\overline{\alpha}^0\, J|\overline{\overline{\delta}}^0 - k\,\overline{\alpha}^0\, C) = (\overline{\delta}^1|\overline{\overline{\delta}}^1)$, d'où

$$\overline{\alpha}^1 = (\overline{\delta}^0\, J^+ - k\,\overline{\alpha}^0) = (1-k)\,\overline{\alpha}^0$$

et

$$\overline{\overline{\alpha}}^1 = \overline{\delta}^0\, J^+\, C - k\,\overline{\alpha}^0\, C - (\overline{\overline{\delta}}^0 - k\,\overline{\alpha}^0\, C) = \overline{\overline{\alpha}}^0$$

Par définition $\delta^2 = (\delta^0 - \mu\, B) = (\overline{\delta}^0 - \mu\, J|\overline{\overline{\delta}}^0 - \mu\, C) = (\overline{\delta}^2|\overline{\overline{\delta}}^2)$, d'où

$$\overline{\alpha}^2 = (\overline{\delta}^0\, J^+ - \mu) = \overline{\alpha}^0 - \mu$$

et

$$\overline{\overline{\alpha}}^2 = \overline{\delta}^0\, J^+\, C - \mu\, C - (\overline{\overline{\delta}}^0 - \mu\, C) = \overline{\overline{\alpha}}^0$$

Par définition

$$\begin{aligned}\delta^3 &= \delta^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2)\, B \\ &= [\overline{\delta}^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2)\, J | \overline{\overline{\delta}}^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2)\, C] = (\overline{\delta}^3 | \overline{\overline{\delta}}^3)\end{aligned}$$

$$\overline{\alpha}^3 = \overline{\delta}^0 \, J^+ - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2) = \overline{\alpha}^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2) = (1 - k^*)\,\overline{\alpha}^2$$

et

$$\overline{\overline{\alpha}}^3 = [\overline{\delta}^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2)\, J]\, J^+ \, C - [\overline{\overline{\delta}}^0 - (\mu + k^* \,\overline{\alpha}^2)\, C] = \overline{\overline{\alpha}}^0$$

CONCLUSION

Les méthodes d'imputation des coûts en comptabilité analytique (coût complet et/ou direct costing) ont été comparées (*cf.* [7] et [8]) aux résultats de la résolution d'un programme linéaire maximisant la marge sur coûts variables complets ou la marge sur coûts complets sous les contraintes de limitation des unités d'œuvre des sections auxiliaires (*A*) et des sections principales (*P*). On a montré que les coûts définitifs des *A* et des *P* sont égaux aux valeurs des variables duales associées aux contraintes sur ces sections. Cependant la méthode habituelle en comptabilité analytique de calcul des clés de répartition implique une dégénérescence de la solution optimale et donc entraîne l'existence de plusieurs systèmes de valeurs des variables duales, ce qui empêche d'obtenir des coûts définitifs uniques des sections par la résolution d'un programme linéaire. De plus la solution optimale d'un programme de maximisation de marge donne en général des quantités de produits différentes (et la marge est alors plus élevée) de celles qui sont effectivement produites dans la réalité et qui ont permis les imputations des coûts : la production réelle n'est pas optimale.

Par ailleurs il a été proposé (Kornbluth et Salkin à la suite de Kaplan et Thomson) d'utiliser un programme linéaire pour imputer les coûts fixes de manière plus « économique » en tenant compte au maximum des possibilités d'imputation des coûts indirects variables. Cette méthode utilise les valeurs des variables duales mais présente un double inconvénient : elle est confrontée à la multiplicité des valeurs duales due à l'inévitable dégénérescence et d'autre part elle implique une production optimale qui n'est pas la production réelle.

On a proposé ici un système de variables « pseudo-duales » présentant les mêmes propriétés que les variables duales d'un programme linéaire mais qui sont définies pour la production réelle non optimale. On étend alors la procédure proposée par Kaplan et Thomson pour proposer une méthode d'imputation des coûts qui en a les mêmes avantages sans l'inconvénient que la production soit nécessairement optimale.

ANNEXES

Exemple d'application

Considérons une entreprise comportant 5 sections

– 3 sections auxiliaires notées A : administration, énergie, entretien

– 2 sections principales notées P : atelier 1 et atelier 2.

Les unités d'œuvre de ces sections sont respectivement

– % pour l'administration, dont la capacité est alors de 100%

– 1000 kwh pour l'énergie dont la capacité est de 300 milliers de kwh

– Heures de Main d'Oeuvre pour l'entretien (HMO) dont la capacité est de 2000 HMO

– Tonnes (de matières) pour l'atelier 1 dont la capacité est de 6000 t

– Heures-Machines (HM) pour l'atelier 2 dont la capacité est de 60 000 H.

Les capacités respectives seront notées

$$\mathbf{b}_a = \boxed{\begin{matrix} 100 \\ 300 \\ 2000 \end{matrix}} \quad \text{pour les } A \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b}_p = \boxed{\begin{matrix} 6000 \\ \\ 60\,000 \end{matrix}} \quad \text{pour les } P$$

Lorsque *ces capacités sont pleinement employées* la répartition des unités d'œuvre des sections auxiliaires s'effectue ainsi :

	UO	Total	Adm^n	Énergie	Entretien	Atel. 1	Atel. 2
Administration	%	100 %	0	10	10	30	50
Énergie	1000 kwh	300	10	0	20	120	150
Entretien	HMO	2000	0	400	0	800	800
Total UO			100	300	2000	6000	60 000
				$\mathbf{b}_a$		$\mathbf{b}_p$	

Facteurs indirects :

Les sections consomment des facteurs indirects pour un total de 4 200 000 F de charges fixes suivant la répartition suivante donnant un coût total de :

980 000 F pour l'Administration

340 000 F pour l'Énergie

660 000 F pour l'Entretien

940 000 F pour l'Atelier 1

1 280 000 F pour l'Atelier 2

(ces coûts pourront par la suite être chacun scindés en partie fixe et partie variable – *cf.* la méthode du coût variable).

Facteurs indirects	Total	Adm^n	Énergie	Entretien	Atel. 1	Atel. 2
Matières consommables (2000 t à 100 F)	200 000		50 000	50 000	50 000	50 000
Frais de personnel (100 000 h à 20 F)	2 000 000	600 000	90 000	340 000	340 000	630 000
Travaux, fournitures, services extérieurs (5 000 000 kwh à 0,10 F)	500 000	300 000	30 000	20 000	50 000	100 000
Amortissements (10 000 h à 150 F)	1 500 000	80 000	170 000	250 000	500 000	500 000
	4 200 000	980 000	340 000	660 000	940 000	1 280 000

Les consommations UNITAIRES (c'est-à-dire par UO) des sections auxiliaires sont donc :

$$\mathrm{f}_a = \boxed{\frac{980\,000}{100} \quad \frac{340\,000}{300} \quad \frac{660\,000}{2000}} \text{ respectivement}$$

Les consommations unitaires des sections principales sont donc :

$$\mathrm{f}_p = \boxed{\frac{940\,000}{6000} \quad \frac{1\,280\,000}{60\,000}} \text{ respectivement.}$$

Produits et facteurs fixes :

L'entreprise fabrique trois produits A, B, C dans ses sections principales à partir de *facteurs fixes* qui sont attachés à ces sections ; on résume ces facteurs fixes par les limitations qu'ils imposent aux unités d'œuvre de ces sections : le vecteur $\mathbf{b}_p$ traduit les limitations imposées par ces facteurs fixes.

La production de chacun des biens s'effectue à l'aide de la matrice technologique B qui donne le nombre d'UO de chacune des P nécessaire à la fabrication de chaque unité de produit :

$$\begin{array}{r} \\ \text{t (Atel. 1)} \\ \text{HMO (Atel. 2)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 5 & 8 & 12 \end{array}} \end{array} = B$$

Il s'ensuit qu'une production de 4000 A, 2000 B, 2000 C (qui peut ne pas être la production optimale au sens de la *meilleure* utilisation des facteurs fixes disponibles) utilise les 6000 t de l'Atelier 1 et les 60 000 HMO de l'Atelier 2.

Produits et facteurs directs :

Les produits se vendent aux prix $\mathbf{p} = (1500, 1000, 1300)$ respectivement et impliquent des consommations de *facteurs directs* (matières premières et main d'œuvre directe) à des coûts respectifs de $\mathbf{d} = (990, 550, 590)$ et la *marge unitaire sur coût direct variable* est :

$$\mathbf{p} - \mathbf{d} = (510, 450, 710)$$

$$C = \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1/30 & 1/200 \\ 1/10 & 0 & 1/100 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{array}} \qquad D = \boxed{\begin{array}{cc} 30/6000 & 50/60\,000 \\ 120/6000 & 150/60\,000 \\ 800/6000 & 800/60\,000 \end{array}}$$

$$(I - C)^{-1} = \frac{1}{2948} \boxed{\begin{array}{ccc} 2960 & 120 & 16 \\ 300 & 3000 & 63/2 \\ 400 & 4000 & 2990 \end{array}}$$

$$\alpha_a^c = (10\,000, 2000, 400) \qquad \alpha_p^c = (300, 40)$$

Coûts complets des produits :

(i) Coûts unitaires directs: $\mathbf{d} = (990,\ 550,\ 590)$

(ii) Coûts unitaires indirects imputés : $\alpha_p^c\, B = (500,\ 470,\ 630)$

(iii) Coûts complets unitaires : $\mathbf{d} + \alpha_p^c\, B = (1490,\ 1020,\ 1220)$

(iv) Coût complet pour 4000 A, 2000 B, 2000 C : total = 10 440 000

(v) Chiffre d'affaires pour 4000 A, 2000 B, 2000 C = 10 600 000

(vi) Marge sur coût complet (marge nette) : 160 000

Imputation du coût complet :

Imputation des coûts indirects complets *primaires* par UO

– aux sections auxiliaires : $\mathbf{f}_a = (9800,\ 3400/3,\ 330)$

– aux sections principales : $\mathbf{f}_p = (470/3, 64/3)$

Imputation des coûts indirects complets *définitifs* par UO ou produit

– aux sections auxiliaires : $\alpha_a^c = \mathbf{f}_a\,(I - C)^{-1} = (10\,000,\ 2000,\ 400)$

– aux sections principales : $\alpha_p^c = \mathbf{f}_p + \alpha_a^c\, D = (300,\ 40)$

– aux produits : $\alpha^c = \alpha_p^c\, B = (500,\ 470,\ 630)$

d'où la marge unitaire sur coûts complets : $\mathbf{p} - \mathbf{d} - \alpha^c = (10,\ -20,\ 80)$

Remarque: La perte de 40 000 F subie par la production des 2000 unités de produit *B* montre que l'on pourrait améliorer la marge nette en effectuant un autre programme $\mathbf{x}$ de production *avec les mêmes disponibilités des sections auxiliaires et principales.*

Coûts indirects variables :

Si les coûts indirects variables des sections sont connus sous la forme de deux vecteurs $\mathbf{B}_a = (0,\ 140\,000,\ 560\,000)$ et $\mathbf{B}_p = (340\,000,\ 580\,000)$ par exemple, les coûts variables unitaires par UO de chacune des sections sont donnés par :

$$\beta_a = (0,\ 1400/3,\ 280) \qquad \beta_p = (340/6,\ 58/6)$$

Imputation des coûts indirects variables :

Imputation des coûts indirects variables *primaires* par UO

– aux sections auxiliaires : $\beta_a = (0,\ 1400/3,\ 280)$

– aux sections principales : $\beta_p = (340/6,\ 58/6)$

Imputation des coûts indirects variables *définitifs* par UO ou de produit

– aux sections auxiliaires : $\alpha_a^v = \beta_a\,(I - C)^{-1} = (85,48, 854,82, 288,98)$

– aux sections principales : $\alpha_p^v = \beta_p + \alpha_a^v\,D = (112,72,\ 15,728)$

– aux produits : $\alpha^v = \alpha_p^v\,B = (191,36,\ 182,18,\ 245,1)$

Résolution des programmes simplifiés (40) :

Maximisation de la marge sur coûts variables directs (programme I^0) :

On notera $(\mathbf{x}_s^0,\ \lambda_s^0,\ P_s^0)$ la solution optimale de ce premier programme. Cette solution, que l'on peut vérifier sur les traitements informatiques par LINDO donnés ci-dessous, est la suivante :

$$\mathbf{x}_s^0 = (84\,000/19,\ 0,\ 60\,000/19) = (4421.0526,\ 0,\ 3157.8947)$$
$$\lambda_s^0 = (5140/19,\ 910/19) = (270.52631,\ 47.894736)$$
$$P_s^0 = 85440000/19 = 4496842.1$$

Dans la suite on abandonnera parfois les indices « $_s$ » des *programmes simplifiés.*

Maximisation de la marge sur coûts complets (programme I^1)

On calcule $k = \dfrac{H}{P^0} = \dfrac{420\,000}{85\,440\,000/19} = \dfrac{605}{712}$ et on impute à chaque produit i un coût indirect complet de $k\,\lambda^0\,\mathbf{B}^i$, ce qui conduit au programme I^1 et son dual – comparables aux programmes (22) et (23) :

$\operatorname{Max} P^1 = (\delta^0 - k\,\lambda^0\,B)\,\mathbf{x}_s$ $B\,\mathbf{x}_s \leq \mathbf{b}_p$ $\mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}$	$\operatorname{Min} \lambda_s\,\mathbf{b}_p$ $\lambda_s \geq \mathbf{0}$ $\lambda_s B \geq \delta^0 - k\,\lambda^0\,B$

$$k\,\lambda^0 = (89\,950/356,\ 15\,925/356)$$
$$k\,\lambda^0\,B = (169\,575/356,\ 172\,375/356,\ 236\,075/356)$$
$$k\,\lambda^0\,B\mathbf{x}^0 = k\,\lambda^0\,\mathbf{b} = 4\,200\,000$$
$$\delta^1 = \delta^0 - k\,\lambda^0\,B = (11\,985/356,\ -12\,175/356,\ 16\,685/356)$$
$$= (33,66573,\ -34,199438,\ 46,867977)$$
$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0, \quad P^1 = \delta^1\,\mathbf{x}^1 = 5\,640\,000/19 = 296\,842,1 = (1-k)\,P^0$$
$$\lambda^1 = (241\,580/13\,528,\ 42\,770/13\,528) = (17,857776,\ 3,1615907) = (1-k)\,\lambda^0$$
$$\lambda^1\,\mathbf{b} = 4\,015\,680\,000/13\,528 = 5\,640\,000/19 = 296\,842,1 = P^1$$

Tous ces résultats numériques se trouvent dans les sorties de LINDO données ci-dessous.

Maximisation de la marge sur coûts variables complets (programme I^2)

Les coûts indirects variables (β_a, β_p) devront alors être tous reportés sur les seules sections principales sous la forme suivante (on utilisera les valeurs numériques de l'exemple d'illustration) :

$$\beta_s = \beta_p + \beta_a (I - C)^{-1} D = (112,72,\ 15,728) = \alpha_p^v = \left(\frac{332\,300}{2948},\ \frac{46\,366}{2948}\right)$$

On définit $\mu_s = \min(\lambda_s^0, \beta_s) = (112,72,\ 15,728)$

ce qui s'entend $\mu_{si} = \min(\lambda_{si}^0, \beta_{si})$.

Le total des coûts imputés est alors

$$\mu_s B \mathbf{x}_s^0 = 1\,620\,000$$

Les coûts indirects variables imputés aux produits sont

$$\mu_s B = \left(\frac{564\,130}{2948},\ \frac{537\,078}{2948},\ \frac{722\,542}{2948}\right) = (191,36,\ 182,184,\ 245,095)$$

de sorte que la marge sur coûts indirects variables s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathbf{x}_s = (\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu_s B)\,\mathbf{x}_s &= \left(\frac{939\,350}{2948},\ \frac{789\,522}{2948},\ \frac{1\,370\,538}{2948}\right)\mathbf{x}_s \\ &= (318,64,\ 267,816,\ 464,904)\,\mathbf{x}_s \end{aligned}$$

On vérifie que la solution $\mathbf{x}_s^2$ de I^2 est la même que $\mathbf{x}_s^0$, la valeur de la marge est alors

$$P_s^2 = 54\,660\,000/19 = 2\,876\,842,1$$

et les solutions duales sont données par (*voir* sortie LINDO ci-dessous).

$$\lambda_s^2 = (157,806,\ 32,167) = \lambda_s^0 - \mu_s$$

Maximisation de la marge sur coûts complets après imputation des coûts indirects variables (programme I^3) :

Le total des coûts indirects non imputés précédemment est alors

$$4\,200\,000 - 1\,620\,000 = 2\,580\,000$$

d'où la valeur de

$$k^* = \frac{2\,580\,000}{P^2} = \frac{817}{911} = 0.897$$
$$\mu_s + k^*\,\lambda_s^2 = (254{,}243,\ 44{,}576)$$

Les coûts indirects variables imputés aux produits sont alors

$$(\mu_s + k^*\,\lambda_s^2)\,B = (477{,}122,\ 483{,}727,\ 662{,}03)$$

Le total des coûts imputés aux produits est bien le total des coûts indirects :

$$(\mu_s + k^*\,\lambda_s^2)\,B\,\mathbf{x}_s^2 = 4\,200\,000$$

et la marge sur coûts complets s'écrit :

$$\delta^3\,\mathbf{x}_s = [\mathbf{p} - \mathbf{d} - (\mu_s + k^*\,\lambda_s^2)\,B]\,\mathbf{x}_s = (32{,}8783,\ -33{,}727,\ 47{,}9704)\ \mathbf{x}_s$$

On vérifie que la solution $\mathbf{x}_s^3$ de I^3 est la même que $\mathbf{x}_s^0$, la valeur de la marge est

$$P_s^3 = 296\,842$$

et les solutions duales sont données par (*voir* sortie LINDO ci-dessous) :

$$\lambda_s^3 = (16{,}283,\ 3{,}319) = (1 - k^*)\,\lambda_s^2$$

Récapitulation (pour comparaison avec les résultats des méthodes classiques du coût variable et du coût complet) :

Imputation des coûts indirects variables

Imputation des coûts indirects variables *définitifs* par UO ou par produit

– aux sections principales : $\mu_s = (112{,}72,\ 15{,}728)$

– aux produits : $\mu_s\,B = (191{,}36,\ 182{,}18,\ 245{,}1)$

d'où la marge unitaire sur coûts variables complets :

$$\mathbf{p} - \mathbf{d} - \mu_s\,B = (318{,}64,\ 267{,}816,\ 464{,}904)$$

Imputation du coût complet

Imputation des coûts indirects complets *définitifs* par UO ou produit

– aux sections principales : $\mu_s + k^*\,\lambda_s^2 = (254{,}243,\ 44{,}576)$

– aux produits : $(\mu_s + k^*\,\lambda_s^2)\,B = (477{,}122,\ 483{,}73,\ 662{,}03)$

d'où la marge unitaire sur coûts complets :

$$[\mathbf{p} - \mathbf{d} - (\mu_s + k^* \lambda_s^2) B] = (32,8783,\ -33,727,\ 47,9704)$$

Par ailleurs on peut constater que les relations données plus haut entre les solutions optimales des quatre programmes (ici *simplifiés*) sont encore valables – en remplaçant $\mathbf{B}'$ par μ_s.

Méthode alternative à la méthode de Kaplan et Thomson ailleurs qu'à l'optimum commun de maximisation des marges

On a envisagé *deux* productions saturant les sections, (4000, 2000, 2000) et (3600, 3900, 900) parce que la première possède une propriété très spéciale et trompeuse, à savoir $\delta^0 \mathbf{x} = \gamma^0 \mathbf{x}$, $\delta^1 \mathbf{x} = \gamma^1 \mathbf{x}$, $\delta^2 \mathbf{x} = \gamma^2 \mathbf{x}$ et aussi $\delta^3 \mathbf{x} = \gamma^3 \mathbf{x}$. On peut vérifier que ces relations ne sont plus respectées par la deuxième production. Enfin, pour retrouver les imputations des coûts à l'optimum des maximisations des trois marges, on envisagera aussi cette troisième production *optimale* (84 000/19, 0, 60 000/19) (voir tableau page suivante).

Annexe des calculs numériques

1. Pour les programmes $\mathbf{x} = (4000,\ 2000,\ 2000)$ et $\mathbf{x} = (3600,\ 3900,\ 900)$ où aucune contrainte de signe n'est saturée :

$$M = B = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 5 & 8 & 12 \end{array}},\ \mathbf{b}_p = \boxed{\begin{array}{c} 6000 \\ 60\,000 \end{array}},\ \delta^0 = \mathbf{p} - \mathbf{d} = (510,\ 450,\ 710)$$

$$M^+ = \frac{1}{249} \boxed{\begin{array}{cc} 316 & -15 \\ -7 & 9 \\ -127 & 21 \end{array}}$$

Évaluations duales du programme I^0 :

$$\alpha^0 = \delta^0 M^+ = (67\,840/249,\ 11\,310/249) = (272,45,\ 45,421)$$

$$\overline{\alpha}^0 \mathbf{b}_p = 4\,360\,000, \qquad k = \frac{105}{109},$$

Coûts imputés aux produits $k\,\overline{\alpha}^0 B = k\,\alpha^0 M = (481,23,\ 481,26,\ 656,28)$
$k\,\alpha^0 M \mathbf{x} = k\,\overline{\alpha}^0 \mathbf{b}_p = 4\,200\,000$, $\delta^1 = \delta^0 - k\,\alpha^0 M =$

$$(780\,960,\ -848\,550,\ 1\,457\,910)/27\,141$$

Production	(4000, 2000, 2000)	(3600, 3900, 900)	(84 000/19, 0, 60 000/19)
α^0	(272,45, 45,421)	(272,45, 45,421)	(270,526, 47,895, 68,42)
$\alpha^0\, M = \gamma^0$	(499,56, 499,6, 681,28)	(499,56, 499,6, 681,3)	(510, 450, 710)
δ^0	(510, 450, 710)	(510, 450, 710)	(510, 450, 710)
$P^0 = \delta^0\, \mathbf{x}$	4 360 000	4 230 000	4 496 842,1
$\alpha^0\, M\, \mathbf{x} = \overline{\alpha}^0\, \mathbf{b}_p = \gamma^0\, \mathbf{x}$	4 360 000	4 360 000	4 496 842,1
$\alpha^1 = (1-k)\, \alpha^0$	(9,998, 1,1668)	(9,998, 1,1668)	(17,858, 3,1616, 68,421)
$\alpha^1\, M = \gamma^1$	(18,332, 18,334, 25,0)	(18,332, 18,334, 25,0)	(33,6657, –34,2, 46,868)
δ^1	(28,77, –31,26, 53,716)	(28,77, –31,26, 53,72)	(33,6657, –34,2, 46,868)
$P^1 = \delta^1\, \mathbf{x}$	160 000	30 000	296 842,1
$\alpha^1\, M\, \mathbf{x} = \overline{\alpha}^1\, \mathbf{b}_p = \gamma^1\, \mathbf{x}$	160 000	160 000	296 842,1
$\alpha^2 = \alpha^0 - \mu$	(159,729, 29,694)	(159,729, 29,694)	(157,806, 32,167, 68,42)
$\alpha^2\, M = \gamma^2$	(308,2, 317,41, 436,19)	(308,2, 317,41, 436,2)	(318,64, 267,8, 464,9)
δ^2	(318,64, 267,8, 464,9)	(318,64, 267,8, 464,9)	(318,64, 267,8, 464,9)
$P^2 = \delta^2\, \mathbf{x}$	2 740 000	2 610 000	2 876 842,1
$\alpha^2\, M\, \mathbf{x} = \overline{\alpha}^2\, \mathbf{b}_p = \gamma^2\, \mathbf{x}$	2 740 000	2 740 000	2 876 842,1
$(\mu \vert 0)\, M\, \mathbf{x} = \mu\, \mathbf{b}_p$	1 620 000	1 620 000	1 620 000
Coûts indirects non imputés	2 580 000	2 580 000	2 580 000
k^*	129/137	129/137	817/911
$(\mu + k^*\, \overline{\alpha}^2)\, B$	(481,56, 481,06, 655,8)	(481,6, 481,06, 655,8)	(477,12, 483,7, 662,03)
Total coûts imputés $(\mu + k^*\, \overline{\alpha}^2)\, B\, \mathbf{x} = (\mu + k^*\, \overline{\alpha}^2)\, \mathbf{b}_p$	4 200 000	4 200 000	4 200 000
$\alpha^3 = (1-k^*)\, \alpha^2$	(9,3277, 1,7339)	(9,3277, 1,7339)	(16,283, 3,3191, 68,42)
$\alpha^3\, M = \gamma^3$	(17,997, 18,53, 25,471)	(17,99, 18,53, 25,471)	(32,88, –33,73, 47,97)
δ^3	(28,439, –31,06, 54,19)	(28,44, –31,06, 54,19)	(32,88, –33,73, 47,97)
$P^3 = \delta^3\, \mathbf{x}$	160 000	30 000	296 842
$\alpha^3\, M\, \mathbf{x} = \overline{\alpha}^3\, \mathbf{b}_p = \gamma^3\, \mathbf{x}$	160 000	160 000	296 842

Évaluations duales du programme I^1 :

$$\begin{aligned}\alpha^1 = \delta^1 M^+ = (1-k)\,\alpha^0 &= (271\,360,\ 45\,240)/27\,141\\ &= (9,998157,\ 1,6668508)\\ \alpha^1 M = \gamma^1 &= (497\,560,\ 497\,600,\ 678\,560)/27\,141\\ &= (18,332412,\ 18,333886,\ 25,00129)\end{aligned}$$

Pour

$$\mathbf{x} = (4000,\ 2000,\ 2000), \qquad P^1 = \delta^1 \mathbf{x} = 160\,000 = P^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p$$
$$\gamma^1\,\mathbf{x} = 160\,000$$

Pour

$$\mathbf{x} = (3600,\ 3900,\ 900), \qquad P^1 = \delta^1\,\mathbf{x} = 30\,000 = P^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b}_p,$$
$$\gamma^1\,\mathbf{x} = 160\,000.$$

Coûts indirects variables affectés aux

- sections principales : $\beta_p = (340/6,\ 58/6)$
- sections auxiliaires : $\beta_a = (0,\ 1400/3,\ 280)$

$$\begin{aligned}\mu = \beta_p + \beta_a\,(I-C)^{-1}\,D &= (166\,150/1474,\ 23\,183/1474)\\ &= \quad (112,72,\ 15,728)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\,\mathbf{b}_p &= 1\,620\,000\\ \mu\,M &= (282\,065/1474,\ 268\,539/1474,\ 361\,271/1474)\\ &= (191,36,\ 182,184,\ 245,1)\end{aligned}$$

Marge sur coûts indirects variables :

$$\begin{aligned}\delta^2 = \delta^0 - \mu\,M &= (469\,675/1474,\ 394\,761/1474,\ 685\,269/1474)\\ &= (318,64,\ 267,816,\ 464,9)\end{aligned}$$

Évaluations duales du programme I^2 :

$$\alpha^2 = \delta^2\,M^+ = (159,7293,\ 29,693735)$$
$$k^* = \frac{\text{total des coûts indirects} - \mu\,M\,\mathbf{x}}{\overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}_p} = \frac{2580}{2740} = 0,9416058$$
$$\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2 = (263,12253,\ 43,687743)$$

Coûts imputés aux produits :

$$(\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B = (481,56124,\ 481,0632,\ 655,81417)$$

Prix de revient unitaire des produits :

$$\mathbf{d} + (\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B = (1471,5612,\ 1031,0632,\ 1245,81417)$$

Marge unitaire sur coûts complets :

$$\delta^3 = (\mathbf{p} - \mathbf{d}) - (\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B = (28,43876,\ -31,0632,\ 54,18583)$$

Évaluations duales du programme I^3 :

$$\alpha^3 = \delta^3\, M^+ = (9,3272694,\ 1,7339445) = (1 - k^*)\, \alpha^2$$

2. Pour le programme optimal $\mathbf{x} = (84\,000/19,\ 0,\ 60\,000/19)$

On remarque qu'une contrainte de signe est saturée de sorte que

$$M = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 1/2 & 1/2 \\ 5 & 8 & 12 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M^{-1} = \frac{1}{19} \begin{array}{|ccc|} \hline 24 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -19 \\ -10 & 2 & 11 \\ \hline \end{array}$$

Évaluations duales du programme I^0 :

$$\begin{aligned} \alpha^0 = \delta^0\, M^{-1} &= (5140/19,\ 910/19,\ 1300/19) \\ &= (270,526,\ 47,895,\ 68,421) \\ &= (\overline{\alpha}^0 | 68,42) = (\lambda^0 | 68,42) \end{aligned}$$

$$\overline{\alpha}^0\, \mathbf{b}_p = 85\,440\,000/19 = 4\,496\,842,1 = P^0,$$
$$k = \frac{665}{712}, \qquad k\, \overline{\alpha}^0\, \mathbf{b}_p = 4\,200\,000$$

Coûts imputés aux produits : $k\, \overline{\alpha}^0\, B = (476,334,\ 484,199,\ 663,132)$

$$k\, \overline{\alpha}^0\, B\, \mathbf{x} = k\, \alpha^0\, M\, \mathbf{x} = k\, \overline{\alpha}^0\, \mathbf{b}_p = 4\,200\,000,$$
$$\delta^1 = \delta^0 - k\, \overline{\alpha}^0\, B = (11\,985,\ -12\,175,\ 16\,685)/356$$

Évaluations duales du programme I^1 :

$$\begin{aligned}\alpha^1 = \delta^1 M^{-1} &= (120\,790,\ 21\,385,\ 462\,800)/6764\\ &= (17,85777,\ 3,1616,\ 68,421)\\ &= (\overline{\alpha}^1|68,421) = (\lambda^1|68,421)\end{aligned}$$

$$\alpha^1 M = \gamma^1 = (33,66573,\ -34,199438,\ 46,867977) = \delta^1$$
$$\alpha^1 M \mathbf{x} = \gamma^1 \mathbf{x} = \delta^1 \mathbf{x} = P^1 = P^0 - k\,\overline{\alpha}^0\,\mathbf{b} = [(1-k)\,P^0]$$
$$\mu = \beta_p + \beta_a\,(I-C)^{-1}\,D = (112,72,\ 15,728)$$

Évaluations duales du programme I^2 :

$$\begin{aligned}\delta^2 = \delta^0 - \mu\,B &= \left(\frac{469\,675}{1474}, \frac{394\,761}{1474}, \frac{685\,269}{1474}\right)\\ &= (318,64,\ 267,816,\ 464,9)\\ \alpha^2 = \delta^2 M^{-1} &= (157,80582,\ 32,166785,\ 68,421052)\\ &= (\overline{\alpha}^2|68,421) = (\lambda^2|68,421)\\ \overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}_p &= 54\,660\,000/19 = 2\,876\,842,1 = P^2\end{aligned}$$

Coûts variables indirects imputés :

$$\mu\,B\,\mathbf{x} = \mu\,\mathbf{b}_p = (\mu|0)\,M\,\mathbf{x} = 1\,620\,000$$

Coûts indirects non imputés :

$$4\,200\,000 - 1\,620\,000 = 2\,580\,000$$

$$k^* = \frac{\text{coûts indirects non imputés}}{\overline{\alpha}^2\,\mathbf{b}_p} = \frac{2580}{54\,660/19} = \frac{817}{911} = 0,8968166$$
$$\mu + k^*\overline{\alpha}^2 = (254,24338,\ 44,57566)$$
$$(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,\mathbf{b}_p = 4\,200\,000$$

Coûts imputés aux produits :

$$(\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B = (477,1217,\ 483,727,\ 662,0296).$$

Prix de revient unitaire :

$$\mathbf{d} + (\mu + k^*\,\overline{\alpha}^2)\,B = (1467,12168,\ 1033,72697,\ 1252,02962)$$

Marge unitaire sur coûts complets :

$$\delta^3 = \mathbf{p} - \mathbf{d} - (\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B = (32,878306,\ -33,726983,\ 47,970376)$$

Évaluations duales du programme I^3 :

$$\begin{aligned}\alpha^3 = \delta^3 M^{-1} &= (16,28292,\ 3,31908,\ 68,421052)\\ &= (\overline{\alpha}^3 | 68,421) = (\lambda^3 | 68,421)\end{aligned}$$

Ici encore on a :

$$\overline{\alpha}^3\, \mathrm{b}_p = 296\,842 = P^3$$

On comparera les évaluations α^0, α^1, α^2, α^3 avec les valeurs des variables duales λ^0, λ^1, λ^2, λ^3 des programmes linéaires I^0, I^1, I^2 et I^3 respectivement (et on observera la valeur 68,421 apparaissant dans les valeurs de α que l'on comparera aux *coûts d'opportunité* affectés aux variables – comme x_2 – non utilisées dans le programme optimal et dont la signification économique est celle d'un coût supporté par l'introduction de cette production au niveau unitaire alors que l'optimum préconise de ne pas la produire ($x_2 = 0$).

Imputation aux produits des 4 200 000 F de coûts indirects

Ce paragraphe permet de comparer les imputations des coûts indirects aux produits selon la méthode employée, qu'il s'agisse d'une production **x** quelconque, comme (4000, 2000, 2000) ou (3600, 3900, 900) ou de la production optimale $\mathbf{x}^* = (84\,000/19,\ 0,\ 60\,000/19)$.

1. Méthode classique du coût complet : $\alpha^c = \alpha_p^c\, B = (500,\ 470,\ 630)$

2. Méthode alternative à la méthode de Kaplan et Thomson :

2.1. Coût complet $k\,\alpha^0\, B$

coûts imputés aux produits :

$$k\,\overline{\alpha}^0\, B \ = \ k\,\alpha^0\, M \ = \ (481,23,\ 481,26,\ 656,28) \text{ pour } \mathbf{x}$$

coûts imputés aux produits :

$$k\,\overline{\alpha}^0\, B \ = \ (476,334,\ 484,199,\ 663,132) \text{ pour } \mathbf{x}^*$$

2.2. Coût complet après imputation des coûts indirects variables

coûts imputés aux produits :

$$(\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B \ = \ (481,56,\ 481,06,\ 655,81) \text{ pour } \mathbf{x}$$

coûts imputés aux produits :

$$(\mu + k^* \overline{\alpha}^2)\, B \ = \ (477,12,\ 483,73,\ 662,03) \text{ pour } \mathbf{x}^*.$$

Annexe informatique (LINDO)

Programme I^0

```
MAX 510 X1 + 450 X2 + 710 X3
SUBJECT TO
        2)        X1 + 0.5 X2 + 0.5 X3 <= 6000
        3)        5 X1 + 8 X2 + 12 X3 <= 60000
        4)        X1 >= 0
        5)        X2 >= 0
        6)        X3 >= 0
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)          4496842.00

 VARIABLE         VALUE                      REDUCED COST
      X1                     4421.053000          .000000
      X2                         .000000        68.421050
      X3                     3157.895000          .000000

     ROW          SLACK OR  SURPLUS          DUAL PRICES
      2)                         .000000       270.526300
      3)                         .000000        47.894740
      4)                     4421.053000          .000000
      5)                         .000000          .000000
      6)                     3157.895000          .000000

NO.  ITERATIONS  =  2
```

Programme I^1

```
MAX 33.66573 X1 - 34.19944 X2 + 46.86798 X3
SUBJECT TO

        2)          X1  + 0.5 X2 + 0.5 X3 <= 6000
        3)          5 X1 + 8 X2 + 12 X3 <= 60000
        4)          X1 >= 0
        5)          X2 >= 0
        6)          X3 >= 0
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)          296842.100

 VARIABLE         VALUE                  REDUCED COST
       X1                  4421.053000        .000000
       X2                     .000000       68.421060
       X3                  3157.895000        .000000

      ROW         SLACK OR  SURPLUS       DUAL PRICES
       2)                     .000000       17.857770
       3)                     .000000        3.161591
       4)                  4421.053000        .000000
       5)                     .000000         .000000
       6)                  3157.895000        .000000
```

Programme I^2

```
MAX 318.63977 X1 + 267.81616 X2 + 464.90439 X3
SUBJECT TO

        2)          X1  + 0.5 X2 + 0.5 X3 <= 6000
        3)          5 X1 + 8 X2 + 12 X3 <= 60000
        4)          X1 >= 0
        5)          X2 >= 0
        6)          X3 >= 0
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0
```

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)          2876842.00

 VARIABLE          VALUE                     REDUCED COST
       X1                4421.053000             .000000
       X2                   .000000            68.421070
       X3                3157.895000             .000000

      ROW          SLACK OR  SURPLUS         DUAL PRICES
       2)                   .000000           157.805800
       3)                   .000000            32.166790
       4)                4421.053000             .000000
       5)                   .000000              .000000
       6)                3157.895000             .000000
```

Programme I^3

```
MAX 32.87834 X1 - 33.72696 X2 + 47.9704 X3
SUBJECT  TO

        2)          X1  + 0.5 X2 + 0.5 X3 <= 6000
        3)          5 X1 + 8 X2 + 12 X3 <= 60000
        4)          X1 >= 0
        5)          X2 >= 0
        6)          X3 >= 0
END
LP OPTIMUM  FOUND  AT  STEP  0

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)          296842.300

 VARIABLE          VALUE                     REDUCED COST
       X1          4421.053000                   .000000
       X2              .000000                 68.421050
       X3          3157.895000                   .000000

      ROW          SLACK OR  SURPLUS         DUAL PRICES
       2)                   .000000            16.282960
       3)                   .000000             3.319077
       4)                4421.053000             .000000
       5)                   .000000              .000000
       6)                3157.895000             .000000
```

BIBLIOGRAPHIE

1. S. L. Campbell et C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations,* Pittman, 1979.
2. A. Charnes, W. Cooper et Y. Ijiri, Breakeven Budgeting and Programming to Goals, *Journal of Accounting Research,* 1963.
3. C. Colantoni, R. Manes et A. Whinston, Programming Profit Rates and Pricing Decisions, *The Accounting Review,* 1969.
4. J. Demski, An Accounting System Structured on a Linear Programming Model, *The Accounting Review,* 1967.
5. M. Desplas, Matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose et variables duales généralisées en programmation mathématique, *RAIRO, Recherche opérationnelle/ Operations Research,* 1992, *26*, n° 4, p. 313-360.
6. Y. Ijiri, F. Levy et R. Lyon, A Linear Programming Model for Budgeting and Financial Planning, *Journal of Accounting Research,* 1963.
7. R. S. Kaplan et G. L. Thomson, Overhead Allocation via Mathematical Programming Models, *Accounting Review,* 1971, *46*, (2), p. 352-364.
8. J. S. Kornbluth et G. R. Salkin, *Linear Programming in Financial Planning,* Accountancy Age Books, Haymarket Publishing Limited, 1973.
9. J. S. Kornbluth et G. R. Salkin, *The Management of Corporate Financial Assets: Applications of Mathematical Programming Models,* Academic Press, 1987.
10. D. Lacaze, *Prix Duaux et Comptabilité Analytique,* Document de recherche, Groupe de Mathématiques Économiques, Paris, 1980.
11. L. D. Pyle, The Generalized Inverse in Linear Programming. Basic Structure, *SIAM*, May 1972, *22*, n° 3.
12. J. Samuels, Opportunity Costing: An Application of Mathematical Programming, *Journal of Accounting Research,* 1965.
13. G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications,* 2nd Ed. 1980. Academic Press, 3rd Ed. 1988, Harcourt Brace.